ANALITICIDAD, EQUIPOLENCIA Y TEORÍA DE CURVAS EN LEIBNIZ*

Eberhard Knobloch
Technische Universität Berlin (Alemania)

Resumen

Antes y después de la invención del cálculo diferencial, Leibniz utilizó ampliamente las nociones de analiticidad y equivalencia de líneas y figuras. Estas dos nociones representaron un papel esencial en sus matemáticas y en su comprensión de la geometricidad. Mi artículo está dividido en cuatro secciones. La primera estudia el significado de análisis y analiticidad, así como su relación con la geometricidad, que depende de la cuestión de la exactitud. Exactitud implica geometricidad; análisis significa cálculo, mientras analiticidad significa calculabilidad. Las dos partes de la geometría corresponden a dos tipos diferentes de análisis, uno de los cuales es el nuevo, cierto y general análisis de Leibniz. La segunda sección trata la noción de equivalencia de curvas, introducida por Leibniz en 1675. Ella le permitió identificar las curvas con polígonos de infinitos lados infinitamente pequeños. El principio de equivalencia se convierte en el principio fundamental de su geometría infinitesimal y también de su cálculo diferencial. Está basado en la noción de cuadratura. La tercera sección examina cómo la clasifición de curvas de Leibniz cambia con el tiempo. A causa de la perfección del análisis, las curvas no geométricas son eventualmente consideradas ya como no existentes. La sección final resume la teoría de curvas analíticas simples de Leibniz.

Abstract

Before and after the invention of his differential calculus, Leibniz used widely the notions of analyticity and of equivalence of lines and figures. These two notions played an essential role in his mathematics and in his understanding of geometricity. My paper is divided into four sections. The first section studies the meaning of analysis and analyticity, as well as their relation to geometricity, which depends on the question of exactness. Exactness implies geometricity; analysis means calculus, whereas analyticity means calculability. The two parts of

* Versión española de Mary Sol de Mora Charles. La versión francesa de este artículo será publicada en la serie *Archimedes* por Springer, presumiblemente en 2014.

geometry correspond to two different types of analysis, one of them being Leibniz's new, certain, and general analysis. The second section deals with the notion of equivalence of curves, introduced by Leibniz in 1675. That enabled him to identify curves with polygons of infinitely many, infinitely small sides. The equivalence principle becomes the fundamental principle of his infinitesimal geometry and of his differential calculus, too. It is based on the notion of quadrature. The third section elaborates how Leibniz's classification of curves changes over time. On account of the perfection of analysis, non-geometrical curves are eventually judged as no longer existing. The final section summarizes Leibniz's theory of simple, analytical curves.

Palabras clave: Análisis matemático, Cálculo diferencial, Geometría, Matemáticas, Siglos XVII-XVIII, Leibniz.

Keywords: Mathematical Analysis, Differential Calculus, Geometry, Mathematics, 17^{th}-18^{th} Centuries, Leibniz.

Recibido el 26 de agosto de 2013 – Aceptado el 6 de septiembre de 2013

Introducción

En 1890 se creó la Asociación Alemana de Matemáticos. Más tarde, se realizó para la misma una medalla sobre la que se grabó la siguiente inscripción latina:

Figura 1: *Artem geometriae discere atque exercere publice interest*
«Es de interés público aprender y ejercer el arte de la geometría»
[Knobloch, 2001, p. 34]

¿Quién lo contradiría? Seguramente nadie. ¿Pero dónde tiene su origen esta inscripción? Se encuentra en el *codex Iustinianus* del derecho romano, en el capítulo 18 del Libro 9, titulado *De maleficis et mathematicis et ceteris similibus* («Sobre los malhechores, los matemáticos y otros semejantes»). Es sorprendente, sobre todo si se lee el texto que sigue: «Es peor matar a un hombre con veneno que hacerle morir por la espada». Después del cual se encuentra la cita mencionada más arriba, que continua así: *Ars autem mathematica damnabilis interdicta est* («Pero el arte matemática condenable está prohibida») (!)

Para comprender esta prohibición hay que recordar que el Arte Matemática era entonces la astrología, que fue prohibida por el emperador romano Diocleciano en 294 [FÖGEN 1997, pp. 13 y 260]. Así pues, el Arte Matemática y la Geometría son dos cosas completamente diferentes. La importancia de la geometría, como lo señala nuestra cita, es, por su parte, indiscutible. ¿Pero cómo delimitar la geometría? René Descartes trató de dar una respuesta a esta cuestión: «no sabría decir nada mejor que todos los puntos de las [curvas] que se pueden llamar geométricas, es decir que caen bajo alguna medida precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta, que puede ser expresada por una ecuación»[1]. La certeza y la exactitud desempeñan aquí el papel crucial. La mención cartesiana referente a la exactitud estaba ligada al «análisis filosófico de la intuición geométrica» [BOS, 2001, p. 411]. Veremos cómo influyó sobre Leibniz este punto de vista. Para ello, me gustaría discutir los cuatro aspectos siguientes: la relación entre analiticidad y geometría, la equipolencia, la clasificación de las curvas y la teoría de las curvas analíticas.

1. ANALITICIDAD Y GEOMETRÍA

Nuestra primera cuestión será qué quieren decir analítico y analiticidad para Leibniz. ¿Cuál es la relación entre estas nociones y la de Geometría? Para ser capaces de responder a esta cuestión necesitamos estudiar el uso del epíteto «analítico» y del sustantivo «análisis», y ello en orden cronológico. Efectivamente, se observa que Leibniz cambia el significado de su terminología con el paso del tiempo. De conformidad con ello, estableceremos cinco resultados esenciales.

Para comenzar, consideraremos una primera tabla de nociones que son llamadas «analíticas» por Leibniz: *figura analytica* (figura analítica, Enero 1675) [AA VII, 5, 202], *campus analyticus novae geometriae* (campo analítico de la nueva geometría) [AA VII, 5, 193], *curva analytica* (curva analítica, 1675-76) [LEIBNIZ, 1993, p. 49; 2004, pp. 116ss.], *calculus analyticus exactus* (cálculo analítico exacto) [LEIBNIZ, 1993, p. 50 (2004, pp. 116-117, 12); 1993, p. 79 (2004, pp. 218ss.); 1686, p. 231 (1989, p. 138); 1714, p. 394], *expressio arithmetica sive analytica* (expresión aritmética o analítica) [LEIBNIZ, 1993, pp. 56, 79 (2004, pp. 138ss., 216-217, 219)], *methodus certa et analytica* (método cierto y analítico) [LEIBNIZ, 1993, p. 107 (2004, pp. 300ss.)], *relatio* *analytica* (*vera, generalis*) (relación analítica (verdadera, general)) [Leibniz, 1993, p. 79 (2004, pp. 217-219)], *aequatio analytica* (ecuación analítica) [Leibniz, 1682, p. 119 (1989, p. 75)], *quadratura analytica* (cuadratura analítica) [Leibniz, 1682, p. 119 (1989, p. 74)].

Analicemos paso a paso estas nociones y en primer lugar la de figura analítica. En el mes de enero de 1675, Leibniz escribe su estudio *De figuris analyticis figurae analyticae quadratricis capacibus* (Sobre las figuras analíticas que dan lugar a una figura analítica cuadratriz). En este trabajo da la siguiente definición: «Llamo figuras analíticas a aquellas en las cuales la relación entre la ordenada y la abscisa se puede explicar mediante una ecuación» (*Figuras analyticas appello, in quibus relatio ordinatae ad abscissam aequatione explicari potest*) [AA VII, 5, 202]. Se observa que aquí las «figuras» son curvas y no áreas delimitadas por curvas. Leibniz no dice expresamente ecuación «algebraica», pero es a eso a lo que se refiere. Menciona a Descartes, diciendo que, contrariamente a él, prefiere llamar a esas figuras «analíticas» más bien que «geométricas». En otras palabras, Leibniz sustituye la noción de geométrico, no por la noción de algebraico [Bos, 2001, p. 336], sino por la de «analítico». De hecho, su definición nos recuerda la definición cartesiana de una curva geométrica [Descartes, 1659-61, p. 21]. Descartes había dicho que se trata de las curvas que tienen «necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta, que puede expresarse mediante alguna ecuación», y en su traducción latina resultaba: *relationem habeant, quae per aequationem aliquam (…) exprimi possit*. Leibniz ha sustituido simplemente *exprimere* por *explicare.*

En su tratado sobre la *Cuadratura Aritmética* (1675-1676), Leibniz es más preciso: «Llamo curva analítica a aquella cuyos puntos pueden ser todos hallados mediante un cálculo exacto» (*Curvam analyticam voco cujus puncta omnia calculo exacto possunt inveniri)* [Leibniz, 1993, p. 49 (2004, pp. 116sq.)]. Consecuentemente, tiene que explicar la expresión «cálculo analítico exacto». El problema aquí simplemente se ha desplazado. Desde el principio del tratado, está claro que la noción de algebraico ya no coincide con la noción de analítico, que tiene mucha mayor extensión y que comprende la algebraicidad como un caso particular. Leibniz define: «Pero se llama exacto a ese cálculo analítico cuando la cantidad buscada puede hallarse a partir de los datos con la ayuda de una ecuación que tiene por incógnita la cantidad buscada (*Calculus autem analyticus exactus ille vocatur, cum quantitas quaesita ex datis inveniri potest ope aequationis, in qua ipsa quantitas quaesita incognitae locum obtinet*). Ha sustituido la noción de ecuación ofrecida en la definición del mes de enero de 1675, por la noción de cálculo analítico exacto. La ecuación que figura en la definición de esta nueva noción puede ser una ecuación infinita o una serie infinita. En otras palabras, Leibniz generaliza la noción de ecuación, cuyo grado puede (ahora) ser finito o infinito, e introduce una noción que es más general que la de algebraica y la engloba. Este procedimiento le resulta mucho más fácil de llevar a cabo porque no había utilizado antes expresamente el epíteto de «algebraica». Obtenemos así un primer resultado esencial:

I. La analiticidad coincide con la calculabilidad

Este resultado resulta aún más evidente cuando se estudia el artículo *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa* («De la verdadera proporción entre un círculo y el cuadrado circunscrito expresada en números racionales»), que apareció en 1682. En él Leibniz sustituye la palabra *relatio* de su tratado de la Cuadratura aritmética, por *proportio*, y da en esta forma una clasificación de las cuadraturas analíticas [LEIBNIZ, 1682, p. 120][2]:

Cuadratura analítica
es decir, resultante de un cálculo analítico exacto

transcendente	algebraica	aritmética
$xx + x = 30$	por medio de raíces de ecuaciones comunes	expresa el valor exacto por medio de series (infinitas)

La noción de exactitud desempeña aquí de nuevo el papel crucial. La exactitud no se realiza solamente mediante un cálculo algebraico exacto, sino también por otros dos tipos de ecuaciones: las ecuaciones transcendentes y las ecuaciones infinitas. De hecho, Leibniz distingue así entre tres tipos de cuadraturas analíticas y entre tres tipos de ecuaciones. Reconocemos uno de los procedimientos leibnizianos de utilización de una noción (por ejemplo la de analiticidad o la de ecuación), y obtenemos el segundo resultado esencial:

II. Leibniz conserva una noción pero cambia su sentido[3]

Después de haber clarificado la significación de analiticidad según Leibniz, podemos ampliar la primera tabla de las nociones que tienen como epíteto «analítica». Sin pretender ser exhaustivos, he aquí algunos ejemplos: *subsidium analyticum* (recurso analítico) [LEIBNIZ, 1684a, p. 123 (1989, p. 88)], *valor analyticus* (valor analítico) [LEIBNIZ, 1694b, p. 317 (1989, p. 304)], *ars analytica* (arte analítico)[4], *canon analyticus* (regla analítica) [LEIBNIZ, 1700, p. 349 (1989, p. 382)], *res analytica* (tema analítico) [LEIBNIZ, 1700, p. 348 (1989, p. 379)].

Nuestra segunda tabla concierne al empleo leibniziano del sustantivo *analysis* (análisis), de nuevo en un orden cronológico: *analysis indivisibilium atque infinitorum* (análisis de los indivisibles y de los infinitos) [LEIBNIZ, 1686, p. 230; 1989, p. 137]; este análisis adopta también el nombre de *calculus differentialis* (cálculo diferencial), *calculus indefinite parvorum* (cálculo de los indefinidamente pequeños) o *algebrae supplementum pro transcendentibus* (suplemento del álgebra para los transcendentes) [LEIBNIZ, 1686, pp. 232s. (1989, p. 141)]. Se llega así a un tercer resultado esencial:

III. Para Leibniz, el análisis es un cálculo, del mismo modo que la analiticidad no es otra cosa que la calculabilidad

Por lo tanto, aparecerán también expresiones como *analysis infinitorum* (análisis de los infinitos) [Leibniz, 1689, p. 242; 1691, p. 244 (1989, p. 192)], *analysis seu ars inveniendi* (análisis o arte de inventar) [Leibniz, 1691, p. 243 (1989, p. 192)], análisis de los transcendentes [Leibniz, 1692c, p. 258 sq.]. En su título de [Leibniz, 1694], habla de un nuevo cálculo de los transcendentes y en el contenido del artículo utiliza la expresión 'análisis de los transcendentes' [Leibniz, 1694, p. 308]. De una manera semejante, Leibniz identifica el nuevo cálculo con el análisis de los infinitos [Leibniz, 1692, p. 259] o habla de un *analysis infinitesimalium* (análisis de los infinitesimales) [Leibniz, 1713, p. 412].

A ésta podemos añadir otra serie de términos en los que la noción de análisis está caracterizada por un epíteto: *analysis tetragonistica* (análisis tetragonístico, 1675) [AA VII, 5, n. 38, 40, 44, 79], *analysis transcendens* (análisis transcendente, 1675-76) [Leibniz, 1993, p. 55 (2004, p. 138 sq.); 1703, p. 362], *analysis pura* (análisis puro) [Leibniz, 1993, p. 56 (2004, p. 138 sq.)], *analysis mea* (mi análisis) [Leibniz, 1993, p. 107 (2004, pp. 298 y 301)], *analysis perfecta* (análisis perfecto) [Leibniz, 1684a, p. 123 (1989, p. 88)]. Leibniz da la siguiente definición [Leibniz, 1684a, p. 123 (1989, p. 88)]: «El signo de un análisis perfecto es el hecho de que un problema pueda resolverse o que pueda ser demostrada su imposibilidad» (*Signum est perfectae analyseos, quando aut solvi problema potest, aut ostendi ejus impossibilitas*). Esta observación nos recuerda evidentemente la famosa frase de Viète: «Finalmente, el arte analítico se adjudica con justicia el más magnífico de los problemas, a saber, el de no dejar ningún problema sin resolver»[5]. La observación de Leibniz nos revela al mismo tiempo una de las características del proceder leibniziano y de ese modo, un cuarto resultado esencial:

IV. La idea de perfeccionamiento no caracteriza solamente la filosofía leibniziana de la historia, sino también sus matemáticas

El panorama esbozado más arriba se puede ampliar ahora con las expresiones siguientes: *analysis certa et generalis* (análisis cierto y general) [Leibniz, 1686, p. 230 (1989, p. 136)], *analysis interior quaedam* (un cierto análisis más profundo) [Leibniz, 1689b, p. 236 (1989, p. 165)], *analysis nova* (análisis nuevo) [Leibniz, 1691, p. 247 (1989, p. 199); 1692b, p. 269 (1989, p. 220); 1714, p. 395]. Así se dibuja un quinto resultado esencial que nos recuerda los criterios cartesianos:

V. Leibniz pone de relieve la certeza y la generalidad de su nuevo análisis

Existen todavía otros epítetos que nos dan informaciones muy importantes sobre el análisis y nos permiten comprender la clasificación leibniziana. Así en 1693, Leibniz declara: «el análisis que corresponde a la geometría de los transcendentes (…) es la ciencia del infinito»[6]; también habla del «análisis ordinario (…) imperfecto» (*analyse ordinaire (…) imparfaite*) [Leibniz, 1694a, p. 307], del «análisis ordinario o algebraico» (*analysis ordinaria seu algebraica*) [Leibniz, 1694b, p. 317 (1989, p. 304)], del «análisis infinitesimal (…) algebraico» (*analysis infinitesimalis (…) algebraica*) [Leibniz, 1702, p. 352 (1989, p. 389)], o de «un nuevo género de análisis matemático conocido con el nombre de cálculo diferencial» (*novum analyseos mathematicae genus, calculi differentialis nomine notum*) [Leibniz, 1714, 392].

Se puede ilustrar la clasificación leibniziana de la manera siguiente:

Geometría

Geometría de determinación	Geometría de las medidas Geometría transcendente
Álgebra	Complemento del álgebra Recurso analítico Suplemento del álgebra para los transcendentes

Análisis

Así pues la geometría consta de dos partes, que son ambas estudiadas con la ayuda de las dos partes del análisis. De ese modo, toda la geometría está sometida al cálculo o al análisis.

La cicloide puede servir de modelo para ilustrar la manera en que ha cambiado, con el transcurso del tiempo, la posición leibniziana respecto a la relación entre analiticidad y geometricidad. En el mes de enero de 1675, constata: «Prefiero llamar figuras analíticas a aquellas que otros, siguiendo a Descartes, llaman geométricas. Pues no veo lo que podría impedir llamar geométrica a la cicloide, dado que puede trazarse exactamente mediante un único movimiento continuo y además muy simple (…). Pero me opongo a que sea analítica, porque la relación entre las ordenadas y las abscisas no puede explicarse mediante ninguna ecuación»[7]. Esto significa que en 1675 Leibniz justifica por qué reemplaza el epíteto «geométrico» por «analítico». Según el criterio cartesiano del año 1637 respecto a la geometricidad, una curva es geométrica si puede ser trazada exactamente mediante un solo movimiento continuo. En su *Géométrie*, Descartes admite incluso varios de esos movimientos, sucesivos [Bos, 2001, p. 353]. Por consiguiente, la cicloide debería ser llamada geométrica (sin ser analítica). En esa época, el análisis es todavía insuficiente. Además, existen aún curvas que escapan a la geometricidad. La invención del cálculo leibniziano perfeccionará el análisis y convertirá en falsa la segunda constatación. ¿Pero cómo se puede llevar a cabo o garantizar la exactitud del cálculo? Leibniz todavía no da una respuesta a esta cuestión.

De hecho, en 1686, Leibniz repite primero esta argumentación: «Es necesario que sean admitidas igualmente en geometría las únicas líneas mediante las cuales [los problemas] pueden ser construidos. Y puesto que pueden ser trazadas con exactitud mediante un movimiento continuo, como evidentemente la cicloide y otra líneas semejantes, hay que considerarlas de hecho (...) geométricas»[8]. Pero a continuación, este texto muestra su diferencia respecto al texto de enero de 1675: «Si y es la ordenada de una cicloide, $y = \sqrt{2x - xx} + \int dx : \sqrt{2x - xx}$, ecuación que expresa perfectamente la relación entre la ordenada y y la abscisa x.... Así, el cálculo analítico se extiende a estas líneas que hasta ahora se habían descartado, por la única razón de que se las creía incapaces de ello»[9]. Leibniz no menciona –quizá no lo sabe– que la integral no se puede calcular. Le basta con la expresión. De todos modos, la exactitud desempeña el papel crucial en la determinación de la geometricidad. Finalmente, las dos nociones llegan a ser equivalentes para Leibniz. En 1693, critica a aquellos que miden la geometricidad solamente mediante ecuaciones algebraicas de un cierto grado: «mientras que es geométrico más bien lo que puede ser construido con exactitud por un movimiento continuo» (*cum geometricum potius sit, quicquid motu continuo exacte construi potest*) [LEIBNIZ, 1693, 290]. En otras palabras, la construcción exacta acarrea la geometricidad. No se trata de la exactitud geométrica: es la exactitud la que constituye la geometricidad. Un año después, Leibniz escribe: «Constato que todo lo que es exacto, es geométrico, pero es mecánico lo que es efectuado por aproximación.»[10].

En 1695, defiende su nueva definición de la igualdad: dos cantidades son iguales cuando su diferencia es más pequeña que cualquier cantidad dada. Basta, dice, con que una definición tal sea inteligible y útil para la invención, «porque lo que se puede hallar mediante otro método (en apariencia) más riguroso, se sigue siempre necesariamente de este método de una manera no menos precisa.»[11]. Así pues, Leibniz evidencia la exactitud del resultado por medio de un método al menos igualmente riguroso que cualquier otro método. En 1714, resume así su posición: «Por medio del nuevo cálculo, todo lo que es geometría está en lo sucesivo sometida en toda su extensión al cálculo analítico» (*Novo calculo jam tota quanta est geometria calculo analytico subjecta est*) [LEIBNIZ, 1714, p. 394]. Gracias a su cálculo, geometricidad y analiticidad han pasado a ser equivalentes.

2. EQUIPOLENCIA

En su tratado sobre la Cuadratura aritmética, Leibniz introduce la nueva relación operatoria de equipolencia[12] que desempeña un papel crucial en su cálculo diferencial. En su origen, se trataba de una relación entre una línea recta y una línea curva. De hecho, tendríamos que comenzar nuestras consideraciones por Kepler y su *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Estereométria nueva de los toneles de vino). Allí utilizaba la expresión que Leibniz utiliza igualmente en un primer momento: *aequiparare*. Kepler inscribe en un círculo un polígono de un número cualquiera de lados. La recta DB es un lado de ese polígono y también una cuerda del arco DB. El arco EB es la mitad del arco DB.

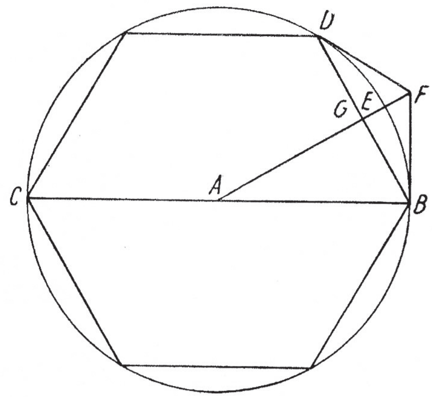

Figura 2: Johannes Kepler, *Nova stereometria* (Linz, 1615)
[KEPLER, 1960, vol. IX, p. 13]

Kepler continúa: «Pero es lícito razonar acerca de EB como acerca de una línea recta, porque la fuerza de la demostración corta el círculo en arcos mínimos que son equiparados (*aequiparantur*) con líneas rectas»[13].

La expresión *aequiparantur* es crucial. Kepler no dice «el arco más pequeño es igual a una línea recta», sino que hay una acción, la identificación del arco con una línea recta. Para justificar esta identificación, Kepler se apoya en la fuerza de la demostración. Paul Guldin rechazó esta referencia porque, decía, ninguna fuerza de la demostración es capaz de producir tal resultado, añadiendo con razón que no hay ningún arco mínimo; hay un arco que siempre es más pequeño que un segmento dado aparentemente mínimo [GULDIN, 1635-41, vol. IV, p. 323]. La noción de mínimo no estaba bien definida ni era definible. Leibniz ha estudiado la obra de Guldin *Sur le centre de gravité*: muchas alusiones en sus escritos matemáticos lo indican [AA VII, 4, 106, 107, 160, 162, 231, 272, 340, 594]. También se refiere a este matemático suizo en los meses de marzo o abril del año 1673, estudiando los teoremas de Guldin pero sin mencionarle: Allí se ocupa entre otras cosas del centro de gravedad de un hemisferio [AA VII, 4, n. 5]. Resume sus observaciones diciendo: «Pero este método se refuta así: las curvas deben ser identificadas aquí con polígonos de una infinidad de lados»[14].

Leibniz retoma la expresión de Kepler. Unos dos años más tarde, la idea kepleriana se convierte en la condición decisiva de sus matemáticas infinitesimales. En el otoño del año 1675, escribe en su *Cuadratura aritmética* : «Pero ellos (los lectores) van a experimentar la extensión del campo abierto a la invención en cuanto hayan comprendido bien que toda figura curvilínea no es otra cosa que un polígono con una infinidad de lados de longitudes infinitamente pequeñas»[15]. En ese momento, Leibniz ya no utilizaba la noción de mínimo que había empleado en 1673, sino la noción de «infinitamente pequeño», bien definida como «más pequeño que cualquier cantidad dada». La expresión figura curvilínea designa aquí una curva y no un área. Se podría hablar del axioma de linearización que no está demostrado sino justificado por el teorema 6 del tratado: en él Leibniz demuestra cuidadosamente que la diferencia entre ciertos espacios rectilíneos, gradiformes y poligonales y ciertas curvas, se puede hacer más pequeña que cualquier cantidad dada, es decir, «infinitamente pequeña».

En el mes de mayo de 1684, menciona un principio general en su artículo *De dimensionibus inveniendis* (De la manera de hallar las medidas (de las figuras) [LEIBNIZ, 1684a, p. 126]): «Sin embargo siento que este método y todos los demás que hasta ahora se han empleado pueden deducirse de mi principio general para la medida de las curvas, a saber que hay que considerar una figura curvilínea como equipolente a un polígono con una infinidad de lados»[16]. Su primera publicación del cálculo diferencial, es decir su artículo *Nova methodus* (Nuevo método), que apareció en el mes de octubre de 1684, se apoya sobre este principio: «También es claro que nuestro método se extiende hasta las líneas transcendentes... siempre que uno se atenga solamente a esto, que hallar la tangente consiste en trazar una recta... o el lado prolongado de un polígono infinitángulo, que en mi opinión equivale a una curva»[17]. El término «equivale» tiene aquí un sentido riguroso. (Parmentier en [LEIBNIZ, 1989, p. 111 nota 59]): Dos cantidades son equivalentes si su diferencia es infinitamente pequeña.

Hasta aquí Leibniz ha comparado una curva con un polígono infinitángulo utilizando las expresiones *nihil aliud esse quam* (no ser otra cosa que), *aequipollere* (ser equipolente), *equivalere* (equivaler). Pero también comparaba directamente dos curvas llamándolas «equipolentes» bajo ciertas condiciones. En su tratado de *Cuadratura aritmética*, escribe: «Para mí ha sido realmente muy feliz descubrir que el teorema enunciado en esta proposición 7 da una curva racional de una expresión muy simple y equipolente al círculo; de donde ha nacido la cuadratura aritmética del círculo y la verdadera expresión análitica del arco a partir de su tangente, gracias a la cual hemos compuesto estas cosas. En consecuencia, llevando más lejos la investigación, he encontrado un método muy general y bello que había buscado largo tiempo, con ayuda del cual se puede mostrar una curva analítica racional equipolente a cualquier curva analítica dada, una vez reducida la cosa al puro análisis»[18].

La séptima proposición es el teorema llamado «de transmutación». Describe cómo se puede construir, a partir de una curva dada, una segunda curva, de manera que el espacio delimitado por el eje de las abscisas, la segunda curva y las dos ordenadas extremas, sea el doble del espacio que delimitan la primera curva y las dos rectas que unen sus extremos al centro del ángulo recto que se ha fijado. En términos actuales, se trata de una integración parcial. La parte final del texto pone de relieve el aspecto analítico: puro análisis quiere decir que no se tiene necesidad ni de la intuición ni de una figura. Leibniz no explica expresamente la relación de equipolencia entre diferentes curvas, que constituye el fundamento para la medida de las áreas, puesto que puede intervenir entre figuras rectilíneas y figuras curvilíneas. Pero la séptima proposición citada no deja ninguna duda: dos curvas son equipolentes cuando definen áreas iguales o cuando tienen la misma cuadratura salvo un factor multiplicador (Parmentier en [LEIBNIZ, 1989, pp. 20 y 39]). En el caso del teorema de transmutación, es el factor dos. El círculo $y^2 = 2ax - x^2$ y la *versiera* de Agnesi $x = \frac{2az^2}{a^2 + z^2}$, pueden servir de ejemplo. Las ordenadas de la *versiera* son conmensurables con sus abscisas (Leibniz a La Roque, fin de 1675 [AA III, 1, 346]). Por esta razón, Leibniz la llama «analítica racional». En la sección siguiente volveremos sobre la clasificación de las curvas.

Así pues, constatamos que la equipolencia de las curvas se sustenta sobre la noción de cuadratura y por consiguiente sobre la sexta proposición de la *Cuadratura aritmética*. Esta proposición es el teorema fundamental de la teoría leibniziana de la integración (que en el fondo es la teoría de la integral de Riemann). Leibniz repite una vez más su resultado más tarde, en su Cuadratura aritmética: «Pues he descubierto un método por el cual el círculo, así como cualquier otra figura, pueden ser transformadas en una figura racional equipolente y expresadas por sumas racionales infinitas... Hemos descubierto una vía por la cual todas las figuras con cualquier ecuación pueden reducirse a figuras racionales equipolentes»[19].

Leibniz retoma una vez más esta idea crucial en su artículo *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* («De la geometría recóndita y del análisis de los indivisibles y de los infinitos», publicado en 1686): «pues en este caso preciso la mayoría se equivocaron y se cerraron el camino ulteriormente, porque no respetaban la universalidad de los indivisibles del tipo *dx*, (pues evidentemente, sería posible elegir cualquier progresión de *x*), no obstante es de este modo como aparecen innumerables transfiguraciones y equipotencias en las figuras»[20].

Podemos resumirlo así: en primer lugar, Leibniz estipula que una curva puede ser identificada con un polígono infinitángulo, utilizando el gerundio *aequiparanda* [AA VII, 4, 63], *censenda* [LEIBNIZ, 1684a, p. 126]. Este principio [LEIBNIZ, 1684a, p. 126] no lo justifica en sus artículos publicados, sino en su tratado de la Cuadratura aritmética (teorema 6), que escribió en 1675-76 sin publicarlo durante su vida. La relación de equipolencia entre dos curvas se sustenta entonces sobre sus cuadraturas; es más general que la equipolencia de un polígono y de una curva: esta igualdad está garantizada salvo un factor multiplicador. Leibniz crea incluso el sustantivo *aequipotentia* (equipolencia) de dos figuras (áreas) [LEIBNIZ, 1686, p. 233 (1989, p. 141s.)].

3. CLASIFICACIÓN DE LAS CURVAS

En la primera parte veíamos que en el mes de enero de 1675, Leibniz sustituye la noción de «geométrica» por la de «analítica». En el mes de diciembre de 1674 había hecho la misma cosa con sus contrarios lógicos, sustituyendo *non geometrica* por *non analytica* [AA, VII, 5, 139]. En esta época, dada su primera noción de analítica, todavía consideraba curvas no analíticas. Apoyándose en esa primera noción explica: «De aquí se puede demostrar fácilmente que el círculo y la hipérbola no tienen cuadratriz analítica, porque es imposible que la cuadratriz de los antiguos y la línea logarítmica sean analíticas»[21]. Es en el transcurso del año 1675 cuando cambia su noción de analiticidad y elabora una clasificación de las curvas analíticas en un sentido más amplio. En su estudio *De tangentibus et speciatim figurarum simplicium* («De las tangentes y particularmente de las curvas simples») escrito entre los meses de febrero y junio de 1676, define: «Llamo simple a una figura si la naturaleza de la curva puede representarse mediante una ecuación con dos términos»[22].

Los ejemplos que propone muestran que Leibniz clasifica las curvas analíticas sin decirlo expresamente. La más simple de todas las curvas (analíticas) simples es la línea recta $y = x$, la segunda en simplicidad es la parábola $ax = y^2$. En general, se trata de los paraboloides $a^z x^v = y^{z+v}$ y de los hiperboloides $a^{z+v} = x^z y^v$. En su *Cuadratura aritmética*, Leibniz precisa: «Llamo curva analítica simple aquella en la cual la relación entre las ordenadas y las porciones de cualquier parte del eje de las abscisas, puede explicarse mediante una ecuación con solo dos términos»[23]. Esta familia de curvas se puede describir mediante la ecuación moderna:

$$v^m = py^n \qquad \text{con } m, n \text{ números enteros}$$

Así, Leibniz rompe la unidad de las cónicas, y la parábola y la hipérbola se encuentran en una categoría diferente de la del círculo y la elipse. (Parmentier en [LEIBNIZ, 2004, p. 131, nota 3]).

Leibniz continúa con esta clasificación. En su estudio *De tangentibus et speciatim figurarum simplicium*, explica: Una curva racional es aquella en la que cualquiera de sus directrices se puede suponer tal que, dadas las abscisas y parámetros en números racionales, también las ordenadas normales se pueden tener en esos números. Ese es el caso cuando el valor de la ordenada se puede obtener sin ninguna extracción de raíces (...) Tales son todas las curvas en las que las ordenadas están en razón, multiplicada o inversamente multiplicada, directa o recíproca de las abscisas»[24]. Leibniz ofrece los ejemplos siguientes [AA VII, 5, 473ss.]:

$$p^v x^{z-v} = y^z$$

$$x = \frac{ay^2}{a^2 + y^2}, \text{ donde } y \text{ es la abscisa}$$

En su *Cuadratura aritmética*, Leibniz repite: «Una curva analítica es racional cuando se puede elegir su eje de forma que, supuesto que son racionales la abscisa y los parámetros, la ordenada sea racional»[25]. Los ejemplos leibnizianos son la parábola y la hipérbola. Los ejemplos contrarios son el círculo y la elipse. Leibniz menciona expresamente que no existen en toda la naturaleza más que dos líneas que posean ordenadas racionales a la vez según sus dos ejes conjugados, a saber, la recta y la hipérbola o figura de la hipérbola [LEIBNIZ, 1993, p. 55 (2004, p. 136ss.)]. Esta terminología demuestra de nuevo que Leibniz no distingue estrictamente entre las nociones de línea, de curva y de figura.

Esa es la razón por la cual (exceptuando la línea recta) la más simple desde el punto de vista de su expresión analítica es la línea hiperbólica, siendo la línea circular la más simple desde el punto de vista de la construcción. Eso quiere decir que Leibniz recurre a dos tipos de simplicidad, el de la expresión (tipo algebraico) y el de la construcción (tipo geométrico). Esta clasificación la repite para las curvas transcendentes (véase más abajo). En efecto hay que añadir que existen curvas simples que no son racionales, como $y = \sqrt{v}$ y curvas no simples que son racionales, como $y = px^2 + x$. El círculo y la elipse no son ni simples (eso ya lo sabemos) ni racionales, porque es imposible elegir ningún eje que haga racionales a las ordenadas. En cambio, las figuras racionales permiten más fácilmente una cuadratura exacta o en su defecto aritmética, es decir, contenida en una serie infinita de números racionales (LEIBNIZ, 1993, p. 55 (2004, p. 138ss.)]. Todo hiperboloide racional constituye una cuadratriz del hiperboloide de grado superior. Todo paraboloide racional constituye una cuadratriz del paraboloide de grado inferior [LEIBNIZ, 1993, p. 140ss. (2004, p. 192s.)].

Un cuadro sinóptico puede ilustrar la clasificación leibniziana:

Curvas

geométricas (vs. no-geométricas)
analíticas (vs. no-analíticas)

simples		no-simples	
racionales	no-racionales	racionales	no-racionales
por ejemplo,			
$y = pv^2$	$y = \sqrt{v}$	$y = px^2 + x$	$x^2 + y^2 = r^2$

Hay que advertir que este esquema no se encuentra en Leibniz. Se trata de un resultado deducido a partir de la terminología utilizada por él. Las expresiones «no-geométricas», «no analíticas», son los complementos lógicamente necesarios de los términos técnicos «geométrica», «analítica», aunque son utilizados efectivamente por Leibniz como hemos visto. El sentido de los dos pares de términos correspondientes cambia con el transcurso del tiempo. Antes de la invención de su nuevo análisis, Leibniz identificaba geometricidad y analiticidad. Para él existían también curvas no-geométricas como la curva logarítmica. Después de la invención de su análisis, las curvas transcendentes pertenecen a la geometría. Ya no hay curvas no-geométricas.

En sus publicaciones aparecidas a partir de 1682, Leibniz ya no utiliza la noción de analítica para clasificar las curvas. Introduce la dicotomía algebraica-transcendente. [Leibniz, 1682, p. 119 (1989, p. 75); 1684a, p. 123; 1989, p. 89; 1684b, p. 223 (1989, p. 111); 1686, pp. 228 y 230 (1989, pp. 134 y 136 etc.)]. De hecho, Leibniz consideraba muchas curvas transcendentes. Me limitaré a algunos ejemplos. En primer lugar figuran la cicloide (Leibniz, 1993, prop. 12 y 13] y la curva logarítmica [Leibniz, 1993, def. según prop. 43, prop. 44, 46, 47, 50]. Entre las curvas transcendentes, la cicloide puede aparecer como la más simple desde el punto de vista de la construcción, la curva logarítmica, como la más simple desde el punto de vista de la expresión. La primera nace del círculo y de la expresión espacial de los ángulos, la segunda de la hipérbola y de la expresión espacial de las relaciones (Leibniz, 1993, p. 55 (2004, pp. 136-139)]. En 1684, Leibniz pone de relieve las inmensas aplicaciones de esas dos curvas. Se pueden representar mediante ecuaciones de grado indefinido, es decir transcendente [Leibniz, 1684a, p. 124 (1989, p. 90)]. La cicloide no solo era la tautochrona de Huygens. Se revela también como la curva de más rápido descenso, es decir, la brachistochrona (Parmentier en [Leibniz, 1989, p. 346]).

En 1686, Leibniz constata (como hemos visto en la primera parte de este escrito) que la cicloide puede trazarse de forma rigurosa mediante un movimiento continuo [Leibniz, 1686, p. 229 (1989, p. 134)], y vuelve otra vez sobre este tema más tarde [Leibniz, 1693a, p. 295 (1989, p. 253s.)]. La curva logarítmica es un ejemplo particularmente interesante de cuadratriz transcendente (en este caso, de la hipérbola [Leibniz, 1684a, p. 124 (1989, p. 90)]). Para construir los logaritmos, Leibniz compone un movimiento uniforme con un movimiento retardado por un rozamiento constante, es decir, retardado proporcionalmente a los espacios recorridos. Él mismo dice que es un método físico de construir los logaritmos, puesto que la geometría ordinaria es incapaz de construirlos exactamente [Leibniz, 1693a, p. 295 (1989, p. 255); Knobloch, 2004, p. 166ss.].

Otros ejemplos de curvas transcendentes de las que se ocupa Leibniz son: las líneas ópticas, entre otras la cáustica [Leibniz, 1689a]; la isócrona (a lo largo de esta curva un grave cae uniformemente: [Leibniz, 1689b]; la isócrona paracéntrica (sobre esta curva, un grave que desciende de una altura H se acerca o se aleja regularmente de un centro A, de manera que los elementos de las distancias con respecto a A sean proporcionales a los elementos de los tiempos [Leibniz, 1694a]; la catenaria, o curva funicular (la curva trazada por un hilo bajo el efecto de su propio peso [Leibniz, 1691]; la tractriz (curva tal que la porción de su tangente comprendida entre un punto cualquiera y el eje sea constante. Leibniz afirma haberla descubierto en Paris, a instancia del médico Perrault (Parmentier en [Leibniz, 1989, p. 249]); la curva rómbica o loxodrómica (curva con doble curvatura sobre una superficie esférica [Leibniz, 1691]. Leibniz se jacta de ser capaz de calcular con exactitud geométrica el arco de trayectoria en un mismo rombo, es decir, de dar la medida de la curva rómbica: «Es una tarea de la geometría transcendente (negotium est geometriae transcendentis), mientras que en general no se realiza esta medida más que con muy poca exactitud (parum accurate)» [LEIBNIZ, 1691, p. 130ss. (1989, p. 181ss.)].

Leibniz llega más lejos: considera incluso curvas trazadas al azar, diciendo que la universalidad de su proposición de transmutación es tal que vale para todas las curvas, incluso para las curvas trazadas arbitrariamente sin ninguna ley determinada [LEIBNIZ, 1993, p. 35ss. (2004, p. 70ss.)]. En su *Discurso de metafísica* del año 1686, aporta una justificación teológica, según la cual, una curva tal posee en realidad una ecuación: «Pues supongamos por ejemplo que alguien trace cantidad de puntos sobre el papel, totalmente al azar (...) yo digo que es posible hallar una línea geométrica cuya noción sea constante y uniforme según una cierta regla, de forma que esa línea pase por todos esos puntos en el mismo orden en que la mano los había marcado. Dios no hace nada fuera del orden y ni siquiera es posible fingir sucesos que no sean regulares» [AA VI, 4B, 1537s.]. En otras palabras, el orden del mundo creado por Dios lleva siempre consigo una cierta topología. Siempre se pueden ligar dos puntos el uno con el otro. Sólo en un mundo que hubiera sido ordenado menos perfectamente no se podría ligar entre sí dos puntos cualesquiera.

4. LA TEORÍA DE LAS CURVAS ANALÍTICAS SIMPLES

Leibniz diferencia las curvas analíticas simples según una doble distinción [LEIBNIZ, 1993, p. 57ss. (2004, pp. 144-147)]: por un lado las curvas analíticas simples directas (o paraboloides) y las curvas analíticas simples recíprocas (o hyperboloides), por el otro, las curvas analíticas simples racionales y las curvas analíticas simples no-racionales. Para la elaboración de sus tres listas de curvas analíticas simples, se basa, en su Cuadratura aritmética del círculo, en la primera dicotomía [LEIBNIZ, 1993, pp. 53ss. y 57ss. (2004, pp. 130-133 y 144-147)]:

$p^{m-n}y^n = v^m,\ m, n = 1, 2, 3\ etc.,\ n < m$

$y^n = p^{n-m}v^m,\ m, n = 1, 2, 3\ etc.,\ m < n$ para los paraboloides

$y^n v^m = p^{n+m},\ m, n = 1, 2, 3\ etc.$ para los hiperboloides.

Leibniz utiliza las potencias del parámetro p para cumplir la ley de homogeneidad de Viète. La permutación de los indeterminados y,v así como la reducción de los grados o simplificación puede hacer reaparecer una curva expresada en ecuaciones diferentes. Hay que hallar su expresión más simple. Las listas consisten en «clases de equivalencia, en el conjunto de las ecuaciones posibles, módulo las dos operaciones de permutación y simplificación» (Parmentier en [LEIBNIZ, 2004, p. 14]).

Así pues se puede mostrar esta clasificación:

curvas analíticas simples			
paraboloides		hiperboloides	
$y^n = p^{n-m}\, v^m,\ n > m$		$y^n v^m = p^{n+m},\ m, n \in IN$	
racionales	no-racionales	racionales	no racionales
$ax = y$	$ax^2 = y^3$	$xy = a$	$x^2y^3 = a$

Después de haber clasificado estas curvas, Leibniz demuestra seis teoremas generales concernientes a todas ellas al mismo tiempo: teoremas 15, 16, 17, 18, 21, 22. Antes de poderlos considerar, hay que conocer la noción leibniziana de figura de las secciones (*figura resectarum*). La define de este modo [LEIBNIZ, 1993, p. 33 (2004, pp. 64 y 67)]: Por puntos cualesquiera nC de una curva, A1C2C3C, se trazan las ordenadas perpendicularmente al eje de las abscisas. Desde los puntos nC se trazan las tangentes hasta su encuentro con el eje de las ordenadas. Los puntos de intersección se anotan nT. Se transfieren las secciones AnT (*resectae*) sobre las ordenadas nBnC, prolongadas, si es necesario, y se obtienen los puntos nD. Los puntos nD se encuentran sobre una nueva curva (cuadratriz). El espacio situado entre esta nueva curva, las dos ordenadas y el eje de las abscisas, se llama «figura de las secciones».

Así pues, sea 1C2C3C una curva analítica simple $y^n v^m = a$, o bien $y^n = v^m b$. Sea Bθ el segmento de línea del eje de las abscisas, entre el punto de intersección θ de la tangente, Cθ, y B, el pie de la ordenada CB. Leibniz distingue entre los tres casos siguientes:

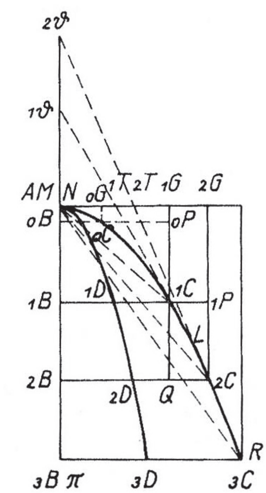

Figura 3: Una curva analítica simple (tipo 1)
[LEIBNIZ, 1993, p. 49]

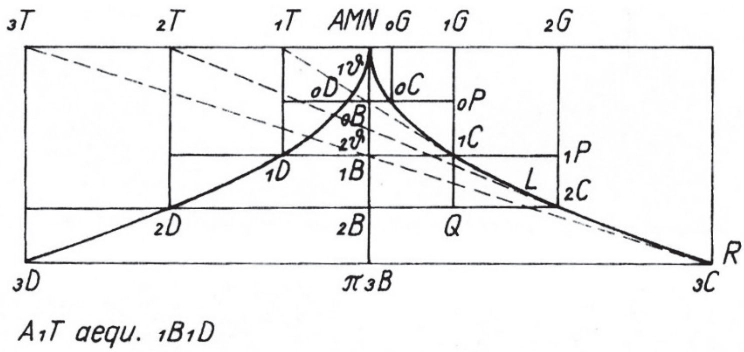

Figura 4: Una curva analítica simple (tipo 2)
[LEIBNIZ, 1993, p. 49]

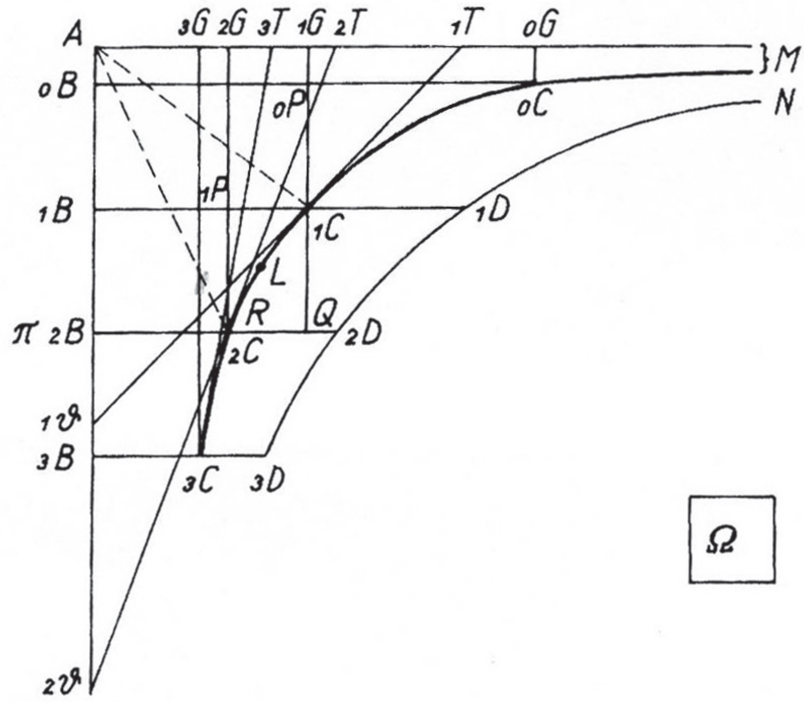

Figura 5: Una curva analítica simple (tipo 3)
[LEIBNIZ, 1993, p. 50]

He aquí su teorema 15: $\frac{B\theta}{AB}$ (o sub-tangente: abscisa) = $\frac{n}{m}$.

Es el teorema de Ricci [RICCI, 1666]. Leibniz no da ninguna demostración del mismo y se contenta con decir: «La demostración exigiría mucho esfuerzo» (*Demonstratio multo opus haberet apparatu*) [LEIBNIZ, 1993, p. 56 (2004, p. 140ss.)], y remite a Ricci. En su estudio *De tangentibus et speciatim figurarum simplicium* de la primera mitad de 1676, aplica este teorema solamente a las curvas analíticas simples racionales: «En una curva analítica simple racional, el intervalo entre la tangente y la ordenada tomado sobre el eje, es, respecto a la abscisa, como el exponente de la potencia según la cual son tomadas las abscisas es respecto al exponente de la potencia según la cual son tomadas las ordenadas proporcionales a las mismas»[26] [AA VII, 5, 474 sq.]. Leibniz abandona la demostración algunas páginas después: no da ninguna demostración completa.

Consideremos los otros cinco teoremas que demuestra completamente:

Teorema 16: Cuando la figura generatriz es una figura analítica simple, la figura de las secciones que ella engendrará será igualmente una figura analítica simple. Sean BC, BD las ordenadas correspondientes de las dos figuras:

$\frac{BC}{BD} = n : n\text{-}m\ (n>m)$, o bien $n : m\text{-}n\ (n<m)$ si $y^n = v^m b$; $\frac{BC}{BD} = n : n+m$ si $y^n v^m = a$

La demostración se apoya en el teorema 15. Para el caso de la parábola, por ejemplo, se obtiene: BD = AT, luego BD: BC = θA: θB, luego ($_1\theta_1$B – A$_1$B):$_1\theta_1$B = $_1\theta_1$B:$_1\theta_1$B –A$_1$B:$_1\theta_1$B = $1 - m : n = (n\text{-}m) : n$

Teorema 17: El doble de $_1$CA$_2$C$_1$C está con $_1$C$_1$B$_2$B$_2$C$_1$C en la relación de $n\text{-}m : n$ (Fig. 3), o bien $m\text{-}n : n$ (Fig. 4), o bien $n+m : n$ (Fig. 5).

La demostración se apoya sobre el teorema de transmutación y sobre el teorema 16. Según el teorema de transmutación, el doble de $_1$CA$_2$C$_1$C es igual a la figura $_1$D$_1$B$_2$B$_2$D$_1$D. Según su método de los indivisibles, las sumas de todas las líneas BD y de todas las líneas BC, son iguales a las dos figuras consideradas, cuya relación viene dada por el teorema 16.

Teorema 18 : La zona entre dos ordenadas, el arco de la curva y el eje, es, respecto a la zona conjugada entre las dos abscisas correspondientes, el mismo arco de la curva y el eje conjugado, como $n : m$.

La demostración se apoya en el teorema 17. Sea S el sector A$_1$C$_2$CA. Entonces:

2 veces el sector S : zona $1 = n\text{-}m : n$ o bien $m\text{-}n : n$ o bien $n+m : n$

2 veces el sector S : zona $2 = n\text{-}m : m$ o bien $m\text{-}n : m$ o bien $n+m : m$

La división de la primera ecuación por la segunda nos da el resultado buscado.

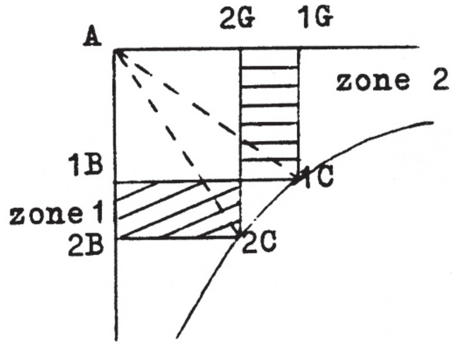

Figura 6: Las dos zonas conjugadas de una curva analítica simple
[KNOBLOCH, 1993, p. 80]

Gracias a estos teoremas, Leibniz puede deducir la cuadratura de cualquier figura analítica simple exceptuando a la hipérbola cónica (teorema 19). Mencionaremos los dos teoremas que faltan sin demostrarlos[27]. Lo interesante aquí es el enfoque geométrico que todavía no utiliza el cálculo diferencial:

Teorema 21: Sea un hiperboloide dado. El rectángulo bajo la abscisa infinitamente pequeña A0B y la ordenada infinitamente grande 0B0C es

una cantidad infinita, si $m > n$
una cantidad infinitamente pequeña, si $m < n$,
una cantidad finita, si $n = m$.

Teorema 22: Sea cualquier hiperboloide dado, exceptuando la hipérbole cónica. Hay dos espacios de longitud infinita: 1C1BA0G0C1C y 1C1GA3B…3C1C. Sus áreas son infinitas o finitas respecto a una de las asíntotas según sea $n < m$ o lo contrario.

Con ayuda de su geometría infinitesimal, basada en la noción bien definida de infinitamente pequeño, Leibniz elabora así una teoría completa de las curvas analíticas simples. Por lo que sabemos, es la única vez en que los métodos geométricos y los métodos infinitesimales cohabitan. Casi en la misma época, es decir, en otoño del año 1675, inventa su cálculo diferencial, que convierte en superfluos los métodos infinitesimales. Los resultados obtenidos continúan siendo válidos. Se podría hablar de un ardid de la historia (de las ciencias), el que la justificación absolutamente rigurosa de su principio general de equipolencia no se encuentre más que en su tratado de la Cuadratura aritmética. Este tratado se basa en métodos infinitesimales. Estos se apoyan en el teorema 6, que está demostrado con ayuda de métodos arquimedianos, en otras palabras, con ayuda de métodos generalmente aceptados.

5. Epílogo

Repitamos los pasos más importantes del desarrollo conceptual explicado en este artículo. Leibniz identifica la analiticidad con la calculabilidad, que se convierte en la noción clave de sus ideas al respecto. Completa, perfecciona el análisis de forma que la geometría sea sometida en toda su extensión al cálculo analítico. Ello resulta posible gracias a su principio general de equipolencia, justificado rigurosamente en su tratado de la Cuadratura aritmética. Su clasificación de las curvas refleja este desarrollo. Finalmente, ya no existen curvas no-geométricas. Las curvas analíticas simples merecen ser consideradas con un poco más de detalle, pues Leibniz ha elaborado (una sola vez) su teoría completa.

Se podrían resumir los resultados leibnizianos con sus propias palabras: «Mediante la incursión más libre del espíritu, podemos tratar con no menos audacia que seguridad las curvas y las rectas»[28] [Leibniz 1993, p. 69 (2004, pp. 182 y 184s.)]. Esta observación nos recuerda la famosa frase de Cantor [Cantor, 1883, p. 182]: «La esencia de las matemáticas consiste justamente en su libertad».

Notas

1 Texto que Leibniz conocía por su traducción latina [Descartes, 1659-61, p. 21]: *«Aptius quidquam afferre nescio, quam ut dicam, quod puncta omnia illarum, quae geometricae appellari possunt, hoc est, quae sub mensuram aliquam certam et exactam cadunt, necessario ad puncta omnia lineae rectae, certam quandam relationem habeant, quae per aequationem aliquam, omnia puncta respicientem, exprimi possit»*.

2 *quadratura analytica*
seu quae per calculum accuratum fit

transcendens	*algebraica*	*arithmetica*
xx + x = 30	*per radices aequationum communium*	*per series (infinitas) exactum exprimit valorem*

3 Lo mismo se aplica, por ejemplo, a la noción de «indivisible». En la primavera de 1673, la define como una cantidad infinitamente pequeña [AA VII, 4, 265] lo que, en el sentido estricto de la palabra, conduce a contradicción, pues según la definición aristotélica de una cantidad (*Métaphysique* V, 13), lo que no puede ser dividido, no puede ser una cantidad.

4 Leibniz [1700, p. 340 (1989, p. 359)]. Evidentemente, la expresión «art analytique» retoma la de Viète [1591, portada].

5 «*Denique fastuosum problema problematum ars analytice (…) jure sibi adrogat, quod est nullum non problema solvere*» [Viète, 1591, p. 12].

6 «*analysis respondens geometriae transcendentium (…) sit scientia infiniti*» [Leibniz, 1693, p. 294 (1989, p. 253)].

7 «*Figuras malim vocare analyticas, quas alii post Cartesium geometricas. Nam cycloeidem exempli gratia non video quid prohibeat appellari geometricam, cum uno continuo motu eoque admodum simplici exacte describi possit (…) analyticam autem esse nego, quoniam relatio inter ordinatas et abscissas nulla aequatione explicari potest*» [AA VII, 5, 202].

8 «*Necesse est, eas quoque lineas recipi in geometriam, per quales solas construi possunt (sc. problemata); et cum eae exacte continuo motu describi possint, ut de cycloide et similibus patet, revera censendas esse (…) geometricas*» [Leibniz, 1686, p. 229 (1989, p. 134)].

9 «*Si cycloidis ordinata sit y, fiet* $y = \sqrt{2x - xx} + \int dx : \sqrt{2x - xx}$, *quae aequatio perfecte exprimit relationem inter ordinatam y et abscissam x…promotusque est hoc modo calculus analyticus ad eas lineas, quae non aliam magis ob causam hactenus exclusae sunt, quam quod ejus incapaces crederentur*» [LEIBNIZ, 1686, p. 231 (1989, p. 138].

10 «*Statuo, quicquid exactum est, geometricum esse, mechanicum vero quod fit approximando*» [LEIBNIZ, 1694b, p. 312 (1989, p. 295)].

11 «*cum ea quae alia magis (in speciem) rigorosa methodo inveniri possunt, hac methodo semper non minus accurate prodire sit necesse*» [LEIBNIZ, 1695, p. 322 (1989, p. 328)].

12 Parmentier en [LEIBNIZ, 2004, p. 19].

13 «*Licet autem argumentari de EB ut de recta, quia vis demonstrationis secat circulum in arcus minimos, qui aequiparantur rectis*» [KEPLER, 1615, p. 14].

14 «*Sed ista methodus generaliter ita refutatur: Curvae aequiparandae sunt polygonis laterum infinitorum*» [AA VII, 4, 63].

15 «*Sentient autem (sc. lectores) quantus inveniendi campus pateat, ubi hoc unum recte perceperint, figuram curvilineam omnem nihil aliud quam polygonum laterum numero infinitorum, magnitudine infinite parvorum esse*» [LEIBNIZ, 1993, p. 69 (2004, pp. 184-187)].

16 «*Sentio autem et hanc (methodum) et alias hactenus adhibitas omnes deduci posse ex generali quodam meo dimetiendorum curvilineorum principio, quod figura curvilinea censenda sit aequipollere polygono infinitorum laterum*». Como en el tratado de *Cuadratura aritmética*, Leibniz compara una figura curvilínea con un polígono. No tiene sentido comparar un área con un polígono. Por lo tanto, también aquí designa Leibniz por figura curvilínea una curva y no un área como algunos han mantenido (Parmentier en [LEIBNIZ, 1989, p. 111 nota 59]). De hecho, Leibniz no distinguía propiamente entre *figura*, *linea*, *curva* [AA VII, 4, Índice de materias, artículos *curva*, *figura, Kurve, línea*)].

17 «*Patet etiam methodum nostram porrigi ad lineas transcendentes…modo teneatur in genere tangentem invenire esse rectam ducere… seu latus productum polygoni infinitanguli, quod nobis curvae equivalet*» [LEIBNIZ, 1684b, p. 223 (1989, p. 111)].

18 «*Mihi vero feliciter accidit, ut theorema prop. 7. hujus traditum curvam daret rationalem simplicis admodum expressionis; circulo aequipollentem; unde nata est quadratura circuli arithmetica, et vera expressio analytica arcus ex tangente, cujus gratia ista conscripsimus. Inde porro investigans methodum reperi generalem admodum et pulchram ac diu quaesitam, cujus ope datae cuilibet curvae analyticae, exhiberi potest curva analytica rationalis aequipollens, re ad puram analysin reducta*» [LEIBNIZ, 1993, p. 56 (2004, p. 138ss.)].

19 «*Mihi ergo methodus innotuit, qua tum circulus tum alia quaelibet figura in aliam rationalem aequipollentem transmutari, ac per summas infinitas rationales exhiberi potest (…). Nos viam deprehendimus qua omnes figurae aequationis cujuscunque reduci possint ad rationales aequipollentes*» [LEIBNIZ, 1993, p. 110 (2004, pp. 308, 307, 309)].

20 «*Nam in hoc ipso peccarunt plerique et sibi viam ad ulteriora praeclusere, quod indivisibilibus istiusmodi, velut dx, universalitatem suam (ut scilicet progressio ipsarum x assumi posset qualiscunque) non reliquerunt, cum tamen ex hoc uno innumerabiles figurarum transfigurationes et aequipotentiae oriantur*» [LEIBNIZ, 1686, p. 233 (1989, p. 141ss.)].

21 «*Hinc facile demonstrari potest circulum et hyperbolam nullam habere quadratricem; quoniam impossibile est quadratricem veterum, et lineam logarithmicam analyticas esse*» [AA VII, 5, 203].

22 «*Figuram simplicem voco, cujus curvae natura aequatione duorum terminorum exhiberi potest*» [AA VII, 5, 450].

23 «*Curvam analyticam simplicem voco, in qua relatio inter ordinatas et portiones ex axe aliquo abscissas, aequatione duorum tantum terminorum explicari potest*» [LEIBNIZ, 1993, p. 51ss. (2004, p. 124ss.)].

24 «*Curva rationalis est, cujus directrix aliqua ita assumi potest, ut datis abscissis et parametris in numeris rationalibus, etiam ordinatae normales in numeris haberi possint. Et hoc fit cum valor ordinatae habe-*

ri potest pure, sine ulla radicum extractione…Tales sunt omnes curvae, in quibus ordinatae sunt in directa aut reciproca ratione multiplicata aut submultiplicata abscissarum» [AA VII, 5, 473].

25 «*Curva analytica rationalis est cujus axis ita sumi potest, ut sit ordinata rationalis posito abscissam et parametros, esse rationales*» [LEIBNIZ, 1993, p. 54 (2004, p. 132ss.)].

26 «*In curva analytica simplice rationali intervallum tangentis ab ordinata sumtum in directrice est ad abscissam ut exponens dignitatis secundum quam sumuntur abscissae ad exponentem dignitatis secundum quam ipsis proportionales sumuntur ordinatae*».

27 Se puede encontrar un análisis preciso de las demostraciones en KNOBLOCH [1993].

28 «*Liberrimo mentis discursu possumus non minus audacter ac tuto curvas quam rectas tractare*».

BIBLIOGRAFÍA

AA = LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1921-) *Sämtliche Schriften und Briefe*. Hrsg. von der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Berlin (desde 1921, ocho series).

BOS, HENK (2001) *Redefining geometrical exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York – Heidelberg, Springer.

CANTOR, GEORG (1883) «Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten». *Mathematische Annalen, 21,* 51-58, 545-586 [Este artículo pertenece a una serie: *Mathematische Annalen, 15(1879),* 1-7; *17(1880),* 355-358; *20(1882),* 113-121; *23(1884),* 453-488. Citado por la reedición: CANTOR, G. (1932) *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Hrsg. von Ernst Zermelo nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel. Berlin, Springer, 139-246 (Reed. Berlin – Heidelberg – New York, Springer, 1980)].

DESCARTES, RENÉ (1659-61) *Geometria*. Ed. Frans van Schooten. Amsterdam, Elzevir [Leibniz utilizó esta edición latina de la *Géométrie* cartesiana].

FÖGEN, MARIE THERES (1997) *Die Enteignung der Wahrsager. Studien zum kaiserlichen Wissensmonopol in der Spätantike*. Frankfurt/Main, Suhrkamp.

GM = LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1849-1863) *Mathematische Schriften*. Hrsg. von Carl Emmanuel Gerhardt. Berlin – London – Halle, 7 vols. [Reed. Hildesheim, Georg Olms, 1962].

GULDIN, PAUL (1635-41) *De centro gravitatis*. 4 vols. Viena, Formis Gregorii Gelbhaar Typography Caesarei.

KEPLER, JOHANNES (1615) *Nova stereometria doliorum vinariorum*. Linz, Excudebat J. Plancvs, sumptibus authoris [Citado por la reedición: KEPLER, J. (1960) *Gesammelte Werke*. Hrsg. im Auftrag der Deutschen Forschungsgemeinschaft und der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Munich, C.H. Beck, Vol. IX, 3-133.

KNOBLOCH, EBERHARD (1993) «Les courbes analytiques simples chez Leibniz». *Sciences et techniques en perspective, 26,* 74-96.

KNOBLOCH, EBERHARD (2001) «100 Jahre Mathematik in Berlin«. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Heft 4*, 32-38.

KNOBLOCH, EBERHARD (2004) «La configuration (mécanique, géométrie, calcul) et ses bouleversements à la fin du XVIIe siècle. L'exemple de Leibniz». En: Regis Morelon & Ahmad Hasnaoui (eds.) *De Zénon d'Élée à Poincaré. Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*. Louvain – Paris, Éditions Peeters, 161-174.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1682) «De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa». *Acta Eruditorum,* Febrero 1682, 41-46 [Citado por la reedición: **GM** V, 118-122; Versión francesa: LEIBNIZ, 1989, 61-81].

— (1684a) «De dimensionibus figurarum inveniendis». *Acta Eruditorum,* Mayo 1684, 233-236 [Citado por la reedición: **GM** V, 123-126; Versión francesa: Leibniz, 1989, 82-95].
— (1684b) «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus». *Acta Eruditorum,* Octubre 1684, 467-473 [Citado por la reedición: **GM** V, 220-226; Versión francesa: Leibniz, 1989, 96-117].
— (1686) «De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum». *Acta Eruditorum,* Julio 1686, 292-300 [Citado por la reedición: **GM** V, 226-233; Versión francesa: Leibniz, 1989, 126-143].
— (1689a) «De lineis opticis et alia». *Acta Eruditorum,* Enero 1689, 36-38 [Citado por la reedición: **GM** V, 329-331; Versión francesa: Leibniz, 1989, 144-153].
— (1689b) «De linea isochrona, in qua grave sine acceleratione descendit, et de controversia cum Dn. Abbate de Conti». *Acta Eruditorum,* Abril 1689, 195-198 [Citado por la reedición: **GM** V, 234-237; Versión francesa: Leibniz, 1989, 154-165].
— (1691) «De linea, in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales et logarithmos». *Acta Eruditorum,* Junio 1691, 277-281 [Citado por la reedición: **GM** V, 243-247; Versión francesa: Leibniz, 1989, 186-199].
— (1692a) «De la chaînette, ou solution d'un problème fameux, proposé par Galilei, pour servir d'essai d'une nouvelle analyse des infinis, avec son usage pour les logarithmes, et une application à l'avancement de la navigation». *Journal des Sçavans,* Mars 1692, 147-153 [Citado por la reedición: **GM** V, 258-263].
— (1692b) «De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analysis infinitorum usu». *Acta Eruditorum,* Abril 1692, 168-171 [Citado por la reedición: **GM** V, 266-269; Versión francesa: Leibniz, 1989, 210-221].
— (1693a) «Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione». *Acta Eruditorum,* Septiembre 1693, 385-392 [Citado por la reedición: **GM** V, 294-301; Versión francesa: Leibniz, 1989, 247-267].
— (1693b) «Excerptum ex epistola G. G. L. cui praecedens meditatio fuit inclusa». *Acta Eruditorum,* Octubre 1693, 476-477 [Citado por la reedición: **GM** V, 290-291].
— (1694a) «Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendantes». *Journal des Sçavans,* Août 1694, 404-406 [Citado por la reedición: **GM** V, 306-308].
— (1694b) «Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica, ubi et generaliora quaedam de natura et calculo differentiali osculorum etc.» *Acta Eruditorum,* Agosto 1694, 364-375 [Citado por la reedición: **GM** V, 309-318; Versión francesa: Leibniz, 1989, 282-304].
— (1695) «Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Niewentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas». *Acta Eruditorum,* Julio 1695, 310-316 [Citado por la reedición: **GM** V, 320-328; Versión francesa: Leibniz, 1989, 316-334].
— (1700) «Responsio ad Dn. Nic. Fatii Duillierii imputationes. Accessit nova artis analyticae promotio specimine indicata, dum designatione per numeros assumtitios loco literarum, algebra ex combinatoria arte lucem capit». *Acta Eruditorum,* Mayo 1700, 198-208 [Citado por la reedición: **GM** V, 340-349; Versión francesa: Leibniz, 1989, 359-382].

— (1702) «Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas». *Acta Eruditorum,* Mayo 1702, 210-219 [Citado por la reedición: **GM** V, 350-361; Versión francesa: LEIBNIZ, 1989, 383-401].
— (1703) «Continuatio analyseos quadraturarum rationalium». *Acta Eruditorum,* Enero 1703, 19-26 [Citado por la reedición: **GM** V, 361-366; Versión francesa: LEIBNIZ, 1989, 402-408].
— (1713) (Hoja volandera del 29 de julio 1713) [Citado por la reedición: **GM** V, 411-413].
— (1714) *Historia et origo calculi differentialis* [Citado por la reedición: **GM** V, 392-410].
— (1989) *La naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta Eruditorum*. Introducción, traducción y notas por Marc Parmentier. Prefacio de Michel Serres. Paris, Vrin.
— (1993) *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbola cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. *Kritisch herausgegeben und kommentiert von Eberhard Knobloch.* «Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen», Mathematisch-physikalische Klasse 3. Folge Nr. 43. *Göttingen*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
— (2004) *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole*. Introducción, traducción y notas de Marc Parmentier. Texto latino editado por Eberhard Knobloch. Paris, Vrin.
RICCI, MICHELANGELO (1666) *Exercitatio geometrica de maximis et minimis.* Roma, Nicolaum Angelum Tinassium.
VIÈTE, FRANÇOIS (1591) *In artem analyticen isagoge*. Tours, Jamet Mettayer [Citado por la reedición: VIÈTE, F. (1646) *Opera mathematica*, *opera atque studio Francisci a Schooten*. Leiden, Elzevir, 1-12 (Reed. Hildesheim, Georg Olms, 1970)].