LLULL, vol. 24, 2001, 629-648

GALILEO Y LA GÉNESIS DE LA CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

LUCIO R. BERRONE
Universidad Nacional de Rosario (Argentina)

RESUMEN

La relación entre espacios recorridos en tiempos iguales y sucesivos a partir del reposo por un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado conocida como «ley de los números impares» no fue, como afirman algunos autores, precisamente contrastada por Galileo mediante experimentos con planos inclinados. Antes bien, dicha relación funcional emergió de estos experimentos. De esta relación funcional se deriva la dependencia cuadrática del espacio respecto del tiempo, hecho que Galileo conocía bien y que estaba en condiciones de demostrar matemáticamente, aunque no queden pruebas escritas de ello. A la postre, Galileo consigue acoplar su teoría de la caída libre con ciertos elementos tradicionales tales como la regla de Merton. Es esta versión de la teoría la que ha ganado inmortalidad en sus Diálogos acerca de Dos Nuevas Ciencias.

ABSTRACT

Unlike what is asserted by some authors, the relationship existing amongst spaces travelled at equal and successive times by uniformly accelerated bodies departing from the rest, a relationship which is known as «law of odd numbers», was not contrasted by Galileo through his experiments with inclined planes: this relationship rather emerged through those experiments. The quadratic dependence of the travelled spaces with respect to time is quickly derived from this functional relationship, a fact Galileo was surely capable to prove in a mathematical way despite of no written evidence seems to be known up to date. At the end, Galileo succeeded in connecting his theory of freely falling bodies with certain traditional elements like the Merton rule. It was this version of the theory what was immortalized in his Discourses on Two New Sciences.

Palabras Clave: Física, Matemática, Filosofía de la Ciencia, Italia, Siglo XVII.

Recibido el 2 de marzo de 2001 *I.S.S.N. 0210-8615*

1. Introducción

«*Vamos a instituir una ciencia nueva sobre un tema muy antiguo...*» tales son las palabras con las que Galileo inaugura la «Jornada Tercera» de su obra máxima, los *Diálogos Acerca de Dos Nuevas Ciencias*, capítulo este en donde funda el análisis cinemático de los movimientos uniforme y uniformemente acelerado. Un poco más abajo agrega:

> «[...] pues nadie, que yo sepa, ha demostrado que los espacios, que un móvil en caída y a partir del reposo recorre en tiempos iguales, retienen entre sí la misma razón que tiene la sucesión de los números impares a partir de la unidad.»[1]

La propiedad del movimiento de caída libre expresada someramente aquí, encuentra lugar dentro del entramado lógico de la «Jornada Tercera» como primer corolario al Teorema II (de la sección dedicada al «Movimiento naturalmente acelerado») y hace referencia a una propiedad común de todo movimiento uniformemente acelerado:

«Si en tiempos iguales, tomamos sucesivamente desde el primer instante o comienzo del movimiento[2], tales como *AD*, *DE*, *EF*, *FG*, se recorrieren los espacios *HL*, *LM*, *MN*, *NI*, estos espacios estarán entre sí, como los números impares a partir de la unidad; es decir, como, 1, 3, 5, 7.»

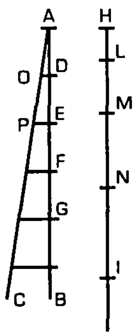

Figura 1

Si T es cierta unidad temporal y x (t) denota el espacio recorrido por el móvil al tiempo t, el hallazgo de Galileo se expresa algebraicamente de la siguiente forma

$$\frac{x((n+1)T)-x(nT)}{x(nT)-x((n-1)T)}=\frac{2n+1}{2n-1},\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Como hemos dicho, Galileo deduce (1) (Corolario I) del teorema (Teorema II) que establece bajo la expresión proporcional

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)}=\frac{t_1^2}{t_2^2} \tag{2}$$

la ley cuadrática de caída $x(t)=at^2$. Junto con la definición de movimiento uniformemente acelerado como aquel que «partiendo del reposo, va adquiriendo incrementos iguales de velocidad durante tiempos iguales» y con el Teorema I —una versión de la regla de Merton[3]— el Teorema II y su corolario conforman la descripción cinemática básica proporcionada por Galileo para el movimiento uniformemente acelerado. Completando este marco básico con el postulado que establece la igualdad entre las velocidades adquiridas por un móvil al desplazarse por dos cualesquiera planos inclinados con la misma altura vertical, Galileo es capaz de edificar en la «Jornada Tercera» una rica teoría, con resultados de gran belleza e interés como aquel que es recordado hoy con su nombre: el «Teorema de Galileo».

El vacío existente entre esta teoría matemática del movimiento uniformemente acelerado y el movimiento natural de caída libre de Galileo lo rellena —los escolásticos nunca alcanzaron a dar este paso, conviene recordarlo— con sus experiencias con planos inclinados descriptas en aquel célebre pasaje de la «Jornada Tercera».

«En un cabrio o si se quiere en un tablón de madera de unos doce codos de longitud, y de ancho, en un sentido, medio codo y en el otro tres dedos, en esa menor anchura se había excavado un canalito, poco más ancho que un dedo; habiéndolo excavado muy derecho, y después de haberlo revestido, para que estuviera bien pulido y liso, con un pergamino tan pulido y lustrado como fue posible, hacíamos descender por él una bola de bronce, durísima, bien redonda y pulida; una vez colocado dicho tablón inclinado, por haber elevado sobre la horizontal uno de sus extremos, una braza o dos a capricho, se dejaba (como digo) descender por dicho canalito la bola, anotando, del modo que después diré, el tiempo que empleaba en recorrerlo todo, repitiendo el experimento muchas veces, para medir con toda exactitud el tiempo, en el cual jamás se encontraba una diferencia ni siquiera de la décima parte de una pulsación. Efectuada y establecida con toda precisión esta operación, hacíamos descender la misma bola solamente por la cuarta parte de la longitud de ese canal; y medido el tiempo de su caída, nos encontramos con que era siempre exactísimamente la mitad del anterior. Y haciendo luego experimentos con otras partes, al cotejar después el tiempo de toda la longitud con el tiempo de la mitad, o de los dos tercios, o de los tres cuartos, o, en conclusión, con el tiempo de cualquier otra división, por medio de experiencia más de cien veces repetidas, nos encontrábamos siempre con que los espacios recorridos eran entre sí como los cuadrados de los tiempos, y esto en todas las inclinaciones del plano, o sea del canal por el cual se hacía descender la bola...»

Pasaje del que es aparente que Galileo contrastó mediante directas experiencias la ley (2) de los espacios recorridos y tiempos empleados en recorrerlos.

La relación (1) especifica una particular propiedad de la función $t \rightarrow x(t)$ en el movimiento uniformemente acelerado. Ahora bien, con el fin de profundizar en las características de esta propiedad, podemos indagar la cuestión inversa; i.e., la de encontrar todas las funciones $x(t)$, continuas, digamos, que satisfacen la relación (1) cualquiera sea $T>0$. Resumidamente, podemos considerar a (1) como una ecuación funcional.

A pesar de no haber dejado una prueba escrita de ello, parece que Galileo se dio clara cuenta de que la ley cuadrática (2) es consecuencia de la relación (1), hecho sobre el que elaboraremos extensamente en las secciones siguientes. Más aún, en su artículo *On history, applications and theory of functional equations* aparecido en [2], J. Aczél afirma que fue justamente la relación (1) lo que Galileo contrastó en sus experimentos con planos inclinados[4]. La misma aseveración vuelve a aparecer en la primera de las notas históricas del tratado [1] (veánse págs. 359-360) donde se lee que:

«Galileo was so clearly aware of the fact that the functional equation (1) characterizes the quadratic law (although he did not prove it in both directions), that it was (1), which he verified in his experiments for the fall of bodies in order to show that the process inndeed quadratic»[5].

A la vista de lo escrito por Galileo mismo en sus *Diálogos*, el contenido de este párrafo parece, por lo menos, intrigante, y ha sido intentando clarificar la cuestión de si Galileo había en realidad contrastado (1) en sus experimentos con planos inclinados como el presente trabajo dio comienzo.

La literatura sobre Galileo es muy amplia y diversas opiniones han sido vertidas sobre la relación entre teoría y experimento en la concepción Galineana. Respecto de la caída libre, T. S. Kuhn, afirma en [21], pág. 196, que «[...] (Galileo) había desarrollado su teoría sobre ese tema junto con muchas de sus consecuencias antes de llevar a cabo sus experimentos sobre un plano inclinado» lo cual parece sustentable de atenernos solamente a la relación que el mismo Galileo hace en la Jornada Tercera de sus *Diálogos*. Sin embargo, la realidad parece un tanto más compleja: una intrincada interconexión entre teoría y experimento sirvió para que Galileo sintetizara sus leyes para la caída de los graves. Desgraciadamente, Galileo no publicó los resultados numéricos de sus experimentos —algo que, convencida del orden matemático de las cosas, una mente como la suya hubiera quizá juzgado una tarea innecesaria y que, en todo caso, sólo se impuso durante la generación de científicos que le sucedió— y tanto éstos como la naturaleza de sus intuiciones más fundamentales han debido rastrearse en las notas personales que dejó a lo largo de su vida. Indagar en tales apuntes, reconstruir el pensamiento a partir de las muchas veces disímiles y confusas anotaciones mezcladas con diagramas y figuras numéricas, ha sido el trabajo emprendido por especialistas como S. Drake. Dicho trabajo ha modificado sustancialmente la comprensión que hasta hace poco se tenía del tema[6] y los mismos especialistas han debido modificar sus concepciones iniciales para adaptarlas a sus nuevos hallazgos. En las secciones que siguen, haremos amplio uso de las conclusiones de Drake para aclarar las cuestiones arriba planteadas.

2. Los primeros experimentos con planos inclinados

La evolución de las ideas del maestro en torno a la caída libre fue ardua, y el camino que arranca con sus primeros intentos en Pisa de establecer una teoría para la caída de los graves y que finaliza con la deducción de la expresión cuadrática (2) a partir de la noción de aceleración uniforme tal como aparece en los «*Diálogos...*», no le ahorró fracasos ni equívocos. Stillman Drake, entre tantos otros pensadores, ha comparado la «lógica del descubrimiento» y al especial estado de la mente que la acompaña, con el momento en que las piezas desordenadas de un gran rompecabezas encuentran por fin cada una su lugar . Es opinión del autor del presente trabajo el que, probablemente, no resulte posible avanzar más allá de ciertos límites en la comprensión y posterior reconstrucción racional de ese intrincado proceso. De manera esquemática pero simple y adecuada a nuestro propósito, resumiremos esta evolución del pensamiento Galileano en torno a la caída libre, en tres fases: una *fase de preparación* en donde «las piezas del rompecabezas» están dispersas y son realizados los primeros intentos por encontrarles orden y sentido; una *fase crucial* en la cual emergen los resultados básicos, fase esta que puede localizarse temporalmente en el periodo transcurrido entre dos famosas cartas, una, abriendo el período, dirigida al marqués Guido Ubaldo dal Monte, cerrándolo otra dirigida al fraile Paolo Sarpi; la última fase corresponde a la de las *elaboraciones posteriores*, pues transcurren más de treinta años desde el momento en que Galileo informa a su amigo P. Sarpi de sus hallazgos hasta la publicación final de sus Diálogos, tiempo que sirvió al maestro para reelaborar extensamente sus ideas y afinar sus argumentos relativos a la caída libre.

Preparación: Con una formación esencialmente autodidacta y con algunos trabajos matemáticos de su producción en su haber, hacia fines de 1589 Galileo obtiene una posición en la Universidad de Pisa como profesor de Matemática, posición que mantuvo durante el lapso de tres años, aproximadamente. Durante este tiempo escribió un tratado, hoy conocido como *De Motu*, en cuyas primeras secciones expuso una teoría de la caída de los graves basada en el principio de Arquímedes. En este tratado Galileo expresó la ley de equilibrio en un plano inclinado e intentó utilizarla para deducir las velocidades de descenso. Los resultados obtenidos discrepaban con la experiencia, hecho que parece haber provocado en Galileo la determinación de no publicar su tratado. El 7 de diciembre de 1592, Galileo dicta su clase inaugural en la Universidad de Pádua, donde le había sido conferida la cátedra de «lettore principale di matematiche». Durante los años subsiguientes, los más prolíficos de su vida, compone diversos tratados para el uso de sus estudiantes. Entre estos tratados, que circularon siempre sin título ni firma, uno conocido como *Le Meccaniche* extiende los desarrollos sobre planos inclinados que aparecen en *De Motu*.

Fase crucial: La fase crucial en el desarrollo de las ideas de Galileo sobre la caída de los graves puede situarse entre los años 1602 y 1604. Durante 1602, Galileo mantiene correspondencia con Guido Ubaldo, marqués del Monte. En sus cartas discutía el descenso de los cuerpos a través de arcos y cuerdas de círculo, el movimiento del péndulo y otras cuestiones mecánicas[7]. Otra carta, dirigida a Paolo Sarpi en octubre de 1604, nos informa que ya en esa fecha Galileo dispone, entre otras cosas, de una prueba de la relación (1) y de la ley cuadrática (2):

«Repensando las cosas relacionadas con el Movimiento, en las cuales, para demostrar los accidentes por mi observados, me faltaba un principio totalmente indudable para tomarlo como axioma, me he reducido a una proposición, la cual tiene mucho de natural y evidente. y supuesta esta, demuestro luego el resto; esto es, que los espacios recorridos por el movimiento natural están en proporción doble de los tiempos y, en consecuencia, los espacios recorridos en tiempos iguales son como los números impares *ab unitate*, y las otras cosas. Y el principio es este, que el móvil natural vaya aumentando su *velocitá*, con aquella proporción con que se aparta del punto inicial de de su movimiento; como v .g. cayendo el grave desde el extremo *A* por la línea *ABCD*[8], supongo que el grado de *velocitá* que tiene en C es al grado de *velocitá* que tuvo en B como la distancia *CA* es a la distancia *BA*, y así, consiguientemente en *D* tiene un grado de *velocitá* mayor que en *C*, puesto que la distancia *DA* es mayor que la *CA*.

Estimaré que V. Sig. M. Rev. lo considere un poco, y me diga luego su opinión. Y si aceptamos este principio, no solo demostramos, como he dicho, las otras conclusiones, sino que disponemos de argumentos para mostrar que el grave natural y el proyectil violento pasan por las mismas proporciones de *velocitá*. Por el hecho de que, si el proyectil es lanzado desde el extremo *D* hasta el extremo *A*, es manifiesto que en el punto *D* tiene un grado de *impeto* suficiente para empujarlo hasta el extremo *A* y no más allá; y cuando el mismo proyectil está en *C*, es claro que está munido de un grado de *impeto* suficiente para empujarlo al mismo extremo *A*; y análogamente, el grado de *impeto* en *B* basta para empujarlo hasta *A*. De donde es manifiesto que el *impeto* en los puntos *D*, *C*, *B* va decreciendo según la proporción de las líneas *DA*, *CA*, *BA*; de donde, si según las mismas va, durante la caída natural, adquiriendo grados de *velocitá*, es cierto cuanto he dicho y creído hasta aquí. En cuanto a la experiencia de la flecha, que creo adquirirá al caer igual fuerza a aquella con que fue lanzada, y también sobre otros ejemplos hablaremos personalmente, aprovechando que el Día de Todos los Santos está ya próximo. Entre tanto, le ruego que reflexione un poco sobre el susodicho principio...»[9].

En esta carta están presentes algunas de las concepciones mecánicas medievales (*impeto*), así como la distinción Aristotélica entre movimiento natural y violento, pero también emergen claramente la ley cuadrática (2) y la relación (1). El término *velocitá*, repetidamente utilizado en la carta, ha dado lugar a interpretaciones erróneas por parte de los historiadores, quienes le atribuyeron un significado equivalente al de la actual palabra velocidad hasta que S. Drake reveló en [9] el exacto significado *velocitá=(velocidad)*^{2} con que lo usaba Galileo. En otro notable trabajo ([11]), Drake ha puesto de relieve el rol fundamental que la «ley de los números impares»; i.e., la relación (1), jugó en el descubrimiento de la ley de caída de los graves: en realidad, las mediciones hechas por Galileo de las distancias recorridas *en tiempos iguales* por un móvil en descenso por un plano inclinado (1), *sirvieron para hacer emerger esta relación antes que para contrastarla*. El modo en que Galileo, explotando sus habilidades musicales[10], se las ingenia para comprobar la igualdad de tiempos en una época en que no existían relojes de precisión es digno de nuestra asombrada admiración. Para un informe detallado sobre estos experimentos remitimos al lector al artículo [11] o bien al Chap. 5 de [12].

Figura 2

Elaboraciones posteriores: En los años siguientes y hasta la escritura de los *Diálogos*, Galileo elabora las adquisiciones fundamentales de la fase anterior. En 1609, Galileo comenzó a escribir un tratado sobre el movimiento, en el cual desvía su atención del cuadrado de la velocidad como magnitud básica y, en su lugar, comienza a considerar la simple velocidad, razón de los espacios recorridos al tiempo empleado en recorrerlo. Por la misma época, Galileo establece la teoría matemática del movimiento de los proyectiles (véase [10] y Chap. 7 y 8 de [12]). El desarrollo del tratado se vio interrumpido por sus investigaciones con el telescopio y fue retomado recién en 1616, cuando en el tratado en latín De *motu accelerato* aparece la definición de aceleración uniforme y muchas de los resultados contenidos en los *Diálogos*. Según refiere S. Drake en [12], p. 370 y ss., es recién en 1635, durante el proceso de revisión de los manuscritos que iban a componer la «Tercera Jornada» de sus *Diálogos*, cuando arriba Galileo a la forma definitiva en que aparece allí expuesta la cinemática del movimiento uniformemente acelerado.

3. Discusión de la ecuación (1)

Una expresión algebraica completa del Corolario 1 de la «Jornada Tercera» de los *Diálogos* debiera tener en cuenta el hecho dé que la unidad temporal T puede ser escogida con total libertad. Así, alteraremos levemente la notación empleada para escribir (1), poniendo en su lugar

$$\frac{x((n+1)t)-x(nt)}{x(nt)-x((n-1)t)}=\frac{2n+1}{2n-1}, n \in \mathrm{N}, t>0 \tag{3}$$

El análisis que a continuación haremos" de la ecuación funcional (3), efectuado con las herramientas que la teoría moderna pone a nuestra disposición, nos permitirá luego adelantar en la elaboración de nuestras ideas. Consecuencia primera y directa de dicho análisis será el hecho de que x(t) = at², t ≥ 0, es la solución general de la ecuación (3) dentro de la clase de las funciones continuas o monótonas (con $x(0) = 0$). En segundo lugar, mostraremos que todos los ingredientes matemáticos fundamentales del análisis le eran conocidos a Galileo. Llegado a este punto, la situación de la materia será parecida a la de aquellos experimentos que, dadas ciertas condiciones como las que supuestamente obraban en la fase primitiva de nuestro planeta, mostraban la posibilidad de la síntesis de moléculas tan complejas como los amino-ácidos a partir de agua y metano: si bien no puede concluirse la aparición de la vida en la Tierra a causa de dicha síntesis molecular , el resultado mismo del experimento es un fuerte indicio a favor de esa conclusión. Sin embargo, de un pasaje de sus *Diálogos Sobre los Sistemas Máximos* en donde Galileo, en boca de Salviati, describe los hallazgos que sobre el movimiento de los graves ha realizado «l' Accademico nostro comun amico» , resulta manifiesto que tenía claro conocimiento de la «naturaleza cuadrática» de las soluciones de (3), y ello a pesar de no haber dejado una prueba matemática concreta ni en sus notas personales ni en su correspondencia.

Comenzaremos reescribiendo la ecuación (3) en las formas

$$x((n+1)t)-x(nt)=\frac{2n+1}{2n-1}[x(nt)-x((n-1)t)], n \in \mathrm{N}, t>0, \tag{4}$$

y

$$x((n+1)t)-\frac{4n}{2n-1}x(nt)+\frac{2n+1}{2n-1}x((n-1)t)=0, n \in \mathrm{N}, t>0. \tag{5}$$

Una vez fijado el valor de $t > 0$, la ecuación (5) es una ecuación en diferencias de segundo orden, de tipo lineal homogéneo con coeficientes variables y, como es bien sabido, no existen algoritmos generales para la solución de esta clase de ecuaciones. Sin embargo, la forma (4) muestra que $x(nt) \equiv 1$ es solución particular de (5), por lo que puede reducirse su orden (cf. [3], p. 43; [23], p. 178-179). De hecho, (4) es ya la forma reducida de la ecuación: se trata de una ecuación de primer orden para las diferencias $y(nt) = \Delta x(nt) = x(nt) - x((n-1)t)$ de la forma cuya solución se escribe inmediatamente como

$$y(nt) = (2n-1)y(t),\ n \in \mathrm{N}.$$

Así pues, la solución de (5) se encuentra resolviendo

$$\Delta x(nt) = (2n-1)y(t),\ n \in \mathrm{N}.$$

Como expresa la clásica relación operacional $\Delta^{-1}= \Sigma^{n}$ (cfr. [3], [15], [23]), la suma Σ^{n} es el operador inverso del operador de diferencias Δ, por lo cual, teniendo en cuenta que $y(t) = x(t) - x(0)$, la solución de (6) se expresa en la forma

$$x(nt) = x(0) + (x(t) - x(0))\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = x(0) + (x(t) - x(0))n^2,$$

una vez que

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2, n \in \mathrm{N}. \tag{7}$$

Imponiendo la condición $x(0)=0$, queda

$$x(nt) = x(t)n^2, n \in \mathrm{N}, t > 0. \tag{8}$$

Veremos que esta misma expresión es válida para los valores racionales de n. En efecto, sustituyendo t por t/n en (8), obtenemos

$$x(t) = x\left(\frac{t}{n}\right)n^2, \tag{9}$$

y (8) junto con (9) proporcionan

$$x\left(\frac{m}{n}t\right) = x\left(\frac{t}{n}\right)m^2 = x(t)\left(\frac{m}{n}\right)^2 \tag{10}$$

Puesto que los números racionales alcanzan para dar cuenta de cualquier resultado experimental, la expresión (10), que exhibe la dependencia cuadrática del espacio recorrido respecto de cualquier *fracción racional* de la unidad de tiempo t, es suficiente para cualquier propósito práctico. Para ir más allá y expresar, a través de una ley, la intuición física de un «espacio continuo que varía según el tiempo transcurre con continuidad», es preciso traducir al lenguaje matemático esta intuición. Distintas hipótesis parecen adecuadas a tal propósito: podemos limitarnos a considerar, por ejemplo, las leyes $t \to x(t)$ que sean o bien funciones continuas o monótonas. La idea de continuidad expresa matemáticamente aquella intuición, mientras que la hipótesis de monotonía involucra además la observación de que el espacio recorrido por un móvil en caída libre aumenta a medida que pasa el tiempo (y recíprocamente): $t_2>t_1$ si y sólo si $x(t_2)>x(t_1)$. Asumiendo cualquiera de estas dos hipótesis, la expresión (8) se extiende a los valores reales de n. Veamos, por ejemplo, cómo argumentaríamos actualmente para comprobar esto bajo la hipótesis de monotonía. Sea $\tau \in$ R, $\tau>0$, y consideremos dos sucesiones de números racionales $\{r_n\}$ y $\{R_n\}$ tales que $r_n\uparrow\tau$, $R_n\downarrow \tau$ cuando $n\uparrow+\infty$. De la supuesta monotonía de x resulta

$$r_n^2x(t)=x(r_nt)<x(rt)<x(R_nt)=R_n^2x(t), n\in \mathrm{N},$$

y haciendo $n\uparrow+\infty$ en estas desigualdades obtenemos

$$\tau^2x(t)\leq x(\tau t)\leq \tau^2x(t);$$

que expresa la validez de (8) para cualquier n real positivo.

Los elementos básicos del estudio anterior de la ecuación funcional (3) le eran bien conocidos a Galileo. En efecto, Galileo podría haber arribado a la ecuación (6) simplemente «multiplicando miembro a miembro»[12] las n-1 primeras ecuaciones (3):

$$\begin{aligned}
&\frac{x(nt)-x((n-1)t)}{x(t)}=\\
&\qquad=\frac{x(nt)-x((n-1)t)}{x((n-1)t)-x((n-2)t)}\times\ldots\times\frac{x(3t)-x(2t)}{x(2t)-x(t)}\times\frac{x(2t)-x(t)}{x(t)-x(0)}=\\
&\qquad=\frac{2n-1}{2n-3}\times\ldots\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}=\\
&\qquad=2n-1,
\end{aligned}\tag{11}$$

de donde hubiera deducido rápidamente

$$x(nt)=x(t)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x(kt)-x(k-1)t}{x(t)}\right)=x(t)\sum_{k-1}^{n}(2k-1)=x(t)n^2.\tag{12}$$

El ingrediente no trivial de la cadena de igualdades (12) —la generación de los sucesivos cuadrados mediante la suma de los números impares consecutivos a partir de la unidad— era ya conocido por los Pitagóricos, quienes consideraron las disposiciones de objetos que se muestran en la Figura 3.

Una «prueba» mediante inducción incompleta se encuentra ya en los libros aritméticos de Euclides y Leonardo de Pisa (Fibonacci), en la Proposición I de su *Liber Quadratorum* compuesto en 1225, nos dice que

«Al reflexionar sobre el origen de todos los números cuadrados, descubrí que surgen de la progresión ordenada de los números impares. Porque la unidad es un número cuadrado, y de ella proviene el primer cuadrado que es 1. Si se le agregan tres unidades, se forma el segundo cuadrado, 4, cuya raíz es 2. Si a esta suma se le agrega el tercer número impar, 5, se obtiene el tercer número cuadrado, 9, cuya raíz es 3. La serie ordenada de los números cuadrados surge así, del conjunto ordenado de los números impares.»[13]

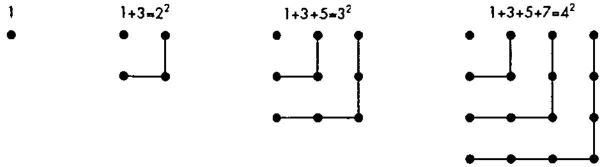

Figura 3

En la Proposición II de la misma obra Fibonacci proporciona una demostración por inducción incompleta de (7). Si Galileo no disponía ya de la idea de inducción completa, hay que admitir que el concepto flotaba en el aire de su época. Se atribuye usualmente a Blaise Pascal (véase [4]) el primer uso sistemático del principio de inducción en su *Traité du Triangle Arithmétique* (1662), pero ya Maurolico, en la introducción de sus *Opuscula Mathematica*, aparecidos en Venecia en 1575, enuncia este principio (cfr. [5],p. 142) y Pierre de Fermat explota extensivamente una especie de «inducción en reversa» —que en eso consiste su *método del descenso infinito*— durante las primeras décadas del siglo XVII[14]. En todo caso, debemos admitir que los diagramas pitagóricos mostrados en la Figura 3 son por lo menos tan transparentes para la mente como la «rigurosa» prueba inductiva moderna de la identidad (7).

En cuanto a la derivación de (10) desde (8), si bien no es imposible que Galileo haya seguido una línea de razonamiento parecida a la que nosotros hemos delineado arriba, resulta improbable que lo hiciera de este modo. Parece más apropiado que la ley cuadrática fuera deducida de (10) utilizando la teoría de proporciones de Eudoxo[15], tal como aparece expuesta en los libros V y XII de los *Elementos* de Euclides. Recordemos, de un lado, que Galileo era buen conocedor de Euclides y, en particular, que utilizó la teoría de proporciones para demostrar el Teorema I de la sección consagrada al Movimiento Uniforme en la Jornada Tercera. Por otro lado, la propiedad de monotonía de la función $\tau \to x(\tau)$, postulada por Galileo para el movimiento uniforme (Axiomas I y II de la sección sobre el

Movimiento Uniforme en la Jornada Tercera), podría evidentemente generalizarse al movimiento uniformemente acelerado. Con estos dos elementos en mano, fijado un número real positivo r podríamos escribir, para cada par de enteros positivos m,n:

$$\begin{aligned} n\tau \lesseqgtr m &\Leftrightarrow x(n\tau t) \lesseqgtr x(mt) && \text{(monotonía)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x(n\tau t)} \lesseqgtr \sqrt{x(mt)} && (\text{monotonía de } t \to \sqrt{t}) \\ &\Leftrightarrow n\sqrt{x(\tau t)} \lesseqgtr m\sqrt{x(t)} && \text{(uso de (8))} \end{aligned}$$

de donde, según Eudoxo, se hubiera deducido la igualdad de las proporciones

$$\tau = \tau/1 \text{ y } \sqrt{x(\tau t)}/\sqrt{x(t)};$$

es decir

$$\tau = \frac{\sqrt{x(\tau t)}}{\sqrt{x(t)}},$$

o bien

$$\tau = \frac{\sqrt{x(\tau t)}}{\sqrt{x(t)}},$$

o bien

$$x(\tau t) = x(t)\tau^2. \tag{13}$$

En 1632, seis años antes de la fecha de publicación de los *Diálogos Acerca de Dos Nuevas Ciencias*, aparece en Florencia otra de las obras capitales del maestro: los *Diálogos Sobre los Sistemas Máximos*. En la «Jornada Segunda» de esta obra, Galileo hace decir a Salviati las siguientes palabras:

«Antes de nada, es necesario considerar cómo el movimiento de los graves descendientes no es uniforme, sino que partiendo del reposo, van acelerándose constantemente; efecto conocido y observado por todos, si se exceptúa al referido autor moderno, el cual, al no hablar de aceleración, lo hace uniforme. Pero este conocimiento general no sirve de ningún provecho, si no se sabe en qué proporción se realiza este aumento de velocidad, conclusión aún desconocida por los filósofos, y hallada y demostrada por primera vez por el Académico nuestro común amigo, el cual, en alguno de sus escritos, aún inéditos, aunque confidencialmente conocidos por mí y por algunos otros amigos suyos, demuestra cómo la aceleración del movimiento en línea recta de los graves se cumple según los números impares *ab* *unitate*, esto es, que señalados cuantos tiempos se quieran iguales, si en el primer tiempo, partiendo el móvil del reposo, pasa un espacio, como, por ejemplo, el de una caña, en el segundo tiempo pasará tres, en el tercero cinco, en el cuarto siete, y así sucesivamente, siguiendo los números impares; *que, en definitiva, es lo mismo que decir que los espacios pasados por el móvil, partiendo del reposo, tienen entre si una proporción duplicada de la que tienen los tiempos en los cuales tales espacios son medidos, es decir, que los espacios pasados son entre sí como los cuadrados de los tiempos*».

Replica entonces Sagredo exclamando «Extraordinaria cosa es esta. Y ¿decís que existe una demostración matemática?», a lo que responde netamente Salviati: «De pura matemática; y no solamente de esta, sino también de muchas otras propiedades referentes a los movimientos naturales y también a los proyectiles...»[16].

El subrayado que he hecho en el fragmento[17] muestra que Galileo conocía bien el hecho de que la ley cuadrática (13) es consecuencia de (3). En realidad, de lo mismo estaba ya convencido Oresme, dejando constancia de ello en su manuscrito *Questiones Super Geometriam Euclidis* de 1347. Finalmente, digamos que el notable parecido de los diagramas y razonamientos empleados por Galileo con los de Oresme ha sido señalado por diversos autores (vg. [6], [7], [1], [27], [8], [26]).

4. Una deducción teórica para la relación (1)

Fijemos ahora nuestra atención en el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{cases} y_{n+1} - y_n = \alpha \\ \dfrac{\sum_{k=n+1}^{2n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k} = \lambda \end{cases}, \ n \in \mathrm{N}. \tag{14}$$

Observamos de inmediato que las constantes α y λ en (14) no pueden ser independientes entre sí. En efecto, para $n = 1$, las ecuaciones de (14) proporcionan $y_2 - y_1 = \alpha$, $y_2/y_1 = \lambda$. Por otra parte, la primera ecuación indica que la solución $\{yn\}$ es una sucesión aritmética y, por tanto

$$y_n = y_1 + \alpha(n-1) \tag{15}$$

para cierta constante arbitraria y_1. Una vez sustituida (15) en la segunda ecuación de (14) y recordando que

$$\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)=n(n-1)/2$$

queda

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\sum_{k=n+1}^{2n}(Y_1+\alpha(k-1))}{\sum_{k=1}^{n}(y_1+\alpha(k-1))}= \\ &= \frac{y_1\sum_{k=n+1}^{2n}1+\alpha\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)}{Y_1\sum_{k=1}^{n}1+\alpha\sum_{k=1}^{n}(k-1)}= \\ &= \frac{y_1n+\alpha(n^2+n(n-1)/2)}{y_1n+\alpha n(n-1)/2}= \\ &= \frac{2y_1+\alpha(3n-1)}{2y_1+\alpha(n-1)}, n\in \mathbf{N},\end{aligned}$$

de donde se deduce

$$(1-\lambda)(2y_1-\alpha)+(3-\lambda)\alpha n\equiv 0. \tag{16}$$

La condición (16) se satisface si y sólo si

$$\left|\begin{array}{l}(1-\lambda)(2y_1-\alpha)=0\\ (3-\lambda)\alpha=0\end{array}\right.$$

es decir, solo cuando $\alpha = 0$, $\lambda = 1$ con y_1 arbitrario, o bien $\alpha = 0$, $y_1 = 0$ con λ arbitrario o, finalmente cuando $\lambda = 3$ y $\alpha = 2y_1$.

En este ultimo caso, de (15) resulta

$$y_n=y_1(2n-1). \tag{17}$$

Según nos informa S. Drake en [9], en una carta enviada a un amigo en 1615, Galileo utiliza las ecuaciones (14) para deducir la relación (1) de principios más básicos. El razonamiento, repetido mucho después por Christian Huygens, es como sigue. Sea T una unidad temporal cualquiera. Si y_n indica el espacio recorrido en el intervalo temporal $[(n-1)T, nT]$ por un móvil que parte del reposo, entonces la primera ecuación en (14) establece que el movimiento es tal que el incremento de los espacios y, por tanto, el de las velocidades es, en cada intervalo, constante. Ello concuerda con la definición que Galileo da para el movimiento uniformemente acelerado en sus *Diálogos*. Por su parte, la segunda ecuación en (14) expresa la idea de que la relación y_2/y_1 independe de la elección de la unidad temporal T y, de hecho, postula que esta misma relación debe mantenerse si las unidades de tiempo $2T$, $3T$, ... se toman en lugar de T.

Del análisis efectuado arriba del sistema (14) y del hecho que las cantidades y_n son crecientes, vemos que las soluciones con $\alpha = 0$ de (14) deben descartarse, mostrándose así la relación (17), de la que (1) es consecuencia inmediata.

Las ideas de raíz Pitagórico-Platónica que Galileo mantuvo en relación a la esencia de las cosas son ampliamente conocidas. En esta línea de interpretación, es posible otra derivación de (1) todavía sustentada por el sistema (14) pero con otra fuente de origen para la primera ecuación. En efecto, mientras que para la segunda relación de (14) mantenemos la misma justificación teórica, apelamos ahora aun principio de sencillez y economía de la naturaleza[18] para justificar la segunda: de entre todas las sucesiones que satisfacen la segunda condición 18 de (14), los sucesivos espacios recorridos y_n obedecen a la ley matemáticamente más simple posible; i.e., aquella que corresponde a las sucesiones aritméticas[19].

5. A manera de conclusión

Sólo los experimentos iniciales de Galileo con planos inclinados, aquellos efectuados entre 1602 y 1604, parecen guardar relación con la ecuación funcional (1). Estos experimentos iniciales, en los que la «medición» del tiempo se realizaba mediante una estrategia musical —como lo es la comparación con el ritmo de un canon o canción del sonido producido por la esferita de bronce al saltar las bandas de cuero dispuestas a lo largo de su recorrido en el plano— proporcionaron una serie de datos que Galileo pudo correlacionar y sirvieron más bien para que Galileo descubriera la ley (1), de donde se deriva la ley cuadrática (2), que para contrastar una ley de caída previamente conocida. La carta de Galileo a P . Sarpi denota ya el pasaje del *contexto de descubrimiento al contexto de explicación*: Galileo escribe acerca de un principio «natural y evidente» que hasta el momento le faltaba para. poner unidad y orden —estructura, en definitiva— a sus hallazgos sobre el «movimiento natural» . Dicho principio, como nos ha sido revelado por S. Drake (véase la sección 2), fue justamente la proporcionalidad de los cuadrados de la velocidad a los espacios recorridos en el movimiento uniformemente acelerado. No obstante ello, en los años posteriores a 1604, Galileo tuvo oportunidad de volver repetidamente a la consideración de sus ideas concernientes a la caída libre y, acomodando estas a la tradición —recuérdese que las ideas de velocidad y aceleración habían sido materia de extensa reflexión para los escolásticos de Oxford y que las conquistas en Cinemática de esta escuela habían sido, a mediados del *Quattrocento*, introducidas tanto en Italia como en Francia— elabora su versión final de la teoría en la forma en que aparece en los *Diálogos*. Como hemos visto, es la ley cuadrática (2) y no la relación (1) lo que es objeto de contrastación experimental en esta versión final. De todos modos puede afirmarse que, en la comprensión inicial del fenómeno de la caída libre —en el momento justo en que las piezas del rompecabezas comienzan a ordenarse y emerge la imagen como un todo, al decir de S. Drake— la «ley de los números impares» desempeñó un rol más fundamental que la ley de los cuadrados de los tiempos y, aún cuando no se han encontrado rastros en los escritos Galileanos de una prueba de que aquella contiene a esta, el fragmento de los *Diálogos Sobre los Sistemas Máximos* citado en la sección 3 muestra que Galileo tenía clara conciencia del hecho. En la misma sección hemos mostrado que los elementos de un prueba de esta implicación no podían escapárseles a Galileo, mientras que en la sección 4 hemos discutido algunos argumentos que, aunque tardíamente considerados por Galileo, proporcionan un soporte teórico para la relación (1).

Agradecimientos: El autor se ha beneficiado de la información que, sobre la cuestión tratada en el presente trabajo, le han proporcionado las siguientes personas e instituciones: Janos Aczél, Carlos Galles, Paola Mannucci, Asociación Cultural «Dante Alighieri» de la ciudad de Rosario. Carlos Galles y Hector Giacomini leyeron una versión preliminar del trabajo contribuyendo con interesantes observaciones. Vaya para todos ellos un agradecido reconocimiento.

NOTAS

1 Todas las citas que hacemos de los «*Diálogos...*» corresponden a la primera traducción española [16]

2 Véase Figura 1.

3 En términos modernos, dicha regla expresa que el espacio recorrido x en el movimiento uniformemente acelerado viene dado por $x=[(V0+Vf)/2]t$, donde $V0$ es la velocidad inicial y Vf la velocidad final del móvil.

4 Parecidamente, en [14], p. 90, C.H. Edwards afirma: «This 'law of odd numbers' for the distances traveled in successive equal intervals of time under constant or uniform acceleration, was important for Galileo's later empirical verification that freely falling bodies (near the surface of the earth) experience constant acceleration.»

5 En comunicación personal, el Prof. Aczél nos ha informado que tanto el material subyacente a la nota histórica de [1] como aquel utilizado previamente en la elaboración del artículo [2], fue aportado por el Prof. Dhombres.

6 El punto de vista expresado en «Todo Cae: El Desarrollo del Concepto de Movimiento desde Aristóteles hasta Galileo», ensayo incluido como apéndice del libro [27], es buen ejemplo de las ideas imperantes entre los historiadores de la Ciencia hasta los trabajos de Drake. Véase también el artículo sobre Galileo en [19].

7 Véase al respecto el Chap. 4 de [12]

8 Véase Fig. 2.

9 Traducción del autor del original italiano contenido en [18], Vol. 10, p. 103-105.

10 Recuérdese que Galileo era hijo de Vincenzio, un conocido músico de la época. Su hermano Michelangelo también era músico de profesión y él mismo era buen intérprete de laúd (véase a este respecto el libro de reciente aparición [25]).

11 Desde luego, existen diversos modos posibles de resolver la ecuación (3) y hemos debido optar por uno de ellos. Una forma alternativa de resolución es la de convertir (3) en una ecuación lineal con coeficientes constantes, reducción esta que puede llevarse a cabo a costa de elevar en una unidad el orden de la ecuación.

12 No queremos caer aquí en anacronismos. Galileo hubiera arribado a (11) y (12) utilizando el álgebra geométrica de Euclides antes que manipulando las ecuaciones algebraicamente: si esto parece demasiado complejo, basta observar los cálculos que Arquímedes lleva adelante en su tratado *De los Conoides y Esferoides* (véase por ejemplo, la Proposición 1 en la traducción inglesa [20] de la obra de Arquímedes) para convencernos de cuánto podía ser alcanzado por este medio. Conviene recordar a este respecto que Galileo conocía los trabajos de Arquímedes y era reconocido admirador suyo.

13 Párrafo extraído de la traducción española [22], p. 29

14 Comparar con la nota 33 de p.231 en [24].

15 Una presentación especialmente clara de la teoría de proporciones de Eudoxo puede encontrarse en p. 12-15 de [14].

16 El párrafo se ha tomado de la traducción de J. M. Revuelta, [17], p. 210-212.

17 El original italiano del subrayado se lee en el Vol. 11 de [18], p. 476: «[...] che in somma é l'istesso che il dire che gli spazii passati dal mobile, partendosi della quiete hanno tra di loro proporzione duplicata di quella, che hanno i tempi, ne' quali tali spazii son misurati; o vogliam dire, che gli spazii passati son tra di loro come i quadrati de' tempi.»

18 En la Jornada Tercera de sus *Diálogos*, Galileo expresa: «*Porque cuando yo observo que una piedra al descender de una altura, partiendo del reposo, adquiere continuamente nuevos incrementos de velocidad, ¿por qué no he de creer que tales aditamentos se efectúan según el modo más simple y más obvio para todos? Porque si observamos con*

atención, ningún aditamento, ningún incremento hallaremos más simple que aquel que se sobreañade siempre del mismo modo.» (fragmento extraído de [16], p. 207).

19 Sobre este punto, recuérdese el orden de exposición con que el tópico de las sucesiones aparece en los textos elementales de Matemática. Dicha ordenación, en la cual el estudio de las sucesiones aritméticas precede a cualquier otro asunto, es de raíz muy antigua.

REFERENCIAS

[1] ACZÉL, J., DHOMBRES, J. (1989) *Functional Equations in Several Variables*. Cambridge, Cambridge Univ. Press.

[2] ACZÉL, J. (Ed.) (1984) *Functional Equations: History, Applications and Theory*. Dordrecht, D. Reidel.

[3] BENDER, C. M., ORZAG, S. A. (1987) *Advanced Mathematical Methods for Scientist and Engineers*. Singapore, McGraw Hill (3rd. printing).

[4] BUSSEY, W. H. (1917) «The origin of mathematical induction». *Amer. Math. Monthly, 24*,199-207.

[5] CAJORI, F. (1991) *A History of Mathematics*. 5th. revised ed., New York, Chelsea.

[6] CLAGETT, M., (1959) *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. University of Winconsin Press.

[7] CLAGETT, M., (1968) *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. University of Winconsin Press.

[8] CROMBIE, A. C. (1985) *Historia de la Ciencia: de San Agustín a Galileo, 2. La Ciencia en la Baja Edad Media y comienzos de la Edad Moderna: siglos XIII al XVII*. Madrid, Alianza.

[9] DRAKE, S. (1973) «Galileo's discovery of the law of free fall». *Scientific American, 228*, 84-92.

[10] DRAKE, S. (1975) «Galileo's discovery of the parabolic trajectory». *Scientific American, 228*, 102-110.

[11] DRAKE, S. (1975) «The role of music in Galileo's experiments». *Scientific American, 232*, 98-104.

[12] DRAKE, S. (1978) *Galileo at Work: His Scientific Biography*. Chicago and London, The University of Chicago Press.

[13] DUGAS, R. (1950) *Histoire de la Mécanique*. Paris, Neuchatel, Dunod-Éditions du Griffon

[14] EDWARDS, Jr., C. H. (1979) *The Historical Development of the Calculus*. New York, Springer.

[15] ELAYDI, S. N. (1995) *An Introduction to Difference Equations*. New York, Springer.

[16] GALILEI, G. (1945) *Diálogos Acerca de Dos Nuevas Ciencias*. Ed. anotada por T. Isnardi y traducida por J. San Román Villasante. Buenos Aires, Librería del Colegio.

[17] GALILEI, G. (1975) *Diálogos Sobre los Sistemas Máximos, Jornada Segunda*. Trad. del Italiano por J. M. Revuelta. Madrid, Aguilar.

[18] GALILEI, G. (1808) *Opere di Galileo Galilei*. Societá Tipografica De' Classici Italiani, Milano (en la biblioteca de la Asociación Cultural «Dante Alighieri» de la ciudad de Rosario, Argentina).
[19] GILLISPIE, CH. C. (1970) *Dictionary of Scientific Biography*. New York, Ch. Scribner's Sons.
[20] HEATH, T. L. (Ed.) (1960) *The Works ofArchimedes*. New York, Dover.
[21] KUHN, T. S. (1982) *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. México, Fondo de Cultura Económica.
[22] LEONARDO DE PISA (1973) *El Libro de los Números Cuadrados*. Trad. de la versión francesa de P. Ver EEcke por P. S. Nogues Acuña. Buenos Aires, EUDEBA.
[23] LEVY, H., LESSMAN, F. (1992) *Finite Difference Equations*. New York, Dover.
[24] MAHONEY, M. S. (1973) *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*. Princeton University Press.
[25] SOBEL, D. (1999) *La Figlia di Galileo*. Milano, Rizzoli.
[26] TATON, R. (Dir.) (1958) *Histoire Générale des Sciences, Tome II, La Science Moderne*. Paris, Presses Univ. de France.
[27] WARTOFSKY, M. W. (1981) *Introducción a la Filosofía de la Ciencia*. Madrid, Alianza.