REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Interações dialógicas em atividades de Modelagem Matemática

Elaine Cristina Ferruzzi[1], Lourdes Maria Werle de Almeida[2]

elaineferruzzi@utfpr.edu.br , lourdes@uel.br,

[1]UTFPR,Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná. Brasil
[2]UEL, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná. Brasil

Resumo

Neste artigo apresentamos parte dos resultados de uma pesquisa onde investigamos o potencial da Modelagem Matemática para o estabelecimento de interações que possuem características consideradas geradoras de aprendizagem. Diante da importância atribuída à comunicação em atividades de Modelagem Matemática e às interações em sala de aula, investigamos as interações que emergem durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e procuramos identificar interações classificadas por alguns pesquisadores com maior potencial para a aprendizagem. Os resultados que apresentamos decorrem da análise à luz da classificação de discursos apresentada por Mortimer e Scott (2002) de atividades de Modelagem desenvolvidas por um grupo de alunos de um curso de Engenharia Ambiental. A partir dessa análise concluímos que as características da Modelagem Matemática em sala de aula, propiciam a participação ativa do aluno, contribuindo para o estabelecimento de interações geradoras de aprendizagem.

Palavras chave: Modelagem Matemática; Interações dialógicas; Educação Matemática

Interacciones dialógicas en las actividades de Modelización Matemática

Resumen

En este trabajo, presentamos parte de los resultados de un estudio donde investigamos el potencial del Modelización Matemática para el establecimiento de interacciones que tienen características consideradas generadoras de aprendizaje. Frente a la importancia dada a la comunicación en actividades de Modelización Matemática y las interacciones en el aula, investigamos las interacciones que surgen durante el desarrollo de actividades de Modelización Matemática y buscamos identificar las interacciones clasificadas por algunos investigadores con el mayou potencial para el aprendizaje. Los resultados mostrados son consecuencia del análisis de acuerdo con la clasificación de discursos presentada por Mortimer y Scott (2002) de actividades de Modelalización, desarrolladas por un grupo de alumnos de un curso de Ingeniería Ambiental. A partir de ese análisis, concluimos que las características del Modelización Matemática en el aula incentivan la participación activa del alumno, contribuyendo para el establecimiento de interacciones generadoras de aprendizaje.

Palabras-clave: Modelización Matemático; Interacciones dialógicas; Educación Matemática

Dialogical interactions in Mathematical Modeling activities

Abstract

In this paper we present a part of the results of a research in which we investigated the potential of Mathematical Modeling for the establishment of interactions with characteristics considered learning generating. In face of the importance given to the communication in Mathematical Modeling activities and classroom interactions, we investigated the interactions that emerge during the development of Mathematical Modeling activities and tried to identify interactions classified by some researchers with the greatest potential for learning. The results we present derive from an analysis under the lights of the discourse classification presented by Mortimer and Scott (2002) of the Modeling activities carried out by a group of Environmental Engineering students. From this analysis we have concluded that the characteristics of Mathematical Modeling in the classroom propitiate the student's active participation, contributing to the establishment of learning generating interactions.

Keywords: Mathematical Modeling; Dialogical interactions; Mathematical Education.

Interactions dialogiques dans lens activités de modélisation mathématique

Résumé

Dans cet article, nous présentons une partie des résultats d'une recherche où nous faisons une enquête sur le potentiel de la modélisation mathématique pour établir d'interactions qui ont de caractéristiques qui gênèrent de l'apprentissage. En vue de l'importance donnée à la communication concernant les activités de modélisation mathématique et les interactions en salle de cours, nous enquêtons sur les interactions qui ressortent pendant le développement d'activités de modélisation mathématique et nous cherchons à identifier les interactions classes par certains chercheurs ayant le plus grand potential d´apprentissage. Les résultats que nous présentons sont dérivés de l'analyse de la classification de discours présentée par Mortimer et Scott (2002) d'activités de modélisation développées par un groupe d'élèves d'un programme d'ingénierie environnementale. A partir de cette analyse, nous concluons que les caractéristiques de la modélisation mathématique en salle de cours encouragent la participation active de l'élève, ce qui contribue à l'établissement d'interactions qui gênèrent de l'apprentissage.

Mots clés: Modélisation mathématique, interactions dialogiques, enseignement mathématique

1. INTRODUÇÃO

A importância da matemática para estudantes de Engenharia aliada à constatação da dificuldade que estes alunos apresentam na aprendizagem da mesma são fatores que sempre nos inquietaram no decorrer de nossa prática docente. Como educadoras e pesquisadoras temos nos empenhado em identificar metodologias, ações e aspectos presentes nestas ações e metodologias, que possam auxiliar o aluno em seu processo de aprendizagem[1] em sala de aula.

Na busca por respostas às nossas inquietações nos deparamos com os estudos de Vygotsky (1993[a],1993[b], 2007) para quem a aprendizagem está associada à interação. Se a interação é determinante para a aprendizagem, propiciar atividades que oportunizem a interação auxilia o aluno em seu aprendizado e deve ser um dos interesses do professor.

Considerando esse interesse, desenvolvemos com alunos de um curso de Engenharia Ambiental atividades de Modelagem Matemática. Ainda que o desenvolvimento de atividades de Modelagem venha cercado de interações entre alunos, entre alunos e professor, entre alunos e profissionais diversos, entre alunos e professores de disciplinas diferentes da Matemática, fundamentados em autores como Anna Sfard, Noreen Webb, Helle Alro e Ole Skovsmose, Mortimer e Scott (2002), podemos argumentar que algumas interações contribuem mais do que outras para a aprendizagem. Surge aí uma questão: dentre as interações que ocorrem durante atividades de Modelagem Matemática, é possível identificar aquelas com maior potencial para oportunizar a aprendizagem? Para responder esta pergunta precisamos, primeiramente, indagar sobre quais interações possuem esse potencial. Que características têm estas interações?

Na busca por respostas para essas questões, encontramos nas pesquisas de Mortimer e Scott (2002) uma abordagem comunicativa que caracteriza discursos e interações com maior potencial para aprendizagem.

Considerando esta caracterização de Mortimer e Scott (2002), estamos interessados em investigar a ocorrência de interações com este potencial em atividades de Modelagem Matemática.

Deste modo, procuramos identificar no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática características que, para além da importância atribuída às interações em sala de aula e/ou em atividades desenvolvidas por meio da Modelagem Matemática, sinalizam a interação como constituinte da aprendizagem do aluno.

Neste trabalho estabelecemos como foco de análise atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por um grupo de alunos matriculados na disciplina *Matemática 2*, no segundo ano do curso de Engenharia Ambiental de uma Universidade Tecnológica Federal buscando nessas atividades a identificações de interações e seu potencial para a aprendizagem dos estudantes.

2. O QUADRO TEÓRICO DA PESQUISA

2.1 As interações em sala de aula e sua relação com a aprendizagem: o que revelam algumas pesquisas

A importância da interação para a aprendizagem é enfatizada por diversos pesquisadores e muitas das pesquisas realizadas têm seu embasamento teórico nas idéias do psicólogo russo Lev Semynovich Vygotsky.

Vygotsky (1993[a]), em seus estudos, demonstrou preocupação com o desenvolvimento do ser humano e procurou explicar este desenvolvimento em relação aos aspectos sociais. Para este pesquisador não é suficiente entender os processos de desenvolvimento das funções psicológicas baseando-se apenas nas funções já desenvolvidas. Neste sentido defende a importância de compreender os conceitos potenciais para o desenvolvimento dessas funções. Assim, e com vistas a compreender o papel do outro na aprendizagem, Vygotsky (2007) concebeu o desenvolvimento humano em dois

[1] Neste estudo percebemos a aprendizagem como um processo de mudança nas formas discursivas, conforme caracterizado por Sfard (2001[a], 2001[b], 2006).

níveis: o Nível de Desenvolvimento Real (NDR) e o Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP). A "distância" entre estes dois níveis é denominada por Vygotsky (1993[a]) como sendo a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). O conceito da ZDP traz consigo a idéia das transformações que podem originar-se por meio da ação intencional do professor, com vistas a promover progressos que não aconteceriam de modo espontâneo (Schroeder, Ferrari e Maestrelli, 2010).

O Nível de Desenvolvimento Real (NDR) é caracterizado por aquilo que o indivíduo já conquistou e apropriou-se e é capaz de realizar sozinho. Já o Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP) é caracterizado pela capacidade de realizar tarefas com a ajuda dos outros recebendo pistas, orientações e informações (Vygotsky, 1993[a]).

A teoria vygotskiana apregoa ainda que a escola deve adiantar-se ao desenvolvimento do indivíduo, pois de acordo com esta teoria, a aprendizagem impulsiona o desenvolvimento, que por sua vez, permite novas aprendizagens, que novamente impulsionam o desenvolvimento e assim sucessivamente. Assim, é fundamental que o professor esteja atento ao NDP do aluno, para poder atuar sobre estas funções, oferecendo algo que vai além do que o indivíduo consegue realizar sozinho, desafiando-o. Daí a importância do professor (ou de um colega em interação) como mediador, auxiliando o indivíduo a alcançar um novo patamar de desenvolvimento.

Entretanto, para que isto ocorra, é necessário que a educação formal propicie interações entre professor/aluno e entre alunos, permitindo que o 'outro' atue na ZDP do indivíduo, pois é exatamente nesta ZDP que a comunicação em sala de aula pode atuar de maneira decisiva para o aprendizado do estudante.

Além das argumentações construídas por Vygotsky, muitos educadores/pesquisadores têm apresentado resultados de pesquisas em que enfatizam a importância da interação para a aprendizagem.

Para Webb, Farivar e Mastergeorge (2002) as atividades desenvolvidas pelos alunos em pequenos grupos representam uma oportunidade para o aluno reconhecer e solucionar contradições entre as suas próprias perspectivas e as dos outros e incorporar processos e estratégias de resolução de problemas. No mesmo sentido, Lau et al (2009) afirmam que, na colaboração entre pares, existe um potencial de aprendizado onde o aluno necessita da contribuição do 'outro' para fazer progresso em seu aprendizado. Os autores argumentam que em interação os alunos se envolvem construtivamente ao resolver problemas, propondo, formulando, conjecturando e justificando idéias matemáticas e ao avaliar as idéias dos seus pares.

No artigo "Aspectos sociais e culturales de la educación matemática" Bishop (1988) trata do ensino e da aprendizagem da Matemática, seus problemas e desafios. Neste artigo Bishop (1988) enfatiza que diversos pesquisadores têm demonstrado como a aprendizagem de um indivíduo é determinada pela aprendizagem dos demais e, com base em suas pesquisas empíricas, afirma que os estudantes em interação se ajudam mutuamente na construção do conhecimento de cada um.

Webb e Palincsar (1996) tratando da teoria sócio-histórica de Vygotsky argumentam que em interação os alunos constróem o conhecimento que não eram capazes de construir antes da interação com seus pares.

Vale notar a contribuição de Cobo e Fortuny (2000) que apresentam resultados de uma pesquisa em que investigaram as relações entre as interações e a aprendizagem. Utilizando como referencial teórico de análise elementos da "análise do discurso" estes autores afirmam que quando os alunos estão em interação uma série de possibilidades de aprendizagem são geradas. Alguns dos benefícios para aprendizagem apresentados por estes autores estão relacionados com a probabilidade de melhoria nos processos argumentativos, com a capacidade heurística, com a forma de abordar problemas e com as formas de gerar novas idéias dentro do processo de resolução de problemas. Para os autores "*A interação entre os alunos afeta a cognição de cada um, como se fosse um verdadeiro sistema social*[2]" (pp 35).

Estes aspectos também são enfatizados por Carvalho e César (2002) para quem a interação oportuniza o confronto de idéias e este confronto resulta em um desequilíbrio inter-individual (em relação às respostas dos sujeitos) e intra-individual (onde o sujeito é levado a questionar seu próprio ponto de vista). É na procura por ultrapassar o desequilíbrio inter-individual que o sujeito resolve seu conflito intra-individual, e, neste sentido, as interações podem auxiliar o desenvolvimento cognitivo.

Webb e Mastergeorge (2003), que, em sintonia com argumentações de Vygotsky (1993[a]), afirmam que ao participarem de atividades interativas, os estudantes podem aprender muito uns com os outros, pois compartilham conhecimentos, constroem suas idéias com auxilio das idéias dos outros, reconhecem e resolvem suas próprias contradições e incorporam os processos de resolução de problemas e estratégias que surgem durante o desenvolvimento das atividades.

Considerando as indicações apontadas nas pesquisas a que referimos em relação à ocorrência de interações e a aprendizagem dos estudantes, é que, nesta pesquisa, nos debruçamos sobre atividades de Modelagem matemática e seu potencial para gerar interações com possibilidade de gerar aprendizagem.

2.2 Modelagem Matemática na sala de aula

Em nossa pesquisa a Modelagem Matemática é entendida como a

> busca de uma representação matemática para um objeto ou um fenômeno, que pode ser matemático ou não. Neste sentido, trata-se de um procedimento criativo e interpretativo

2. Texto original: The interaction among students affects the cognition of each, as if it were a genuine social system.

> que estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar as características essenciais do objeto ou fenômeno que pretende representar (Almeida e Ferruzzi, 2009, p. 120).

Considerando que a construção desta representação pode ocorrer em sala de aula, diversos focos de pesquisa têm sido evidenciados: a relação entre conhecimentos matemáticos e extra-matemáticos (Almeida e Brito, 2005; Bisognin E, Bisognin V. e Isaia, 2009; Almeida e Ferruzzi, 2009; Ferruzzi, Almeida e Gonçalves, 2006); critérios para avaliação da utilização da Modelagem Matemática na sala de aula (Borba, Meneghetti e Hermini, 1999); o envolvimento dos alunos e do professor (Souza, 2007; Barbosa, 2008, 2006[b]; Fox, 2006; Zbiek e Conner, 2006); o uso das tecnologias de comunicação e informação em atividades de Modelagem Matemática (Borba e Malheiros, 2007; Borba, Meneghetti e Hermini, 1997), entre outros.

Neste sentido, muitos educadores da área de Educação Matemática têm apresentado argumentos favoráveis à sua introdução em sala de aula. Esta introdução tem sido pontuada sob diferentes justificativas, levando em consideração: a reflexão dos alunos sobre o papel da Matemática na sociedade (Skovsmose, 2001; Oliveira, Campos e Silva, 2009); a aprendizagem de conceitos matemáticos (Chinnappan e Thomas, 2003; Stillman et al., 2007; Almeida e Ferruzzi, 2009; Sant'ana 2007); a oportunidade para aluno exercer um papel investigativo (Almeida e Ferruzzi, 2009; Santos e Bisognin, 2007); a motivação para a aprendizagem (Burak, 2004, Santos; Bisognin, 2007); o desenvolvimento da capacidade de solucionar problemas oriundos do cotidiano (Bisognin, E., Bisognin, V., e Alonso Rays, 2004), entre outras.

Estas argumentações estão, de modo geral, fundamentadas nas ações daqueles envolvidos nas atividades de Modelagem. Geralmente, a Modelagem Matemática inicia com uma situação-problema que pode ser investigada e, ao deparar-se com esta situação, o modelador precisa compreendê-la e elaborar/formular o problema a ser investigado (Almeida e Ferruzzi, 2009).

Tendo definido o problema a ser investigado, o modelador, na expectativa de buscar soluções, investe na construção de um modelo matemático. De acordo com Almeida e Ferruzzi (2009), este modelo deve representar a situação-problema e ser passível de descrever uma solução para a mesma. Neste momento é necessário que o modelador (indivíduo que está desenvolvendo o modelo) utilize sua experiência e seu conhecimento matemático, realizando inferências sobre o problema e construindo hipóteses, levando em consideração os conceitos matemáticos que representam a situação.

Assim, ainda que a situação tenha origem fora da Matemática, torna-se um "problema matemático" a ser resolvido, respeitando-se limitações, condições e características da situação inicial, solucionando o problema por meio da matemática. Com os resultados o modelador interpreta o problema inicial, o que resulta na etapa de validação do modelo encontrado.

Deste modo, no encaminhamento dado às atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, os envolvidos realizam um conjunto de ações, como a compreensão da situação-problema, a busca de informações sobre o fenômeno a ser estudado, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação do problema, a obtenção e validação de um modelo matemático, identificando a sua aceitabilidade ou não e a comunicação dos resultados. Segundo Almeida e Ferruzzi (2009), estas ações estão associadas:

> a) à formulação de um problema: os envolvidos com a atividade de modelagem precisam se apropriar de um problema e definir metas para a resolução; compreender a situação-problema por meio da Matemática implica em procurar respostas para o problema suscitado por esta situação;
> b) a um processo investigativo. Este processo remete ao ato de investigar; 'investigar', (...) significa 'seguir os vestígios', 'fazer diligências para achar', 'pesquisar'; ações como buscar informações, identificar e selecionar variáveis, definir hipóteses, fazer simplificações, constituem, portanto, elementos desse processo e requerem uma interpretação adequada e certo grau de intuição para superar a "falta de compreensão" (...);
> c) a busca por uma representação matemática (ou modelo matemático): geralmente, a situação-problema se apresenta em linguagem natural, e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática; gera-se assim a necessidade da transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática); esta linguagem matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido; a busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente estas características; (...);
> d) a análise de uma resposta para o problema: a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica em uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação;
> e) a comunicação de resultados para outros: esta comunicação implica essencialmente em desenvolver uma argumentação que possa convencer aos próprios modeladores e àqueles aos quais estes resultados são acessíveis que a solução apresentada é razoável e é consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática e dos artefatos matemáticos a ela associados quanto da adequação desta representação para a situação em estudo (Almeida e Ferruzzi, 2009, p. 121).

2.3 A interação em atividades de Modelagem Matemática: o que revelam alguns pesquisadores

Os encontros (interações entre alunos e entre professor/alunos) que ocorrem em atividades de Modelagem Matemática em sala de aula têm sido pontuados, por diversos pesquisadores, como determinantes para a aprendizagem.

Fox (2006), por exemplo, considera que, sendo nas atividades de Modelagem projetadas para serem desenvolvidas em pequenos grupos, os alunos desenvolvem e compartilham conceitos, explicações, justificativas e representações matemáticas, e deste modo estas atividades oportunizam a colaboração social e o desenvolvimento de habilidades de comunicação, e neste sentido o autor pondera que a Modelagem Matemática pode ser caracterizada como uma experiência social. O autor considera ainda que em atividades de Modelagem Matemática as pessoas discutem, debatem, aperfeiçoam suas idéias, ouvem e colaboraram com seus pares e, quando apresentam o modelo final para os colegas, comunicam suas idéias matemáticas e deste modo ocorrem oportunidades para o questionamento crítico e a justificação. Para o autor, enquanto os indivíduos trabalham interativamente em atividades de modelagem, comunicam seu pensamento e geram idéias significativas e processos matemáticos (Fox, 2006).

No mesmo sentido Araújo e Salvador (2001), com base na análise de um trabalho desenvolvido por uma aluna, consideram que a natureza de encontros entre professor e aluno foi um traço determinante para o sucesso da atividade, considerando ainda que esta interação tem relações com a aprendizagem dos estudantes.

Já Zbiek e Conner (2006) afirmam que os estudantes aprendem quando trabalham em interação em um contexto de Modelagem Matemática. Para as autoras, a reflexão que o indivíduo faz quando está se comunicando com os outros conduz o indivíduo a modificar ou justificar seu procedimento e seu entendimento do conceito matemático por ele utilizado.

Observamos que estas idéias convergem para a perspectiva de Vygotsky (1993[a]) para quem o conhecimento é construído "na" e "pela" interação. Os estilos de argumentação, as ferramentas empregadas e a forma como o conhecimento pode ser construído por meio destas interações, trazem contribuições para a formação do aluno.

Barbosa (2008, 2007, 2006[a], 2006[b]) também tem se preocupado com as práticas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática, investigando as discussões que ocorrem nos 'espaços de interação'. Este pesquisador classifica estas discussões em discussões matemáticas, técnicas, reflexivas e paralelas[3], e argumenta que, de acordo com a perspectiva do professor e o propósito da modelagem, um tipo de discussão pode ser privilegiado, entretanto, a presença de um tipo não inviabiliza a presença de outros.

Ainda que as argumentações dos autores que apresentamos sinalizem a ocorrência de interações em atividades de Modelagem Matemática, consideramos que algumas interações são mais propícias para o aprendizado do que outras. Neste sentido procuramos nosso embasamento teórico em pesquisas que nos apontem características de interações com grande potencial para a aprendizagem.

Dentre os diversos pesquisadores que tratam da interação em sala de aula nos reportamos à Mortimer e Scott (2002) e Mortimer et.al. (2007) que caracterizam tipos de interações que podem ocorrer em sala de aula e suas influências para a aprendizagem. Estes autores tratam da 'abordagem comunicativa' que fornece uma perspectiva sobre o modo como "*o professor trabalha as intenções e o conteúdo do ensino por meio das diferentes intervenções pedagógicas que resultam em diferentes padrões de interação*" (Mortimer e Scott, 2002, p. 287). Outro aspecto levantado por estes autores são as características de cada tipo de interação.

2.4 A abordagem comunicativa

Mortimer e Scott (2002) identificam quatro classes de 'abordagens comunicativas', definidas de acordo com a caracterização do discurso produzido entre professor e alunos e entre os alunos. Estas quatro classes i) interativo/dialógico; ii) não-interativo/dialógico; iii) interativo/de autoridade e iv) não-interativo/de autoridade, estão relacionadas com o papel do professor enquanto condutor e organizador do discurso em sala de aula. Estas classes foram definidas em termos de duas dimensões: discurso 'dialógico/de autoridade' e discurso 'interativo/não interativo'.

A dimensão 'discurso dialógico e discurso de autoridade' diz respeito à adequação da comunicação entre professor e alunos (ou entre alunos) a dois extremos de um continuum: dialógico/de autoridade. Quando o professor considera as concepções do estudante, levando em consideração seus pontos de vista, a comunicação constitui uma abordagem dialógica. Deste modo mais de uma 'voz' é considerada e existe uma inter-animação de idéias. Já no segundo extremo deste continuum tem-se uma abordagem comunicativa de autoridade na qual "*o professor considera o que o estudante tem a dizer apenas do ponto de vista do discurso científico escolar* (...)" (Mortimer e Scott, 2002, p. 287). Deste modo, apenas uma "voz" é ouvida e não existe inter-animação de idéias. Segundo os autores o que torna o discurso dialógico "*é o fato de que ele expressa mais de um ponto de vista - mais de uma 'voz' é ouvida e considerada - e não que ele seja produzido por um grupo de pessoas ou por um indivíduo solitário*" (Ibid, 2002, p. 287).

A dimensão da abordagem comunicativa que considera o continuum 'discurso interativo e não-interativo', diz respeito exatamente a esse fato, ou seja, ser produzida por um grupo de pessoas ou por um só indivíduo. O discurso interativo é caracterizado por ocorrer com a participação de mais de uma pessoa, que chamamos neste artigo de 'interações', e o discurso não-interativo ocorre com a participação de uma única pessoa (um discurso individual). Assim, quando existe alternância nos turnos das falas, o discurso é considerado interativo, caso contrário, quando

[3] Ver Barbosa (2008).

não há esta alternância, o discurso é considerado não interativo.

Mortimer e Scott (2002) consideram ainda aconselhável a existência em sala de aula da variação de abordagens comunicativas, trabalhando-se tanto na dimensão dialógica/de autoridade como a interativa/não interativa. Entretanto, para estes autores

> Se o objetivo do ensino é fazer com que os estudantes desenvolvam um entendimento do tópico em estudo, esses estudantes devem engajar-se em **atividades dialógicas**, seja de forma interativa ou não- interativa: participando de, ou escutando a, uma interação dialógica entre o professor e a classe; discutindo idéias com seus colegas em pequenos grupos; pensando sobre as idéias. (Mortimer e Scott, 2002, p.302, grifo nosso).

Como o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática ocorre em pequenos grupos, consideramos que o discurso interativo, ou seja, as interações, ocorrem, e neste sentido, nosso interesse está voltado em identificar, em atividades de Modelagem Matemática, discursos interativos dialógicos.

Outro aspecto determinante da comunicação entre professor e aluno e entre alunos são os 'padrões de interação', característicos dos discursos interativos. Mortimer e Scott (2002) e Mortimer et al. (2007) apresentam alguns padrões de interação que podem ocorrer na medida em que "*professor e alunos alternam turnos de fala na sala de aula*" (Mortimer e Scott, 2002, p. 288). Estes padrões dizem respeito a uma abordagem comunicativa em que o discurso é interativo pois pressupõe uma 'alternância de turnos de falas'. Neste sentido pertence ao que consideramos uma interação.

Segundo Mortimer e Scott (2002) e Mortimer et al. (2007), o padrão de interação mais comum em sala de aula é a tríade I-R-A em que o professor faz uma iniciação, o aluno responde e em seguida o professor faz uma avaliação.

Entretanto, outros padrões podem ser observados em sala de aula, por exemplo, padrões não triádicos do tipo: I-R-F-R-F...ou I-R-P-R-P... em que F significa um *feedback* do professor para que o aluno elabore mais sua fala e P corresponde a uma fala do professor com o objetivo de sustentar o discurso do aluno e fazer com que este prossiga sua fala. Tanto o *feedback* quanto o *prosseguimento* são enunciados que requerem do 'outro' uma elaboração adicional, originando cadeias de interações.

Alro e Skovsmose (2006) consideram o padrão triádico I-R-A (iniciação, resposta, avaliação) como um padrão de comunicação (padrão de interação nos termos de Mortimer e Scott, 2002) que enfatiza a autoridade em sala de aula. Para estes autores, devido à repetição destas ações (I-R-A; I-R-A;... I-R-A), onde uma resposta correta origina novas questões formuladas pelo professor, a experiência do aluno torna-se fragmentada, impossibilitando a formação de uma imagem do propósito geral da atividade, e neste caso, o aluno não assume qualquer responsabilidade pelo seu aprendizado.

Mortimer et al. (2007) defendem ainda que o tipo de questão (iniciação) formulada pelo professor (ou pelo aluno) possui influência na natureza das respostas e no potencial para gerar cadeias de interações por meio de prosseguimento (P) ou *feedback* (F) do professor. Para estes autores, uma questão que demanda uma escolha tende a obter respostas curtas constituídas por uma única palavra, sendo avaliada pelo professor, gerando padrões do tipo I-R-A. O mesmo acontece com questões de produto, tipo: '*qual* é o resultado da multiplicação?'.

Em contrapartida, iniciações que necessitam de explicações ou descrições (questões do tipo processo ou meta processo) tendem a gerar cadeias de interações.

De acordo com Mortimer et. al. (2007) cadeias abertas caracterizam um discurso interativo e dialógico, sendo importantes para a estabilização do conhecimento do aluno. Fanizzi (2008) também destaca que este tipo de cadeia é a mais indicada para alcançar êxito na aprendizagem.

Em relação ao estabelecimento de cadeias abertas, Ferreira e Lorencini Jr (2005, p.02) atribuem importância à atitude do professor no desenvolvimento do indivíduo e na mediação entre aluno e conhecimento, quando entendem que a aprendizagem do aluno depende, entre outros fatores, de como é orientado nas interações em sala de aula, "[...] afim de que possam existir situações onde se formule perguntas e respostas que sustentem o seu interesse e motivação no decorrer do processo cognitivo".

Deste modo, entendemos ser imprescindível o papel do professor (ou de um colega em interação) formulando questões adequadas que gerem respostas além de respostas do tipo escolha ou produto, gerando argumentações e explicações por parte dos envolvidos.

Nosso interesse nos tipos de iniciação, respostas e categorias reside no fato de que, o tipo de iniciação influencia a natureza das respostas. Deste modo, dependendo da iniciação do professor pode-se gerar respostas que podem contribuir para o desenvolvimento de padrões não-triádicos, que são, como vimos, nas argumentações de Mortimer et.al. (2007) e Fanizzi (2008), geradores de aprendizagem.

Considerando que a comunicação entre alunos e professor (ou entre alunos) pode ser interativa ou não-interativa, e, sendo interativa pode assumir diversos padrões de interação em sala de aula (Mortimer e Scott, 2002; Mortimer et al., 2007), que revelam um discurso dialógico ou de autoridade, nossa pesquisa caminhou no sentido de identificar, em atividades de modelagem matemática, padrões de interação que nos subsidie para inferir a presença ou não de discursos dialógicos, visto que os mesmos, de acordo com nosso referencial teórico, são os que mais contribuem para a aprendizagem.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.1 O contexto da pesquisa

Para este estudo estabelecemos como foco de análise atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por um grupo de alunos matriculados na disciplina *Matemática 2*, no segundo ano do curso de Engenharia Ambiental de uma Universidade Tecnológica Federal. Para o desenvolvimento das atividades a turma (composta por 14 alunos) foi dividida em quatro grupos.

A escolha pelo Curso de Engenharia Ambiental deu-se pelo fato de que entre as atividades que podem ser desenvolvidas pelo engenheiro ambiental estão: Analisar riscos ambientais; Avaliar, planejar e desenvolver tecnologias alternativas para a utilização de mananciais, reservas minerais e florestais de modo a promover o desenvolvimento de forma equilibrada; Tomar decisões baseadas em análises de viabilidade operacional/econômica/social objetivando o menor impacto possível sobre o meio ambiente; Avaliar e integrar as atividades da engenharia no contexto social e ambiental.

Além disto este curso prevê a realização do Trabalho de Conclusão de Curso, que deve abranger conhecimentos específicos de Engenharia Ambiental, no qual o estudante exercitará a capacidade de resolver problemas, de trabalhar em equipe e de comunicar-se.

Esta configuração para o futuro Engenheiro Ambiental requer do aluno a realização de atividades que lhes permita solucionar problemas, trabalhar em equipe, comunicar-se adequadamente, perceber e compreender o papel da matemática na solução de problemas tanto ambientais quanto sociais, desenvolver um pensamento crítico em relação à confiabilidade dos resultados matemáticos , com vistas ao bem estar do indivíduo e a conservação da natureza, etc. Neste sentido, a participação deste estudante em atividades de Modelagem Matemática no decorrer do curso, entendendo a situação-problema, construindo hipóteses, realizando simplificações, elaborando modelos e validando-os, bem como a participação em atividades interativas, poderá contribuir para seu sucesso tanto acadêmico quanto profissional.

Tendo em vista a importância da disciplina de Matemática 2 para o futuro Engenheiro Ambiental, bem como o fato da pesquisadora ser professora desta disciplina no semestre em que iniciou-se a coleta de dados para a pesquisa, a mesma foi realizada com 14 alunos matriculados na referida disciplina. Esta escolha proporcionou fácil acesso aos participantes em encontros regulares.

3.2 A professora da turma

Licenciada em Matemática, a professora desta turma (também pesquisadora) atua no ensino superior e médio desde 1990. Em sua trajetória acadêmica investigou a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia em sua dissertação de mestrado. Desde então vem desenvolvendo com seus alunos atividades de modelagem matemática e paralelamente investigando diversos aspectos referentes ao desenvolvimento destas atividades e a aprendizagem dos alunos.

O interesse em investigar as interações foi sendo consolidado por meio de leituras e discussões no Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), tendo em vista as reflexões de diversos pesquisadores e teóricos como apresentado na introdução e ítens anteriores.

3.3 O Encaminhamento

Para o desenvolvimento das atividades e, considerando que o trabalho em grupo é "de fundamental importância devido às possibilidades dos alunos exteriorizarem idéias, confrontarem opiniões e discutirem as estratégias e os resultados" (Vertuan, 2007, p. 52), os 14 alunos foram divididos em quatro grupos, ficando assim constituídos: **Grupo 1:** alunos A1, A2, A3 e A4; **Grupo 2:** alunos A5, A6 e A7; **Grupo 3:** alunos A8, A9 e A10 e **Grupo 4:** alunos A11, A12, A13 e A14. A divisão dos grupos foi realizada pelos próprios alunos, de acordo com suas preferências, não tendo interferência da professora/pesquisadora.

Este grupo de alunos cursava o terceiro período de Engenharia Ambiental com idade variando de 18 a 20 anos, todos cursando pela primeira vez a disciplina de Matemática 2 e sem experiência com atividades de Modelagem Matemática.

Durante a pesquisa foram desenvolvidas oito atividades, sendo as duas primeiras comum a todos os grupos, a terceira, quarta, quinta e sexta desenvolvidas pelos grupos 1, 2 3 e 4 respectivamente, a sétima desenvolvida pelos grupos 3 e 4 e a oitava pelos grupos 2 e 4.

Com vistas a não deixar o texto longo e cansativo, neste artigo apresentamos e analisamos apenas a Atividade 3 desenvolvida pelo Grupo 1 (Alunos A1, A2, A3, e A4).

3.4 A coleta dos dados

Para realização desta pesquisa os dados foram obtidos por meio de quatro instrumentos de coleta: filmadora, gravadores, material produzido pelos alunos, notas de campo elaboradas pela professora/pesquisadora.

A atividade que aqui descrevemos foi desenvolvida parte em horário de aula regular parte fora deste horário. Durante todo desenvolvimento um gravador de voz foi deixado com o grupo, inclusive para que gravassem os encontros que aconteceram fora da sala de aula, sem a presença da professora. As atividades realizadas fora do horário normal das aulas, em que o grupo compareceu em horários diferenciados dos demais também filmadas em vídeo.

O material produzido pelos alunos -– anotações durante o desenvolvimento das atividades e relatório final das atividades- também fez parte do material de análise e foram utilizados como mais uma fonte de análise sendo possível contrastar as falas observadas pela pesquisadora e anotadas no diário de campo, como também as falas registradas em vídeo e áudio com o que foi registrado pelos alunos. Por meio da análise destes documentos foi possível a compreensão do que o aluno estava falando, pois muitas vezes, algumas expressões do tipo "isso aqui" eram utilizadas, e suas anotações, riscos e rabiscos nos auxiliaram a compreender a que estavam se referindo.

3.5 A condução das análises

O discurso entre professor e alunos, ou entre alunos, pode ser caracterizado em termos de discurso interativo ou não-interativo. O discurso interativo é caracterizado por Mortimer e Scott (2002) como sendo aquele produzido por mais de um indivíduo. Apesar de ocorrerem, em sala de aula, discursos não-interativos, o foco desta pesquisa está nos discursos interativos, discursos estes que denominamos ‘**interações**’. Deste modo, nossa análise tem como foco estas interações.

As análises dos dados são realizadas frente ao nosso objetivo que consiste em identificar características das interações que nos levam a inferir que determinada interação é ou não dialógica, levando em consideração o referencial teórico apresentado.

Os dados que subsidiam a analise constam das anotações realizadas pela professora durante o desenvolvimento das atividades, das entrevistas realizadas com os alunos, das anotações realizadas pelos alunos durante a atividade e principalmente das gravações das interações.

Para efetuar as análises, transcrevemos as gravações (de áudio e vídeo) de interações que apresentavam subsídios para nossa pesquisa e comparamos com as notas de campo com o intuito de acrescentar algo que não foi observado nas gravações. As imagens e sons obtidos foram ainda comparados com o material escrito pelos alunos, de modo que conseguimos observar suas maneiras de agir, de se comportar diante de uma explicação do colega, diante de suas próprias explicações, e suas maneiras de chegar a alguma conclusão ou idéia.

A situação-problema tratada por este grupo diz respeito à análise do crescimento da área de cultivo de soja no Brasil.

4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE INTERAÇÕES ESTABELECIDAS NO DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM EM SALA DE AULA

Para apresentar as análises das atividades que subsidiam nossa argumentação, inicialmente descrevemos a situação-problema e a solução encontrada por este grupo de alunos e em seguida apresentamos as ações dos alunos no desenvolvimento desta situação-problema, as interações estabelecidas e suas análises.

4.1 A situação-problema e a solução apresentada por este grupo

Tema: Plantio de soja: tendência de área de cultivo.

Problema de estudo

Análise do crescimento da área de cultivo de soja no Brasil.

Variáveis: *t:* tempo (em anos); *y(t):* área de cultivo de soja em relação ao tempo, (em hectares (ha)).

Dados: A Tabela 1 apresenta os dados obtidos pelos alunos no site da EMBRAPA (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária) referentes à área relativa ao cultivo de soja no Brasil entre os anos de 1941 e 2007. A Figura 1 apresenta a curva de tendência destes dados. Tanto a Tabela 1 quanto o gráfico representado na Figura 1 foram construídos pelo grupo utilizando uma planilha de cálculo.

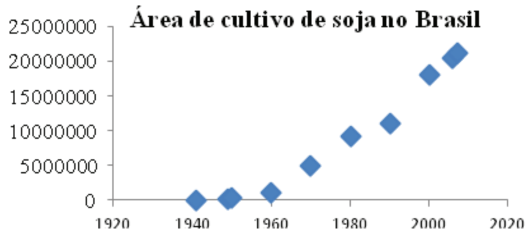


Figura 1 Área de cultivo de soja no Brasil em relação ao tempo

Tabela 1 Dados referentes á área de cultivo de soja no Brasil

Anos	Área (ha)
1941	36000
1949	143000
1950	300000
1960	1000000
1970	5000000
1980	9200000
1990	11000000
2000	18000000
2006	20500000
2007	21200000

Fonte: EMBRAPA

Outros dados, também obtidos pelos alunos, considerados relevantes pelo Grupo são: Área total do Paraná: aproximadamente 19.300.000 ha; Área total do sul do Brasil (Paraná, Santa Catarina e Rio grande do Sul): aproximadamente 57.677.000 ha; Área total cultivável no Brasil: 384.000.000 ha.

Hipóteses para o problema

Com base no conhecimento relativo à situação, o grupo definiu as seguintes hipóteses:

H_1: a área de cultivo de soja no Brasil é limitada;

H_2: o crescimento da área cultivável pode ser descrito por um modelo assintótico.

Estas hipóteses foram definidas pelo grupo durante o desenvolvimento da atividade, após a coleta dos dados e o estudo da curva de tendência destes dados.

O encaminhamento

Nesta atividade o grupo optou por investigar algumas possibilidades, que chamaremos de “Opções”, considerando diferentes valores para a área máxima cultivável.

Na primeira opção (O1) o grupo considera que a área máxima destinada ao cultivo de soja no Brasil é equivalente à área do sul do país (Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul), 57 677 000 ha; na segunda opção (O2) consideram que o limite máximo para cultivo é uma área aproximada à área do Paraná, 25 000 000 ha; na terceira opção (O3) consideram que o limite máximo para área de cultivo de soja no Brasil é 25 000 000 ha e o intervalo de tempo considerado é de 1980 à 2007.

Modelo Matemático associado às hipóteses

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right).y \qquad (01)$$

Soluções encontradas com a determinação dos parâmetros do modelo

Para O1 :

$$y(t) - \frac{20,76372 * 10^{12}}{36000 + (57641000)e^{-0,095t+185,1}}$$

Para O2:

$$y(t) = \frac{25000000 * 36000}{36000 + (24964000)e^{-0,116t+224,4}}$$

Para O3 :

$$y(t) = \frac{25000000 * 9200000}{9200000 + (15800000)e^{-0,0871t+172,65}}$$

4.2 As ações dos alunos no desenvolvimento da situação-problema, as interações estabelecidas e suas análises

Neste item descrevemos algumas ações dos alunos no desenvolvimento da situação-problema e analisamos algumas interações estabelecidas entre os alunos e entre estes e a professora. Utilizamos o termo '*Episódio*' para descrever estas interações, sendo que as falas dos envolvidos estão redigidas em itálico, diferenciando das considerações redigidas pela pesquisadora e que estão entre parênteses e sem itálico.

A "origem" desta atividade deu-se pela leitura de um texto sobre a situação atual e as perspectivas da produção de alimentos e agroenergia no Brasil, com ênfase na soja. Após a leitura o grupo discutiu com a professora o interesse em pesquisar o crescimento da área de cultivo no Brasil, visando à produção de biocombustível.

Este interesse adveio da importância atribuída por este grupo a fatores que podem degradar o meio ambiente, como por exemplo, os agrotóxicos, aliado à preocupação com o desmatamento ocasionado pelo aumento de área destinada ao cultivo. A professora não forneceu dados ou informações aos alunos, sendo estes responsáveis por toda a pesquisa. O *Episódio* 1 relata a interação entre os alunos e a professora na determinação da situação-problema a ser investigada.

Episódio 1

1. ***A2:*** *prof...este texto fala do crescimento na área de cultivo destinado à produção de biocombustível.*
2. ***Prof:*** *tá crescendo? Isso é bom né?.*
3. ***A3:*** *depende... desse jeito daqui a pouco não vamos ter mais comida... tá tudo indo pro combustível...*
4. ***Prof:*** *como assim? Me falem o que vocês sabem sobre o biocombustível.*
5. ***A1:*** *ah... é o combustível feito de milho, soja, cana-de-açúcar, mamona, mandioca....*
6. ***A3:*** *por isso que falei que vai faltar comida...*
7. ***A2:*** *também tem biocombustível feito de lixo orgânico...*
8. ***A1:*** *é feito prá usar nos carros, pode ser misturado com a gasolina.*
9. ***Prof:*** *entendi... e vocês sabem qual a vantagem de usar o biocombustível?*
10. ***A4:*** *ah.. é a redução de gases poluentes e também é bom porque é renovável enquanto a gasolina não é.*
11. ***A2:*** *prof, tem ônibus em Curitiba que usa biocombustível e eu li que já foi provado que reduziu bastante a poluição.*
12. ***Prof.*** *E porque vocês estão preocupados com o crescimento da área de cultivo destinada ao biocombustível?*
13. ***A1:*** *porque está diminuindo a porcentagem destinada aos alimentos e aumentando a porcentagem para o biocombustível.*
14. ***A3:*** *e se continuar assim, vai faltar comida...*
15. ***Prof:*** *ah.. mas tem muita terra para plantar né? Acho que não vai faltar...*
16. ***A2:*** *mas essa terra tem que ser dividida...pra pasto, pra agricultura... porque senão tem uma coisa e falta outra...*
17. ***A1:*** *e tem mais professora... olha só... se aumenta o cultivo de biocombustível, vai ter que aumentar a área para cultivo de alimentos também, prá não faltar, aí vai ter mais desmatamento e também mais agrotóxicos no solo...*
18. ***Prof:*** *tem razão. As coisas devem ser balanceadas. Mas o que vocês estão pensando em pesquisar em relação à isso?*
19. ***A1:*** *primeiro a gente pensou em estudar o crescimento da área cultivada no Brasil que fosse destinada apenas para biocombustível, mas agora a gente tá pensando em ver a área de cultivo de soja apenas.*
20. ***Prof:*** *a área de cultivo de soja destinada à produção de biocombustível?*
21. ***A1:*** *não...primeiro queremos ver toda a área de cultivo e depois a gente pensou em estudar a porcentagem desta área destinada ao biocombustível.*
22. ***A2:*** *mas aí vai ser outro trabalho tá prof?*
23. ***Prof:*** *ok. Vamos estudar isso então. O que temos de dados?*
24. ***A1:*** *temos alguns dados aqui no artigo mas vamos procurar mais...*
25. ***A3****: tem no site do EMBRAPA.*
26. ***Prof:*** *ok. Vejam os dados que temos e depois conversamos, ok?*

O interesse demonstrado pela professora e suas falas de prosseguimento (turnos 4, 12, 15 e 20)[4] conduzem os alunos ao engajamento, participando da discussão com argumentos, pontos de vista, conhecimento cotidianos e conhecimentos científicos[5]. Observa-se que os turnos 3, 6 e 14 (3- *depende... desse jeito daqui a pouco não vamos ter mais comida... tá tudo indo pro combustível…6- por isso que falei que vai faltar comida…; 14- e se continuar assim, vai faltar comida)* apresentam um ponto de vista específico do aluno A3, preocupado com a possível falta de alimentos, enquanto nos turnos 13 e 17 (13-*porque está diminuindo a porcentagem destinada aos alimentos e aumentando a porcentagem para o biocombustível...; 17- e tem mais professora... olha só... se aumenta o cultivo de biocombustível, vai ter que aumentar a área para cultivo de alimentos também, prá não faltar, aí vai ter mais desmatamento e também mais agrotóxicos no solo...*) os alunos apresentam argumentos que sustentam sua preocupação em investigar a situação-problema.

---

[4] Os turnos indicam as falas numeradas em cada Episódio.

[5] Para mais detalhes sobre Conhecimentos cotidianos e científicos ver Vygotsky, 2007

Recepción:24/10/2011 *Aceptación: 16/04/2012*

Nos turnos 5 (*ah... é o combustível feito de milho, soja, cana-de-açúcar, mamona, mandioca...*), 7 (*também tem biocombustível feito de lixo orgánico...*) e 16 (*mas essa terra tem que ser dividida...pra pasto, pra agricultura... porque senão tem uma coisa e falta outra...*) observa-se a participação dos alunos com conhecimentos que podem ser considerados cotidianos, enquanto os turnos 8 e 10 podem ser classificados tanto como conhecimentos cotidianos quanto científicos.

A atitude da professora procurando dar voz aos alunos faz com que sintam que sua participação é importante para o desenvolvimento da atividade, para o entendimento dos colegas e para a aprendizagem de todos. Este fato nos sugere que a professora possui grande influência na configuração da interação.

Uma vez que a professora procura ouvir as idéias dos alunos (turnos 4,9 e12) e aceita seus argumentos (turno 18), não direcionando suas perguntas de modo a chegar a um ponto de vista pré-determinado por ela, consideramos, com base em Mortimer e Scott (2002), que esta interação está mais próxima do extremo *dialógico* no continuum *dialógico/de autoridade*.

Além disto, como apresentado na sequência, o padrão de interação que se estabelece constitui um padrão não-triádico gerado a partir de prosseguimentos da professora, padrão este que caracteriza uma interação dialógica, como argumentado por Mortimer et.al. (2007) e Fanizzi (2008). O primeiro sub-episódio que apresenta um padrão de interação é compreendido pelos turnos 2 à 9, terminando com uma avaliação da professora (*entendi...)*. Observamos que o prosseguimento da professora no turno 4 (*como assim? Me falem o que vocês sabe sobre o biocombustível*) é o responsável pela geração da cadeia apresentada na Tabela 2.

Tabela 2 Sub-episódio 1: turnos 2 à 9

Turno	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Tipo de interação[6]	I_T	R	P_T	R	R	R	R	A_T

O segundo sub-episódio que apresenta um padrão de interação compreende os turnos 9 à 18, como apresentado na Tabela 3. Neste observamos o prosseguimento da professora no turno 12 (e *porque vocês estão preocupados com o crescimento da área de cultivo destinada ao biocombustível?)* incentivando os alunos a continuarem com suas argumentações (turnos 13 e 17), assim como nos turnos 15 (*ah.. mas tem muita terra para plantar né? Acho que não vai faltar...)* conduzindo os alunos a se posicionarem nos turnos 16 e 17.

Tabela 3 Sub-episódio 2: turnos 9 à 17

Turno	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Tipo de interação	I_T	R	R	P_T	R	R	P_T	R	R

O restante do *Episódio* também apresenta uma cadeia de interação com iniciação da professora na segunda parte do turno 18 (*Mas o que vocês estão pensando em pesquisar em relação à isso?*) seguida de respostas dos alunos e prosseguimentos da professora como mostra a Tabela 4.

Tabela 4 Sub-episódio 3: turnos 18 à 26

Turno	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
Tipo de interação	A_T / I	R	P_T	R	R	A/I	R	R	A_T

Observamos que nesta interação a professora tem a clara intenção de explorar as idéias dos alunos quanto ao tema e problema em questão levando os alunos a participarem com seus argumentos, pontos de vista e conhecimentos. Com base em Mortimer e Scott (2002) que afirmam que quando o professor considera as concepções do estudante, levando em consideração seus pontos de vista, a comunicação constitui uma abordagem dialógica, consideramos este *Episódio 1* uma interação dialógica.

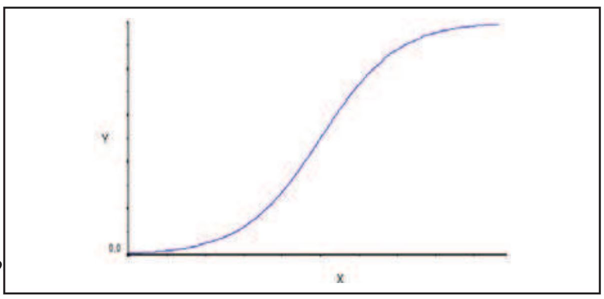
Na sequência, a partir da orientação da professora para que busquem dados quantitativos sobre o problema (turno 26 do *Episódio 1:* ok. *Vejam os dados que temos e depois conversamos, ok?*), no encontro seguinte o grupo apresentou à professora os dados referentes à área de cultivo de soja no Brasil (Tabela 1) e a tendência destes dados (Figura 1).

Apesar da tendência apresentada na Figura 1 sugerir um modelo exponencial, o grupo, com base no conhecimento da situação, argumenta que a mesma não pode ser modelada por uma função exponencial, visto que possui um limite máximo para o cultivo de soja. Com este argumento, o grupo define as hipóteses H_1: a área de cultivo de soja no Brasil é limitada e H_2: o crescimento da área cultivável pode ser descrito por um modelo assintótico. Esta definição foi elaborada em interação conforme sugerem os *episódios* 2 e 3.

Episódio 2

1. ***A1****: olha, parece uma função exponencial né*? (apontando para a tendência dos dados da Figura 2)
2. ***A3****: parece...*
3. ***A2****: mas não pode ser.*
4. ***A3****: Por que?*
5. ***A2****: porque não pode crescer infinitamente.*
6. ***A3****: como?*
7. ***A2****: ah... é área cultivada... o Brasil tem um limite de área que pode ser cultivada, então não pode crescer sem fim como faz a exponencial.*
8. ***A3****: hum.*
9. ***A1****: é.. quando chegar em um ponto vai parar. Mas não vai parar assim... parar de crescer...*
10. ***A2****: tem uma função...ela é assim ó...*(A2 faz um esboço de uma função logística). *Péra aí... vou ver*

Neste momento A2 busca em um livro o modelo que estava se referindo e apresenta aos colegas um gráfico como apresentado da Figura 2.



[6] I= iniciação; R=resposta; P= prosseguimento; A=avaliação e S= síntese. O índice T significa fala do professor.

Figura 2 Esboço de um gráfico de uma curva logística

A interação apresentada no *Episódio 2* mostra A1 iniciando a conversa com um convite aos colegas no sentido de analisar a tendência dos dados (*olha, parece uma função exponencial né?*). Na sequencia, no turno 3, o aluno A2, com base em seu conhecimento da situação, afirma não concordar com a hipótese de A1: *(mas não pode ser...)* e oferece argumentos para seu raciocínio no turno 5: (*porque não pode crescer infinitamente)* e no turno 7 (*ah... é área cultivada... o Brasil tem um limite de área que pode ser cultivada, então não pode crescer sem fim como faz a exponencial).*

Esta interação constitui uma interação dialógica visto que os alunos emitem suas opiniões e argumentos, discutem idéias e consideram diferentes pontos de vista, conforme caracterizam Mortimer e Scott (2002). Nos turnos 4 e 6 o aluno A3 elabora falas caracterizadas como prosseguimentos uma vez que suas questões (*por quê? como?)* foram feitas no sentido de solicitar que A2 elabore melhor seu argumento. Estas falas de prosseguimento geram uma cadeia de interação como apresentada na Tabela 5.

Tabela 5 Episódio 2

Turno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tipo de interação	I	R	R	P	R	P	R	A	P	P

Após a definição da situação-problema a ser investigada (*Episódio 1*) os alunos buscam informações quantitativas sobre a situação (dados apresentados na Tabela 1 e Figura 1), simplificam o problema (tratar em um primeiro momento apenas da área destinada ao cultivo da Soja) e mais uma vez analisam a situação como um todo (*Episódio 2*), elaborando hipóteses condizentes com a mesma, apesar da tendência dos dados não indicar esta hipótese de imediato. Deste modo, percebemos o aspecto investigativo da Modelagem Matemática no desenvolvimento desta situação-problema.

Considerando as ações dos alunos envolvidos em uma atividade de modelagem, a matematização realizada conduz a um problema matemático que, neste caso, diz respeito também à busca da solução a partir da escolha de um modelo. Esta discussão dos alunos é sinalizada pelas interações do *Episódio 3*.

Episódio 3

1. ***A1****: Professora... olha.. colocamos os dados em um gráfico.. parece uma função exponencial... mas não é.*.(mostrando o gráfico da Figura 2).
2. ***A2:*** *parece que ela tá crescendo indefinidamente.. mas não pode ser...tem que ter limite... tem limite de área...*
3. ***Prof****: ... tem um limite?*
4. ***A1****: tem.. a área cultivável.... então.. lembro de uma função assim ó... (*faz um esboço de uma função logística ao mesmo tempo em que A2 mostra um gráfico como o apresentado na Figura 3*).*
5. ***Prof:*** *ótimo.. já que chegaram a esta conclusão determinem o modelo....*
6. ***A1****: é... mas não sabemos* (risos)
7. ***A2****: eu até encontrei uma função deste tipo, mas não sei o que significa cada variável...cada constante...*
8. ***Prof:*** *Que função é essa? Vocês sabem?*
9. ***A2****: tá aqui ó: modelo logístico* (mostrando a definição no livro). *É este modelo* [mostrando a Equação Diferencial $\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right).y$ *][7].*
10. ***Prof****: ok. Este modelo representa bem uma sequência que possui um limite máximo e um ponto de inflexão. É uma Equação Diferencial né?*
11. ***A2:*** *é*
12. ***Prof****: então... agora é só resolvermos esta Equação Diferencial.*
13. ***A1****: mas prof.... já vimos... não dá prá resolver por separável nem por linear...*
14. ***Prof****: certeza?*
15. ***A1****: ah...*
16. ***A4****: olha A1, e se a gente passar tudo isso aqui dividindo dy?* [mostrando $\left(1 - \frac{y}{k}\right)$].
17. ***A1****: mas sobra o y...*
18. ***A2****: pode passar y também... fica assim ó* [escrevendo $\frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{k}\right).y} = rdt$].
19. ***A1****: ah.. aí dá prá resolver por separável?*
20. ***A2 e A4****: é...dá...*

Neste *Episódio* a intenção dos alunos não foi discutir idéias ou pontos de vista diferentes, e sim, 'informar' a professora da hipótese estabelecida por eles (turnos 1 à 4) e resolver a Equação Diferencial resultante desta hipótese (turnos 12 à 20). A professora por sua vez, orienta os alunos no sentido de encontrarem um método para solucionar o problema em questão, sendo os conceitos matemáticos o foco desta interação. Por essa razão parece não se configurar aí uma interação dialógica.

Com base na teoria de Vygotsky entendemos ser fundamental que o professor esteja atento ao NDP do aluno. Observamos neste episódio que a professora atua sobre oferecendo algo que vai além do que o aluno consegue realizar sozinho, desafiando-o. O conceito de ZPD de Vygotsky (1993[a]) leva ao entendimento de que em interação o indivíduo consegue realizar mais do que poderia sozinho "*... lo que el niño es capaz de hacer hoy en colaboración será capaz de hacerlo por sí mismo mañana*" (Vygotsky, 1993[a], p. 241). Deste modo, por meio da interação o indivíduo constrói conhecimento em colaboração com o outro e seu Nível de Desenvolvimento Potencial avança, transformando-se em um Nível de Desenvolvimento Real. Ou seja, aquilo que estava em via de desenvolvimento, que o indivíduo "ainda" não era capaz de realizar sozinho, consegue realizar com a ajuda do outro e a partir daí desenvolve seu potencial transformando-se em real, sendo capaz de realizar sozinho. Neste sentido vemos a importância do professor como mediador, auxiliando o indivíduo a alcançar um novo patamar de desenvolvimento.

[7] Este modelo não foi construído pelos alunos e sim, encontrado em um livro de Equações Diferenciais.

Após a interação apresentada no *Episódio 3*, o grupo empenhou-se em resolver a Equação Diferencial $\frac{dy}{dt} = r\left(1-\frac{y}{k}\right).y$, utilizando seus conhecimentos anteriores, elaborando estratégias de resolução e construindo novos conhecimentos que se fizeram necessários. Como mostra a Figura 3 [parte do relatório entregue pelos alunos], o grupo encontrou dificuldades para resolver a Equação Diferencial, necessitando de explicações da professora no sentido de 'recordarem' o procedimento necessário.

Porém, mesmo após a explicação da professora, um dos alunos (A4) demonstrou dificuldades para resolver a Equação Diferencial. O *Episódio 4* mostra o momento desta discussão entre os alunos A4 e A1.

Resolvemos esta equação separando as variáveis e integramos cada uma separadamente

$$\int \frac{dy}{\left(1-\frac{y}{k}\right).y} = \int r dt$$

De um lado da igualdade chegamos a uma integral de tal dificuldade que se torna inviável resolvê-la normalmente. Após o auxílio da professora entendemos que a integração do primeiro membro da igualdade pode ser resolvida por frações parciais. Assim, primeiramente escrevemos a fração da integral do primeiro membro em frações parciais como apresentado abaixo.

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y}{k}\right).y} = \frac{A}{\left(1-\frac{y}{k}\right)} + \frac{B}{y}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y}{k}\right).y} = \frac{Ay + B\left(1-\frac{y}{k}\right)}{\left(1-\frac{y}{k}\right).y}$$

(...) *Agora, resolvendo a igualdade temos B= 1 e A = 1/k. Agora substituímos na função inicial os termos A e B:*

$$\int \frac{\frac{1}{k}}{\left(1-\frac{y}{k}\right)} dy + \int \frac{1}{y} dy = rt + C$$

Figura 3 Recorte do relatório entregue pelos alunos: resolução da Equação Diferencial

Episódio 4

1. **A4:** *nossa... como resolve isso?*
2. **A1:** *então... a 'prof' explicou. Tem que fazer por frações parciais.*
3. **A4:** *mas posso tirar isso da integral?* [referindo-se à expressão $\left(1-\frac{y}{k}\right)$]
4. **A1:** *não.. é uma função de y também, ó... tem y. Não dá prá sair. Não é constante.*
5. **A4:** *e como faz por frações parciais? Não sei.*
6. **A1:** *olha, como aqui é uma multiplicação, significa que é o mínimo múltiplo comum entre duas funções, certo?* [mostrando $\left(1-\frac{y}{k}\right).y$]
7. **A4:** *como?*
8. **A1:** *qual é o mínimo de x e y aqui?* (escrevendo $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$].
9. **A4:** *ah.. tá certo. É x vezes y. Então isso aqui é o mínimo entre* $1-\frac{y}{k}$ e y *né?* (mostrando $\left(1-\frac{y}{k}\right).y$)
10. **A1:** *é.*
11. **A4:** *tá, e daí?*
12. **A1:** *então... quer dizer que isso pode ser escrito na forma de soma de duas frações com esses denominadores.* (mostrando $\frac{dy}{\left(1-\frac{y}{k}\right).y}$ quando pronunciava 'isso' e apontando para $\left(1-\frac{y}{k}\right).y$ quando falou 'esses denominadores'). *Assim ó:* (escreve $\frac{1}{\left(1-\frac{y}{k}\right).y} = \frac{A}{\left(1-\frac{y}{k}\right)} + \frac{B}{y}$).
13. **A4:** *tá. E quem é A e B?*
14. **A1:** *é isso que tem que achar. Tem que achar prá por aí e escrever isso aqui no lugar disso aqui.* [apontando para $\frac{A}{1-\frac{y}{k}}$ e $\frac{B}{y}$ quando pronunciou 'isso aqui' e apontando para $\frac{1}{\left(1-\frac{y}{k}\right).y}$ quando pronunciou 'disso aqui'.

... (a interação continua até A4 resolver a Equação Diferencial).

Na sequência A4 consegue encontrar o valor de A e B assim como os demais membros do grupo.

Mais uma vez observamos nesta interação o papel importante do "outro" atuando no NDP do colega em interação. O aluno A4 atua como mediador entre A3 e o conhecimento.

A interação dos alunos descrita no episódio não gera uma investigação e não visa discutir idéias ou diferentes pontos de vista. O objetivo claro desta interação é fazer com que A4 compreenda como utilizar frações parciais para resolver a Equação Diferencial. Assim, pautado nas caracterizações de Mortimer e Scott (2002), não identificamos esta interação como uma interação dialógica.

Após resolverem a Equação Diferencial e encontrarem $y = \frac{ky_0}{y_0 + (k-y_0)e^{-rt}}$, sendo y_0 = área inicial e k = limite máximo para a área de cultivo, o grupo continua a atividade substituindo os valores de y_0 e k .

Neste momento discutem sobre o limite máximo para a área de cultivo de soja e decidem trabalhar com uma simplificação de dados, a saber, a opção 1: O1- *o limite máximo para área de cultivo de soja no Brasil é de 57 677 000 ha.* Esta definição deu-se pelo fato de considerarem que a área destinada para o cultivo de soja não poderia ser a área total de cultivo do Brasil em virtude da necessidade de outras culturas, e deste modo, estabelecem o limite máximo como sendo uma área próxima à área do sul do Brasil, utilizando $y_0 = 36000$ e $k = 57\,677\,000\,ha$. A Figura 4 apresenta um recorte do relatório entregue por este grupo explicando o estabelecimento desta simplificação.

Agora que encontramos o modelo, basta substituir os valores iniciais, ou seja, $y_0 = 36.000$ hectares e k a área máxima que o ambiente permite.
Entendemos que a área máxima de produção para a Soja não pode ser a área total cultivável no Brasil pois existem outras culturas que devem utilizar parte desta área. Deste modo, resolvemos limitar nossa área de cultivo.
Se y_0 = 36.000 hectares e k e a área máxima que o ambiente permite, vamos supor que a área do sul do Brasil inteira fosse cultivada por soja, logo k = 57.677.000 hectares. Assim, temos $y = \dfrac{57\,677\,000 * 36000}{36000 + (57\,677\,000 - 36000)e^{-rt}}$.
Porém como não temos "r" iremos colocá-lo em termos de

Figura 4- Definição do modelo subjacente à O1

Observamos no recorte do relatório apresentado na Figura 4 que os alunos se referem à determinação de uma função do primeiro grau que estabeleça $-rt$ em função de t. Salientamos que para considerarem esta solução foi necessária a intervenção da professora. Os alunos recorrem à professora argumentando que o modelo apresenta y em função de r e t e que não conhecem o valor de r. Diante disto, a professora apresenta, de forma não interativa, uma estratégia para solucionar este problema.

Após a explicação da professora os alunos estabelecem "$-rt$" em função apenas de t, como mostra o recorte do relatório final apresentado na Figura 5.

$$y = \frac{ky_0}{y_0 + (k - y_0)e^{-rt}}$$
$$y_0 + (k - y_0)e^{-rt} = \frac{ky_0}{y}$$
$$y(k - y_0)e^{-rt} = y_0k - yy_0$$
$$e^{-rt} = \frac{y_0(k - y)}{y(k - y_0)}$$
$$-rt = \ln\left[\left(\frac{y_0(k - y)}{y(k - y_0)}\right)\right]$$

A partir daí montamos uma tabela com valores de tempo e valores encontrados por "$-rt$" (substituindo o y no seu respectivo tempo na função de "$-rt$").

tempo	área	(-rt)
1941	36000	0
1949	143000	-1,38118373
1950	300000	-2,12485412
1960	1000000	-3,34110195
1970	5000000	-5,02372928
1980	9200000	-5,71658416
1990	11000000	-5,93311379
2000	18000000	-6,58806976
2006	20500000	-6,7832041
2007	21200000	-6,83578871

Para escrever $-rt$ como uma função do primeiro grau, podemos utilizar o método dos mínimos quadrados, porém por ferramenta computacional, encontramos a função que

Figura 5 Procedimentos dos alunos para determinar "$-rt$"

Na sequência o grupo substitui a função

$$-rt = -0{,}095t + 185{,}1$$ em

$$y = \frac{57\,677\,000 * 36000}{36000 + (57\,677\,000 - 36000)e^{-rt}}$$ e obtém

$$y(t) = \frac{20{,}76372 * 10^{12}}{36000 + (57641000)e^{-0{,}095t+185{,}1}}.$$

A validação deste modelo está representada na Tabela 6.

Tabela 6 Validação do modelo supondo $y_0 = 36000$ hectares e $k = 57\,6777\,000$

ano	Área	(-rt)	Projeção (y)	erro
1941	36000	0	100916,363	180,32%
1949	143000	-1,38118373	216908,471	51,68%
1950	300000	-2,12485412	238649,758	-20,45%
1960	1000000	-3,34110195	618539,59	-38,15%
1970	5000000	-5,02372928	1586447,1	-68,27%
1980	9200000	-5,71658416	3963745,69	-56,92%
1990	11000000	-5,93311379	9312018,68	-15,35%
2000	18000000	-6,58806976	19285666,5	7,14%
2006	20500000	-6,7832041	27209865,8	32,73%
2007	21200000	-6,83578871	28590945,5	34,86%

A Figura 6 apresenta um recorte do relatório onde os alunos não aceitam o modelo e estabelecem uma nova simplificação, a saber, a opção 2 (O2).

Observamos que os valores encontrados pela modelagem possuem uma diferença muito grande em relação aos dados reais nos anos de 1960 a 1980, além dos dois primeiros pontos. (...). Observando mais uma vez os resultados da projeção, verifica-se que os valores a partir de 1990 possuem uma diferença aceitável, pressuposto que dificilmente encontraríamos uma função que descrevesse exatamente os resultados obtidos na realidade, já que na situação real, existem muitas variáveis que influenciariam no crescimento da área de cultivo da soja. Porém a diferença encontrada ainda se encontra muito alta. Acreditamos que este erro percentual seja proveniente do limite estipulado por nós: 57677000ha ser muito alto uma vez que o último valor observado é 21200000ha. Desta forma reduziremos nosso limite de área a ser atingido, de forma a tentar encontrar menores diferenças na projeção.
(...) reduziremos a área máxima a ser atingida para 25.000.000 hectares, uma área próxima à área do Paraná ... 19.340.000, supondo que a área total de cultivo de soja seja similar à área do Paraná.(...) Veja que, como o limite a ser atingido foi reduzido, nossa função (-rt) também muda. (...). Deste modo, nosso gráfico também se altera, alterando os pontos modelados, diminuindo assim a diferença entre os dados do modelo e os dados reais. (...) Perceba que no início dos pontos ainda existe uma diferença grande, porém com a mudança de máximo, diminuímos a diferença nos últimos pontos.

Figura 6 - Recorte do relatório final: validação do modelo e definição de S2

A Tabela 6 apresenta a validação do modelo utilizando a Opção 2 (O2): $y_0 = 36000$ *ha* e $k = 25000000$ *ha*.

Após esta validação e, considerando que a diferença entre os valores obtidos por meio do modelo e os dados reais continuava grande, o grupo procurou a professora estabelecendo a interação apresentada no *Episódio 5*.

Tabela 6 Validação do modelo supondo $y_0 = 36000$ *hectares e* $k = 25000000$

tempo	área	(-rt)	projeção	erro
1941	36000	0	76546,12	112,63%
1949	143000	-1,3836211	192716,74	34,77%
1950	300000	-2,1308951	216215,1	-27,93%
1960	1000000	-3,3636173	676891,52	-32,31%
1970	5000000	-5,1553768	2038375,6	-59,23%
1980	9200000	-6,0008647	5517158,8	-40,03%
1990	11000000	-6,3005091	11865102	7,86%
2000	18000000	-7,4861327	18559277	3,11%
2006	20500000	-8,0580186	21312449	3,96%
2007	21200000	-8,2606712	21662408	2,18%

Episódio 5

1. ***A1***: *Prof, veja nossa validação* (mostrando a validação apresentada na tabela 8). *Nós tínhamos encontrado o modelo utilizando* k *= 57677000, mas aí achamos que o erro estava grande* (referindo-se ao erro percentual). *Aí diminuímos o limite máximo para 25 000 000ha... mas olha...até 1980 o erro ainda tá grande.*
2. ***A2***: *lembra professora, nós estamos modelando os dados por uma equação logística, apesar dos dados sugerirem uma exponencial.*
3. ***Prof***: *lembro sim. Onde está o maior problema? Onde vocês consideram que o erro está muito grande?*
4. ***A2***: *Ignorando o primeiro valor, o problema maior está antes de 1980, com erro acentuado nos anos de 1970 e 1980. Mas olha, a gente já sabe porque isso acontece.*
5. ***Prof***: *sabem? Por que?*
6. ***A1***: *é que a partir de 1980 as coisas melhoraram para a produção de soja...*
7. ***Prof***: *como assim?*
8. ***A1***: *o processo de cultivo e produção passou por modificações e a utilização de tecnologias ajudou a melhorar o cultivo.*
9. ***Prof:*** *mas como melhorou se o crescimento da área de cultivo de 1980 para 1990 foi menor do que de 1960 para 1970 e de 1970 para 1980??* (mostrando os dados da Tabela 5).
10. ***A1:*** *não é que aumentou a área professora, É que as técnicas de cultivo e colheita melhoraram e isso influenciou o aumento da produção, quer dizer, com a mesma área pode produzir mais entendeu?*
11. ***Prof:*** *ah.. entendi... então este modelo pode ser considerado satisfatório considerando estes fatores?*
12. ***A1:*** *até pode, mas estamos pensando em fazer outro modelo...*
13. ***Prof***: *sério??? E o pretendem agora?*
14. ***A1***: *pensamos em modelar só os últimos pontos.. a partir de 1980...*
15. ***Prof:*** *ok, podem fazer.. acho que vai ser interessante...*

Este episódio apresenta a justificativa dos alunos ao proporem a terceira simplificação: as técnicas de cultivo e colheita passaram por modificações a partir de 1908. Diante disto o grupo decide investigar uma terceira simplificação, a saber, a Opção 3 (O3): *o limite máximo para área de cultivo de soja no Brasil é de 25 000 000 ha e o intervalo de tempo considerado é de 1980 à 2007.* O modelo encontrado nesta simulação é

$$y = \frac{9200000*25000000}{9200000+(15800000)e^{0,0871t+172,65}}.$$

A Tabela 7 apresenta a validação deste modelo, considerada satisfatória pelo grupo.

Tabela 7 Validação do terceiro modelo

tempo	área	(-rt)	projeção	erro
1980	9200000	0	8114479,309	-13,38%
1990	11000000	-0,2996	13362337,72	17,68%
2000	18000000	-1,4853	18321557,37	1,76%
2006	20500000	-2,0572	20556714,49	0,28%
2007	21200000	-2,2598	20866061,99	-1,60%

Tendo observado que, limitando a pesquisa aos últimos anos poderiam obter um modelo satisfatório, o grupo decidiu realizar mais uma aproximação, satisfazendo a curiosidade inicial de que a área total cultivável do Brasil pudesse ser toda utilizada para cultivo de soja. Propuseram então um último modelo considerando o período de 1980 à 2007 e a área total de cultivo no Brasil, ou seja, 384 000 000ha. Deste modo, obtiveram o quarto modelo, cuja validação é apresentada na tabela 8:

$$y = \frac{9200000*384000000}{9200000+(374800000)e^{0,0341t+67,62}}.$$

Tabela 8 -Validação do quarto modelo

ano	área	(-rt)	projeção	erro
1980	9200000	0	6858114	-0,255
1990	11000000	-0,184	9566106	-0,13
2000	18000000	-0,695	13305651	-0,261
2006	20500000	-0,832	16189747	-0,21
2007	21200000	-0,867	16725275	-0,211

Diante desta validação o grupo considerou o modelo satisfatório. A Figura 7 apresenta um recorte do relatório final deste grupo com suas considerações sobre esta atividade de Modelagem Matemática.

Em nosso estudo sobre área de cultivo de soja, podemos concluir, com base no último modelo, que se o crescimento da área cultivada permanecer constante, em 2250 toda a área cultivável do Brasil seria coberta por cultivo de soja, porém, é evidente que esta situação é inviável. (...) O trabalho serviu de grande importância na aplicabilidade de conceitos e técnicas matemáticas, além de nos levar a discutir sobre questões ambientais e sobre as conseqüências do crescimento de cultivo de soja visando a produção de biocombustível.

Figura 7 - Considerações finais do Grupo para esta atividade

A interação apresentada no *Episódio 5* constitui uma interação dialógica uma vez que nela mais de uma voz é ouvida, lembrando que, para Mortimer e Scott (2002) em uma interação dialógica mais de uma 'voz' é considerada e existe uma inter-animação de idéias A professora procura ouvir as perspectivas dos alunos, incentivando suas participações com enunciados de prosseguimento nos turnos 5 (*sabem? Por que?*), 7 (*como assim?*) e 9 (*mas como melhorou se o crescimento da área de cultivo de 1980 para 1990 foi menor do que de 1960 para 1970 e de 1970 para 1980??*) levando-os a elaborar melhor suas idéias, gerando assim uma cadeia de interação não-triádica.

O objetivo desta interação não consiste em desenvolver algum conceito matemático, mas sim, analisar a confiabilidade do modelo e apresentar as simplificações realizadas com base em informações adquiridas da situação em estudo. Deste modo, o encaminhamento dado pela professora, elaborando questões de prosseguimento do tipo processo (*por quê?, como assim?)*, atua decisivamente na constituição do tipo de interação estabelecida levando os alunos à elaboração de explicações (turnos 8 e 10) alcançando assim o objetivo desejado.

5. CONCLUSÕES

A situação-problema tratada nesta atividade caracteriza-se como uma situação de interesse desta comunidade, realizável na mente do aluno, constituindo uma situação familiar, oportunizando assim sua participação ativa por meio das interações estabelecidas.

As ações dos alunos no desenvolvimento desta atividade (construção de hipóteses, formulação de problemas, etc) emergem de investigações em que o problema não se apresenta já estruturado para o aluno, mas que, ao contrário, faz parte de um 'contexto'. Este 'contexto' investigativo suscitou estas interações.

Como geralmente acontece em atividades de Modelagem Matemática, nesta atividade, as ações do grupo foram se consolidando por meio das interações. Por tratar de uma situação com referência na realidade, conjecturamos que os alunos sentiram-se seguros para participar ativamente destas interações, argumentando, questionando, apresentando seus pontos de vista e conhecimento relativo ao tema.

Deste modo inferimos que as características da situação-problema tratada por estes alunos contribuíram decididamente para a constituição das interações em sala de aula, e, além de oportunizar as interações, favoreceram o estabelecimento de interações dialógicas uma vez que, ao se depararem com um tema de interesse, os alunos, espontaneamente, sentiram 'necessidade' de expor suas perspectivas e seu conhecimento sobre o assunto, assim como suas dúvidas ou curiosidades, gerando assim, uma dinâmica interativa dialógica no desenvolvimento da atividade.

As interações dialógicas possuem o objetivo de familiarizar os alunos com o tema em questão, entender a situação, reconhecer o conhecimento do aluno quanto ao tema, perceber suas perspectivas, formular o problema e elaborar hipóteses, enquanto as interações de autoridade, geralmente, foram aquelas em que a professora tinha o objetivo de introduzir algum conceito matemático ou um procedimento ainda desconhecido pelo aluno.

Levando em consideração as argumentações de Fanizzi (2008) de que as interações dialógicas são mais indicadas para alcançar êxito na aprendizagem e as considerações de Mortimer e Scott (2002), de que os estudantes devem engajar-se em atividades dialógicas a fim de desenvolverem um entendimento do tópico em estudo, a constatação de que a maioria das interações oportunizadas pelo desenvolvimento desta atividade é dialógica, nos conduz a inferir que esta atividade contribui para o desenvolvimento de interações que possuem características que favorecem a aprendizagem dos alunos.

No desenvolvimento desta atividade de Modelagem Matemática constatamos que as atitudes da professora foram fundamentais para a constituição dos padrões de interação e consequentemente do tipo de interação estabelecida (dialógica ou de autoridade). Dependendo do objetivo, a professora atua de uma determinada maneira, ora conduzindo a discussão com vistas a uma perspectiva específica, ora conduzindo de modo a considerar diferentes pontos de vista, dando 'voz' às contribuições dos alunos.
Quando o objetivo da professora foi discutir a situação-problema, obter informações sobre os conhecimentos dos alunos quanto ao fenômeno em estudo ou quanto a conceitos matemáticos (episódios 1 e 5), a professora elaborou questões abertas (*como assim? Me falem o que sabem; Por que?*), oportunizando a troca de idéias, perspectivas e conhecimentos, além de demonstrar interesse nas contribuições dos alunos. Estas questões geraram cadeias de interação não triádicas, constituindo interações dialógicas. Além disso, este tipo de questão conduziu os alunos à procura de argumentos ou explicações para suas perspectivas ou idéias, empenhando-se em 'explicar' com detalhes um procedimento adotado ou uma concepção a respeito do tema. Estas questões e esta 'procura' exigem do aluno, concentração e reflexão, favorecendo sua aprendizagem e desenvolvimento.

Observamos ainda que, como as atividades foram desenvolvidas coletivamente, a professora (ou um colega em interação) pode exercer o papel de mediadora, proporcionando avanços que provavelmente não ocorreriam espontaneamente, constituindo uma interferência na Zona de Desenvolvimento Proximal, avanço considerado de suma importância para a construção do conhecimento, conforme argumentações de Vygotsky.

Assim, ainda que a importância da interação durante atividades de Modelagem Matemática já tenha sido apontada em pesquisas anteriores, nossa pesquisa apresenta elementos que, para além dessa importância, sinalizam que as interações geradas se caracterizam como sendo de potencial para favorecer a aprendizagem dos alunos. Estes elementos foram aqui elencados em termos de interações dialógicas e suas características.

Agradecemos à Allan Marcel Nishioka (in memoriam), Ana Carolina Pierotti Jacobs, Fernanda Bezerra Mangili, Livia Deliberador Francescon, Marcela Arfelli Silva, Mateus Mesquita De Paula Alves Nunes, Matheus Henrique Da Silva, Michel Iuri Caetano, Monica Hirata Bertachi, Nariane Marselhe Ribeiro Bernardo, Noelle Santos Salsa, Paula Fernanda Almeida Goncalves, Rafael Coelho Ciciliato e Vitor Manoel Nogueira Alvares, pelo empenho e dedicação na realização de nossa pesquisa.

REFERÊNCIAS

Almeida, L. M. W.; Brito, D. S. (2005). Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. *Ciência e Educação* (UNESP), v. 11, p. 1-16, 2005.

Almeida, L. M. W.; Ferruzzi, E. C. (2009). Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. *Alexandria*, v. 2, p. 117-134, 2009.

Almeida, L.M.W. ; Silva, K.A.P. (2012). Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: algumas relações. No prelo.

Alro, H. E Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.* Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Araújo, J. de L. ; Salvador, J. A. (2001) Mathematical Modelling in Calculus Courses. In: João Filipe Matos; Werner Blum; Ken Houston; Susana Paula Carreira. (Org.). *Modelling and Mathematics Education: ICTMA 9: Applications in Science and Technology*. Chichester: Horwood Publishing, 2001, v. , p. 195-204.

Barbosa, J. C. (2008). As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem modelagem matemática. *Acta Scientiae* (ULBRA), v. 10, p. 47-58, 2008.

Barbosa, J. C. (2007). A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework.In: Barbosa, J. C.; Caldeira, A. D.; Araújo, J. L. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais***.** Recife: SBEM, 2007. p.161-174.

Barbosa, J.C. (2006[a]). Mathematical Modelling in classroom: a critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 293-301.

Barbosa, J. C. (2006[b]) Students discussions in Mathematical Modelling. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level, 3., 2006a, Istanbul. *Proceedings...* Istanbul: Turkish Mathematical Society, 2006. 1 CD-ROM.

Bishop, A. J. (1988). Aspectos sociais e culturales de la educación matemática. In. *Revista Enseñanza de las Ciencias.* Vol 6. n. 2 .

Bisognin, E ; Bisognin, V ; Isaia, S. M. de A. . (2009). A sala de aula e a Modelagem Matemática: contribuições possíveis em diferentes níveis de ensino. *Horizontes* (EDUSF) , v27, p79-90.

Bisognin, E; Bisognin, V; Alonso Rays, O. (2004): "Modelo matemático da concentração de cocaína no organismo humano: modelagem matemática no ensino de Matemática". In: *Educação matemática em revista* – RS, n.º 6, Ano VI. SBEM, RS.

Borba, M. C. ; Malheiros, A. P. dos S . (2007). Diferentes formas de interação entre Internet e Modelagem: desenvolvimento de projetos e o CVM. In: Jonei Cerqueira Barbosa; Ademir Donizeti Caldeira; Jussara de Loiola Araújo. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: Pesquisas e Práticas Educacionais*. 1 ed. Recife: SBEM, 2007, v. 1, p. 195-214.

Borba, M. C.; Meneghetti, R. C. G.; Hermini, H. A. (1999) Estabelecendo critérios para avaliação do uso de Modelagem em sala de aula: estudo de um caso em um curso de ciências biológicas. In: Borba, M. C. *Calculadoras gráficas e educação matemática*. Rio de Janeiro: USU, Ed. Bureau, 1999. p. 95-113 (Série Reflexão em Educação Matemática).

Borba, M. C.; Meneghetti, R. C. G.; Hermini, H. A. (1997). Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP,* [São José do Rio Preto], v. 5, n. 3, p. 63-70, 1997.

Burak, D. (2004). *Modelagem Matemática e a Sala de Aula.* In: I EPMEM -Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática., 2004, Londrina. Anais do I EPMEM, 2004.

Carvalho, C.; César, M. (2002). Interacções sociais, desenvolvimento cognitivo e matemática. In M. Fernandes, J. A. Gonçalves, M. Bolina, T. Salvado e T. Vitorino (Ed.), *O particular e o global no virar do milénio: Cruzar saberes em educação***.** Actas do 5º Congresso da SPCE (pp. 407-416). Porto: Colibri/SPCE. Disponível em http://cie.fc.ul.pt/membrosCIE/mcesar/textos%202002/Interaccoessociais_desenvolvimentocognitivo.pdf. Acessado em março de 2008.

Chinnappan, M.; Thomas, M. O. J. (2003). Teachers' Function Schemas and their Role in *Modelling, Mathematics Education Research Journal, 15*(2). 151-170.

Cobo, P.; Fortuny, J. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 115-140.

Fanizzi, S. (2008). A interação nas aulas de matemática: um estudo sobre aspectos constitutivos do processo interativo e suas implicações na aprendizagem. 2008. *Dissertação* (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação, USP, São Paulo (SP). Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05082008-142903/publico/DissertacaoSueliFanizzi.pdf

Ferreira, R. S; Lorencini JR. (2005). A construção do conhecimento biológico nas séries iniciais: O papel das interações discursivas em sala de aula. *V ENPEC*. Nº5, 2005.

Ferruzzi, E. C.; Almeida, L. M. W.; Gonçalves, M. B. (2006). Ensino tecnológico: possibilidades de aprendizagem por meio da Modelagem Matemática. *Perspectiva* (Erexim), v. 30, p. 63-77.

Fox, J. L. (2006) A justification for Mathematical Modelling Experiences in the Preparatory Classroom. *In: 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* pp. 221-228. July, 2006, Canberra, Austrália. Disponível em http://www.merga.net.au/documents/RP232006.pdf.

Lau, P.; Singh, P.; Hwa, T.-Y. (2009). Constructing mathematics in an interactive classroom context. *Educational Studies in Mathematics. Maio de 2009.* URL http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9196-y. Acessado em junho de 2009.

Mortimer, E.; Massicame, T.; Buty, C., e Tiberghien, A. (2007). Uma metodologia para caracterizar os gêneros de discurso como tipos de estratégias enunciativas nas aulas de ciências In NARDI, R. *A pesquisa em ensino de ciência no Brasil: alguns recortes*. São Paulo: Escrituras, 2007.

Mortimer, E. F.; Scott, P. (2002). Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. *Investigações em Ensino de Ciências*. Porto Alegre - RS, v.7, n.3, 2002. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n3/v7_n3_a7.htm

Oliveira, A. M. P. ; Campos, I. S. ; Silva, M. S. . (2009). As estratégias do professor para desenvolver modelagem matemática em sala de aula. *Boletim, GEPEM*, v.55, p.175-192.

Sant'ana, M. F. (2007). Modelagem de experimento e ensino de Cálculo. In: Barbosa, Jonei Cerqueira; Caldeira, Ademir Donizeti; Araújo, Jussara Loiola.. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. 1 ed. Recife, 2007, v. 1, p. 149-160.

Santos, L. M. M. ; Bisognin, V. (2007). Experiências de ensino por meio da Modelagem Matemática. In: Jonei Cerqueira Barbosa; Ademir Donizeti Caldeira; Jussara de Loiola Araújo. (Org.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.* Recife: SBEM, 2007, v. 3, p. 99-114.

Sfard, A. (2006*). When the rules of discourse change, but nobody tells you—the case of a class learning about negative numbers.* Disponível em http://eprints.ioe.ac.uk/4310/1/negatives__22_May_06.pdf.

Sfard, A. (2001[a]). There Is More to Discourse Than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communicating To Learn More about Mathematical Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1/3), 13-57.

Sfard, A. (2001[b]). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds), *Proceedings of 21st Conference of PME*-**NA** (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, mathematics, and Environmental Education. Disponível em https://www.msu.edu/~sfard/. Acessado em janeiro de 2010.

Skovsmose, O. (2001*). Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus.

Souza, E. G ; Santo .(2007). Um debate sobre o uso da Modelagem Matemática a partir das inferências dos alunos. In: *V Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática*, 2007, Ouro Preto. V conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, 2007. p. 888-906.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J,. e Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. In J. Watson e K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia*, (pp. 688 – 707).

Schroeder, E. ; Ferrari, N. ; Maestrelli, S. R. P. (2010) A construção dos conceitos científicos em aulas de ciências: a teoria histórico-cultural do desenvolvimento como referencial para análise de um processo de ensino sobre sexualidade humana. *Alexandria* (UFSC), v. 3, p. 21-49, 2010. Disponível em http://www.ppgect.ufsc.br/alexandriarevista/numero_1_2010/edson.pdf.

Vygotsky, L.S. (1993[a]). *Obras escogidas II.* Madrid: Visor. (Coletânea publicada originalmente em russo entre os anos de 1924 e 1934)

Vygotsky, L.S. (1993[b]). *Pensamento e Linguagem*.. Versão digital. Disponível em http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/vigo.pdf**.** Edição eletrônica: Ed. Ridendo Castigat Mores. 136 pgs**.**

Vygotsky, L. (2007). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. SP, Martins Fontes, 2007. 7ª. Ed.

Webb, N. M.; Farivar, S. H. ; Mastergeorge, A. M. (2002). Productive helping in cooperative groups. *Theory Into Practice*, 41, 13-20.

Webb, N.M.; Palincsar, A.S. (1996). Group processes in the classroom. In D. Berliner e R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 841-873). New York: Macmiluan.

Webb, N, Mastergeorge **A**. (2003). Promoting Effective Helping Behavior in Peer-Directed Groups. *International Journal of Educational Research* (39), 73-97, 2003.

Zbiek, R., e Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in mathematics*, 63(1), 89-112.

Elaine Cristina Ferruzzi

Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil. Mestrado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina, especialista em Informática na Educação, Especialista em Metodologia do ensino tecnológico e licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Atualmente é professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, onde, além das atividades docentes encontra-se como Diretora de Relações Empresariais e Comunitárias do câmpus Londrina- Pr. Foi coordenadora do I e II Curso de especialização em Instrumentalização para o ensino de Matemática e Coordenadora da I Turma do Programa Especial de Formação pedagógica da UTFPR, câmpus Londrina. Tem experiência na área de Matemática e ensino de matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática, educação matemática, investigação matemática.