Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias

María Teresa Juan, Virginia Montoro y Nora Scheuer

Resumen: Con el objeto de indagar las concepciones de alumnos de secundaria respecto a aspectos básicos del infinito, realizamos el análisis de las respuestas a un cuestionario escrito, solicitadas a 195 estudiantes. Hemos utilizado métodos estadísticos multivariados: un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) y, posteriormente, una Clasificación Jerárquica. Los resultados nos permiten determinar cinco clases de estudiantes, según son sus modos de respuestas, que podemos identificar globalmente con las siguientes ideas: *posibilidad de obtener colecciones infinitas e infinito distinguido de todo; duda e inseguridad en la respuesta; infinito asociado a muy numeroso, junto con infinito no es posible y en infinito está todo.*

Palabras clave: Infinito-Matemática-Concepciones-Estudiantes-Secundaria

The mathematical concept of infinity. High school students' conceptions
Abstract: In order to investigate high school students' conceptions about the mathematical concept of infinity with regard to basic aspects of the infinite, we analysed the answers to a written questionnaire, requested 195 students. We have used statistical multivaried methods: a Factorial Analysis of Multiple Correspondences (AFCM) and, subsequently, a Hierarchic Classification of the students according to their answer profile. Results allow us to determine five classes of students acording to their ways of answering the questionnaire. We identify these classes globally with the following ideas: *possibility of obtaining infinite collections and infinity distinguished from everything; doubt and insecurity in the response; infinity associated to very numerous, with infinity is not possible and infinity contains everything.*

Keywords: Infinity-Mathematics-Conceptions-Students–High School

Fecha de recepción: 22 de febrero de 2012
Fecha de aprobación: 21 de agosto de 2012

INTRODUCCIÓN

Siguiendo la línea de investigación en educación matemática vista como la indagación metódica acerca de las cuestiones vinculadas a la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Kilpatrick, 1998), presentamos un estudio sobre las ideas de estudiantes del nivel medio referidas a un concepto psicológica y matemáticamente complejo como es el de infinito matemático.

La pregunta que guía nuestro trabajo es: ¿cuáles son las ideas o concepciones que los estudiantes de este nivel educativo tienen respecto de la noción de infinito y cómo se relacionan estas con el estatus matemático de este concepto?

En el *currículum* de nivel medio, para la asignatura matemática, vigente en la provincia de Río Negro, Argentina, donde se ubican las escuelas en las que hemos desarrollado nuestra indagación, el infinito no es un contenido explícito; sin embargo, contenidos tan específicos de este nivel educativo, como es el concepto de número real, se encuentran inmersos en el concepto de infinito matemático (García, Serrano y Diaz, 1999; Rico, 1997; Romero, 1997). El problema del infinito se presenta como el concepto clave en la construcción matemática del concepto de número real, de modo que la apropiación del infinito por parte de los estudiantes es parte esencial de su apropiación del concepto de número real.

Para justificar y enmarcar el estudio de las concepciones de estudiantes de nivel medio acerca del infinito matemático, recorreremos brevemente la evolución de este concepto en la historia de la matemática, ya que consideramos que conocer las vicisitudes en la construcción histórica de esta noción nos ayuda a tener una idea de la naturaleza y la magnitud de las dificultades con las que pueden encontrarse los estudiantes a la hora de abordar su conceptualización.

Así mismo revisaremos la idea de "concepciones" y sintetizaremos los resultados más relevantes de investigaciones previas acerca de este tema. A partir de este encuadre, plantearemos específicamente el problema a indagar explicitando los objetivos del trabajo.

MARCO TEÓRICO

EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE INFINITO EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Comencemos el recorrido de la evolución del concepto de infinito ubicándonos en la antigua Grecia, cuando Aristóteles (384-322 a. C.) planteaba, retóricamente: ¿hay pruebas de la existencia del infinito? Él mismo enumera algunas: el tiempo, que es patentemente infinito; la división de las magnitudes, que pueden subdividirse progresivamente; y, por sobre todo, que tanto el número, como las magnitudes matemáticas, como todo lo que hay detrás de los cielos, parecen ser infinitos (Zellini, 2004).

La posibilidad del infinito estaba asociada, entonces, a su inagotabilidad. Sin embargo, lo que es infinito, según los antiguos filósofos griegos, no puede estar presente en su totalidad de manera acabada en nuestro pensamiento.

Aristóteles distinguía entre el infinito potencial y el infinito actual. Sostenía que solo el infinito potencial es admisible para el pensamiento, ya que cualquier noción de infinito actual no sería "razonable". En los Capítulos 4-8 de su *Libro III de Física*, afirma que negar que exista el infinito real (actual) y admitir solo el infinito potencial no presenta un obstáculo para los matemáticos.

Euclides (325-265 a. C.) en su magnífica obra matemática *Elementos*, usa solo el infinito potencial, evitando permanentemente la explicitación del infinito actual. Enuncia, asignándole el estatus de noción común, que *el todo es mayor que cada una de las partes*. Este postulado lleva muchos siglos más tarde a Galileo Galilei (1564-1642) a fundamentar la imposibilidad de la existencia de conjuntos infinitos, al comprobar que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los números enteros y sus cuadrados, lo que contradice esa noción común.

Durante la Edad Media, la naturaleza de las ideas sobre el infinito adoptó connotaciones teológicas. En este contexto ideológico, San Agustín (354-430 d. C.) y Santo Tomás de Aquino (1224-1274 d. C.) afirmaron que solo Dios es infinito (Ortiz, 1994).

En el siglo XVII, Isaac Newton (1643-1727) en Inglaterra y Gottfried Leibniz (1646-1716) en Alemania (trabajando independientemente uno del otro) comenzaron el desarrollo del cálculo, que implicaba la admisión de infinitos actuales. Tanto uno como otro realizan su trabajo tratando el concepto de infinito actual como transparente, es decir, como algo dado, que no constituye objeto de discusión.

El desarrollo del cálculo abrió el camino para el estudio del análisis matemático, en el que tratar la cuestión del infinito actual se hizo inevitable.

Casi 200 años más tarde, Bolzano (1781-1848) escribe Las paradojas del infinito (1851). A este autor se le considera el primero en abordar formalmente la cuestión del infinito actual. Aunque no profundizó suficientemente esta idea, fue el creador del importantísimo concepto de potencia[1] de un conjunto. El aporte fundamental de esta obra es la de instalar el tema definitivamente entre matemáticos, epistemólogos y lógicos.

En 1883, Georg Cantor (1845-1918), en una serie de artículos titulados *Sobre variedades lineales infinitas de puntos*, trata por primera vez el infinito actual como un ente matemático bien definido (Torretti, 1998). Cantor comienza donde Galileo abandonó su recorrido conceptual: admitiendo que es posible establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos infinitos aun cuando uno no sea más que una parte del otro. Más precisamente, Cantor sostiene que esto define a los conjuntos infinitos.

A fines de ese siglo, Cantor formaliza la Teoría de Conjuntos, en la cual trabaja con números infinitos cardinales y ordinales, y muestra que no todos los conjuntos infinitos son *igualmente* infinitos. Establece el concepto de *potencia* de una colección infinita, que más tarde conoceríamos como *cardinalidad*. Durante años, este matemático evita hablar de la potencia de un conjunto como un número. En 1883 comienza a considerar a todos los conjuntos infinitos de igual potencia como equivalentes y a denominar esa clase de equivalencia como un número cardinal transfinito.

G. Cantor demuestra que hay tantos números pares como naturales, tantos naturales como fracciones (o racionales). Puede parecer burdamente contrario a la intuición que ambos conjuntos puedan ponerse en correspondencia biunívoca, dado que entre dos racionales siempre hay otro racional mientras que los números enteros se sitúan de manera discreta sobre la recta.

El siguiente paso de G. Cantor es aún más notable: demuestra que no puede existir ninguna correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números reales. Si consideramos un segmento formado por números racionales, por pequeño que este sea, hay en él infinitos números racionales, pero aun cuando este conjunto sea denso, hay espacio en él para alojar infinitos números irracionales. Cantor comunica, en 1877, a Dedekind, su extraordinario resultado: es posible establecer una correspondencia biunívoca entre la recta y el plano, por ejemplo entre un cuadrado y uno de sus lados, para lo que usa la expresión: *¡Lo veo y no lo creo!*

De esta manera se incorporan a la matemática, definitivamente, las cantidades infinitas, como cardinal de los conjuntos (actualmente) infinitos y aceptados plenamente a partir del proceso descrito arriba.

[1] Dos conjuntos tienen la misma potencia si es posible establecer una función biunívoca entre ellos. Dos conjuntos con la misma potencia se denominan equipotentes.

La gran importancia de la obra de G. Cantor estuvo dada, sobre todo, por el hecho de dotar de contenido matemático al concepto de infinito actual. Al desarrollar lo que él mismo bautizó *aritmética de los números transfinitos*, instaló los cimientos de la Teoría de Conjuntos abstractos y contribuyó, además, a fundamentar el cálculo diferencial y el continuo de los números reales. El más notable logro de G. Cantor consistió en mostrar, con rigor matemático, que la de infinito no era una noción indiferenciada. Rescataremos algunos aspectos del infinito matemático, tal como se lo concibe contemporáneamente, que abordamos en nuestra indagación de las concepciones de estudiantes de nivel medio:

- El cardinal de un conjunto infinito es la cantidad (infinita) de elementos del conjunto, lo cual crea la necesidad matemática de nuevos números que representen cada una de estas cantidades infinitas.
- El cardinal de los números enteros no es un número entero "muy grande", sino que es una cantidad de otra naturaleza; es un nuevo número al cual se dio un nuevo nombre, denominándolo número transfinito.
- En una parte propia (es decir estrictamente incluida) de un conjunto infinito puede haber tantos elementos como en todo el conjunto. Por lo tanto, que una colección sea infinita no implica que posea todos los elementos posibles. Además, pueden existir distintas colecciones infinitas en un mismo universal.

Las concepciones de los estudiantes como objeto de investigación

Respecto de muchos fenómenos y situaciones, las personas generamos tempranamente comprensiones o explicaciones las que, aunque puedan alejarse considerablemente de las teorías formalizadas, nos resultan útiles en los intercambios con el mundo. Estas comprensiones han recibido decenas de denominaciones diferentes en la literatura psicoeducativa. Algunas de ellas son: conocimiento intuitivo (Kieran, 1992), primitivos fenomenológicos (diSessa, 2008), imágenes conceptuales (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979), concepciones (Giordan y de Vecchi, 1995; Pozo, Scheuer, Pérez Echeverría, Mateos y de la Cruz, 2006). Más allá de las diferencias en los modos de entender el origen, estructura y modos de transformación de estas representaciones mentales, los diferentes enfoques coinciden en que antes o al margen de la participación en procesos de enseñanza formal, las personas de diferentes edades y que participan en diferentes contextos educativos cuentan con un conjunto de perspectivas que les permiten organizar ciertos aspectos o dimensiones del mundo de forma diferenciada –se trate de sucesos físicos, relaciones sociales, lenguaje, propiedades o transformaciones cuantitativas–. Otro aspecto en que los diferentes enfoques acuerdan es el carácter más bien implícito (Karmiloff-Smith, 1992) que estas representaciones tienen para la propia persona que las pone en juego.

También hay coincidencia en que a menudo persisten mucho después de que las teorías formales son introducidas en la enseñanza, pese a tener un poder explicativo, grados de coherencia y de consistencia mucho menor, siendo dependientes de factores contextuales. En este sentido, se encuentra que estas representaciones pueden implicar rasgos esencialmente contradictorios. Por ejemplo, refiriéndonos a nuestro campo de estudio, las experiencias cotidianas invariablemente sugieren que "el todo es mayor que la parte", y así, resulta que si a un colección le retiramos algunos elementos, la colección resultante no podría tener la misma cantidad de elementos que la de partida, situación que claramente es verdadera en las colecciones finitas, pero falsa cuando se trata de colecciones infinitas. Retomando el planteo general, los diferentes enfoques coinciden también en que es el cambio profundo de las explicaciones, predicciones y anticipaciones de los estudiantes en la dirección de una mayor articulación interna y de una integración de principios en los que se basan las teorías científicas –y no la mera enunciación de definiciones teóricas– el que debería considerarse como indicador de aprendizaje científico (Pozo y Gómez Crespo, 1998).

En el presente trabajo, cuando hablamos de *concepción sobre el infinito*, consideramos todas las representaciones que evoquen y pongan en juego los estudiantes frente a situaciones que involucren el concepto de infinito, incluyendo representaciones de diferente orden de complejidad, que se extienden desde lo que algunos autores llaman *intuición* del infinito (Fischbein *et al.*, 1979; Tirosh, 1991), hasta ideas acordes con la conceptualización matemática del mismo. En ocasiones hablaremos de *concepciones alternativas,* para referirnos a ideas que no se ajustan al estatus científico del infinito matemático, por cuanto el término *alternativa* establece una diferenciación con las concepciones científicas, pero al mismo tiempo da a la concepción entidad en sí misma.

Concepciones de los estudiantes sobre el infinito matemático

La palabra "infinito" forma parte del lenguaje cotidiano y está cargada de significado; un significado, en muchos casos, diferente del significado matemático.

Consideramos que concebir una colección de infinitos elementos requiere poner en juego procesos mentales de un notable nivel de abstracción, ya que el infinito es un concepto que carece de correlato directo en la naturaleza y su comprensión requiere, por ende, tratar las cantidades de modo muy diferente al que es habitual al interactuar con colecciones finitas.

En las últimas décadas, con el desarrollo de estudios en educación matemática, varios autores, como Fischbein y otros (1979), Sierpinska (1985), Moreno-Armella y Waldegg (1991, 1995), Waldegg (1993), entre otros, han observado que la noción de infinito es frecuentemente contradictoria en los estudiantes, que su comprensión es lábil y que estos encuentran serias dificultades de conceptualización cuando se enfrentan con conceptos que la implican.

De forma particular, Monaghan (2001) examinó lo que llama *concepciones subyacentes* sobre el infinito en estudiantes preuniversitarios de entre 16 y 18 años de edad. Los principales resultados identifican, principalmente, dos visiones: una que concibe al infinito como un proceso, o *algo que sigue y sigue para siempre*, y otra, que lo entiende como un objeto, a través de la referencia a un número muy grande o a colecciones que contienen más que cualquier número finito de elementos.

Montoro (2005) y Montoro y Scheuer, (2006) estudiaron las concepciones sobre el infinito en estudiantes universitarios, atendiendo particularmente los siguientes aspectos: la posibilidad de obtener una colección infinita a partir de combinar una cantidad finita de elementos que puedan repetirse; la distinción entre infinito y un número muy grande; y la diferenciación entre infinito y *todo* (se entiende por "todo" la colección universal). Propusieron un cuestionario de preguntas de opción múltiple, referidas a diferentes lenguajes de maquina ficticios, generados a partir de diferentes cantidades de elementos y de reglas combinatorias. La formación matemática resultó la variable de mayor peso para la comprensión de este concepto. Los ingresantes a la universidad, mayoritariamente, rechazaron la posibilidad de construir una colección infinita, pero ante colecciones infinitas que les fueron presentadas como tales, las identificaron con la idea de *todo*. En estudiantes más avanzados en sus carreras pero sin una instrucción específica en matemática, predominó la concepción del infinito identificado con *mucho*. Los estudiantes con mayor formación matemática, en su mayoría, aceptaron las colecciones infinitas sin dificultad y diferenciaron infinito de *todo*. Las ideas correctas respecto a los diferentes aspectos indagados estuvieron fuertemente asociadas entre sí, en cambio las ideas alternativas se encontraban muy diferenciadas unas de otras (Montoro, 2005).

Con el objetivo de indagar estos aspectos de las concepciones sobre el infinito de estudiantes universitarios, ahora según la carrera que cursan y el nivel de avance en la misma, Montoro y Scheuer (2004) aplicaron un cuestionario a 120 estudiantes de carreras con distinta especificidad en dominio de conocimiento. Sus resultados indicaron que el perfil de los estudiantes respecto de estas ideas puede variar mucho con la carrera que eligen, y que la evolución de las mismas hacia una concepción matemática formal del infinito se ve ampliamente favorecida por el estudio específico y sostenido de temas que involucran el infinito.

En el presente estudio indagamos las concepciones de alumnos de secundaria (de 13 a 19 años de edad), respecto a aspectos básicos del infinito cardinal, concepto que se encuentra muy alejado de la intuición y de la experiencia sensible, a la vez clave para una comprensión profunda de la matemática.

Objetivos

Específicamente, nos propusimos indagar cómo, a lo largo del nivel educativo secundario, estudiantes que participan de diferentes entornos de educación matemática formal dan cuenta de:

- la posibilidad de obtener una colección infinita a partir de la combinación de un número finito (pocos o muchos) de elementos;
- la distinción entre infinito y *mucho*
- la distinción entre infinito y *todo*.

Las preguntas que guían el estudio son: ¿qué estatus asignan los estudiantes a la cantidad de elementos de partida y a las reglas combinatorias a fin de generar conjuntos infinitos? ¿Cómo relacionan los conjuntos infinitos con ciertas propiedades como son una gran numerosidad y la noción de todo? ¿Varían las concepciones de los estudiantes según el grado de avance en el nivel medio y según características de la educación matemática formal en la que participan? Nos propusimos estudiar las respuestas de estudiantes al inicio, en una etapa intermedia y al finalizar los estudios secundarios. Además de estos aspectos, abordados por Montoro (2005) en el nivel universitario, nos proponemos indagar si el contexto en el que se presenta la noción de infinito tiene alguna influencia en las respuestas de los estudiantes. En particular, ¿estas se mantienen o cambian en contextos diferenciados?

METODOLOGÍA

PARTICIPANTES

Participaron en este estudio 195 estudiantes que asisten a tres colegios de Bariloche, en la Patagonia argentina, que llamaremos A, B y C. Los tres son valorados positivamente en la comunidad educativa. En los tres casos, la mayoría de los egresados continúa en niveles superiores de enseñanza.

Realizamos una entrevista semiestructurada a los directivos de las tres instituciones educativas, con el fin de obtener una descripción de las mismas. A continuación presentamos una síntesis de la información más relevante obtenida.

Colegio A: Es un colegio público y gratuito, con orientación en turismo, de jornada simple. Su plan de estudios es de cinco años. Cuenta con un total de 21 cursos y 650 alumnos y 14 docentes a cargo de la asignatura matemática. De los 14 docentes, que tienen escasa estabilidad laboral en sus cargos, siete no tienen título profesional, algunos han cursado en forma incompleta el Profesorado en Matemática (varios de ellos no han completado el primer año). La inasistencia de los docentes es elevada y, a pesar de trabajar a partir de un mismo programa, el compromiso y exigencia docente es muy variable. La población estudiantil es muy heterogénea en su rendimiento. Aproximadamente 17% de los estudiantes han repetido uno o más cursos, siendo matemática y biología las materias con más baja promoción. Otra característica que destacan los directivos es la cantidad elevada de alumnos del colegio, lo que consideran conduce a que el trato no sea personalizado, y que los docentes conozcan principalmente a los "muy buenos" o "muy malos" alumnos.

Colegio B: Es un colegio público y gratuito, con orientación en comunicación social, de jornada simple y un plan de estudios de cinco años. Cuenta con un total de diez cursos y 230 estudiantes, y cuatro docentes para la asignatura matemática. De estos, tres tienen título de Profesor de Matemática, quienes trabajan en el turno escolar en el que se administró el cuestionario. Dos docentes trabajan hace más de 15 años en el colegio en forma conjunta, lo que da continuidad a su proyecto educativo en matemática. La repitencia es excepcional en este turno.

Colegio C: Es un colegio público de gestión privada, con examen selectivo de admisión. Su orientación es tecnológica, la jornada es doble y el plan de estudios comprende seis años.

El colegio tiene nueve cursos, 186 alumnos y tres docentes a cargo de matemática. Uno es profesor de matemática, otro es profesor de primaria y el tercero es exestudiante avanzado del profesorado en matemática. Los tres docentes trabajan en forma conjunta, tanto en cuanto a los acuerdos de contenidos, como en cuanto a la profundidad de tratamiento de los mismos y la metodología de implementación. Muchos de los estudiantes cursaron sus estudios primarios en escuelas privadas. En general, quienes deben recursar, no permanecen en el colegio.

En cada colegio, participaron los alumnos de un curso de primer año, uno de tercer año y uno del último año (quinto en los colegios A y B, y sexto en el colegio C). En cada colegio, el curso en cuestión fue elegido en función de la compatibilidad horaria entre la escuela y los investigadores. Los estudiantes de primer año tenían todos entre 13 y 14 años, los de tercer año entre 15 y 16 y los de quinto o sexto entre 17 y 19 años. Es decir, la edad cronológica coincide, en todos los casos, con el nivel educativo. Participaron del estudio en forma voluntaria todos los estudiantes presentes en clase el día en que se administró el cuestionario que describimos a continuación. Ninguno se negó a completarlo, aunque, como veremos, no todos respondieron todas sus preguntas.

Instrumento y procedimiento de indagación

Se aplicó el instrumento diseñado por Montoro y Scheuer (2006), al considerarlo adecuado para estudiar en profundidad las concepciones acerca de este concepto incluso en el nivel educativo que nos ocupa. El mismo presenta 10 preguntas cerradas con tres opciones de respuesta cada una, para ser contestadas en forma individual y por escrito en clase (ver Tabla I).

A las preguntas originales del cuestionario, referidas a un *contexto lingüístico* y *combinatorio*, se agregaron otras tres (también cerradas y con tres opciones de respuesta) referidas a un *contexto natural* (cantidad de hojas de los árboles y granos de arena en un parque nacional).

Las preguntas fueron diseñadas de modo que cada una presentase solo una opción de respuesta correcta y se solicitó a los estudiantes que eligiesen una y solo una opción. Todas las preguntas tienen un *ítem* de respuesta abierto: *justifica tu respuesta*.

El cuestionario administrado comienza con un cuerpo de identificación del estudiante que lo responde, en el cual se consigna colegio, edad y género. Una de las investigadoras se encargó de la administración del cuestionario, sin la presencia del profesor del curso, entregando a los estudiantes una copia impresa que respondieron en forma individual en el transcurso de un módulo de clase (80 minutos).

Metodología de análisis

Teniendo en cuenta la gran cantidad de datos con que contábamos, las respuestas a este cuestionario fueron sometidas a un análisis multivariado de datos, a fin de obtener un panorama integral acerca de cómo los estudiantes conciben los diferentes aspectos del infinito indagados, cómo se vinculan sus ideas acerca de estos aspectos y si factores evolutivo-educativos (curso y colegio) inciden en esas concepciones. Con este fin determinamos dos tipos de variables categóricas. Las *variables de caracterización* refieren a las características de los estudiantes: *Colegio, Edad y Género.* La variable *Colegio* posee tres modalidades, que corresponden a los colegios A, B y C en los que se suministró el cuestionario. La variable *Edad* es de índole educativo-evolutiva, y posee tres modalidades: *Iniciales*, correspondiente a los estudiantes de primer año, cuyo intervalo de edad corresponde al de 13 a 14 años; *Intermedios*, correspondiente a los estudiantes de tercer año de entre 15 y 16 años; y *Avanzados*, correspondiente a los estudiantes de quinto o sexto año y cuyas edades se encuentran entre 17 y 19 años.

Las *variables de respuesta* están determinadas por cada una de las preguntas del cuestionario. Contamos así con 13 variables de respuesta.

Para cada estudiante, cada una de estas variables toma el valor de la modalidad elegida por este como respuesta: *sí, no* o *no sé* para las preguntas 1 a 6 y 11.a, 11.b y 11.c; *pocas*, *muchas*, *infinitas* o *no contesta* para las preguntas 7 a 10 (ver Tabla I).

Tabla I: Preguntas del cuestionario.
Se presenta la opción correcta en negrita y aspecto indagado en cada una.

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th>Aspecto indagado</th></tr>
<tr><td colspan="2">Juan y María, juegan con una máquina que puede realizar 10 tareas distintas y posee un teclado con tres teclas: M, A y P. Ellos inventaron un sistema para denominar esas tareas a través de combinaciones de las tres teclas. Las combinaciones elegidas para cada una de las tareas fueron: MAP, MP, PM, AMP, MAA, PPMMA, MAPP, A, PMM, MAPA. A este sistema lo denominaron “idioma de máquina JM”.</td></tr>
<tr><td>P1) ¿Piensas que es posible con solo estas tres teclas (M, A y P) crear un “idioma de máquina” para una máquina que realizará 200.000 tareas?
☐Sí ☐ No ☐ No sé</td><td>La posibilidad de obtener muchas combinaciones a partir de pocos elementos (pregunta introductoria)</td></tr>
<tr><td>P2) ¿Piensas que es posible con solo estas tres teclas (M, A y P) crear un “idioma de máquina” con el cual siempre se podría dar una denominación a una tarea no prevista anteriormente?
☐ Sí ☐ No ☐ No sé</td><td>La posibilidad de obtener infinitos elementos (en forma potencial) a partir de la combinación de un número finito (pocos) de elementos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Juan y María cuentan ahora con un teclado de 28 teclas (una con cada letra del alfabeto castellano) en el que se basaron para crear un “idioma de máquina” para denominar las infinitas tareas de una máquina imaginaria. Lo llamaron JUANMARIANO.</td></tr>
<tr><td>P3) ¿Crees que en base a estas mismas 28 letras, se podría construir otro “idioma de máquina” diferente al JUANMARIANO (es decir, que estos dos “idiomas” difieran en al menos una combinación de letras) que también sea infinito?
☐ Sí ☐ No ☐ No sé</td><td>La distinción entre infinito y todo, específicamente la posibilidad de obtener distintas colecciones infinitas contenidas en un mismo universal. La respuesta “No” indicaría que el participante considera que un conjunto infinito tiene todos los elementos de un universal, incluido en él solo podrá haber un conjunto infinito: él mismo.</td></tr>
<tr><td>P4) La combinación de teclas ANANA, ¿estará necesariamente en el “idioma de maquina” JUANMARIANO?
☐ Sí ☐ No ☐ No sé</td><td>La distinción entre infinito y todo, específica, que no necesariamente, un elemento del universal estará en una colección infinita incluida en este universal. La respuesta “Si” indicaría que el participante considera que todo elemento del universal estará en cualquier conjunto infinito del universal.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otro día, Juan y María inventaron otro “idioma de máquina” en base al alfabeto castellano de 28 letras (que llamaron BARILOCHENSE), y cumple con las siguientes reglas:
Regla I: En BARILOCHENSE están todas las combinaciones de dos letras (por ejemplo SI, NO, AB, RR, TT, TE, ST, GO, TA, etcétera).
Regla II: Si una combinación está en BARILOCHENSE, también estará esa combinación con una A al final (por ejemplo si está PP está PPA y también PPAA, si está PERRO está PERROA, y PERROAA).</td></tr>
<tr><td>P5) ¿Podrías asegurar que BARILOCHENSE tiene infinitas combinaciones para designar tareas?
☐ Sí ☐ No ☐ No sé</td><td>La posibilidad de obtener infinitas combinaciones a partir de finitos elementos (inductivamente)</td></tr>
</table>

Pregunta	*Aspecto indagado*
P6) Si retiramos de BARILOCHENSE todas las combinaciones que tengan a lo sumo 20 letras. ¿Tendremos todavía un "idioma de máquina" con infinitas combinaciones? □ **Sí** □No □ No sé	La distinción entre infinito y todo, específicamente si tras quitar una cantidad finita de elementos a un conjunto dado como infinito, éste continúa siendo infinito. La respuesta "No" indicaría que el participante considera que al no poseer todos los elementos del universal el conjunto ya no es infinito.
Juan y María, se juntaron un vez más y jugaban a inventar "idiomas de máquinas" para maquinas imaginarias. Juan propuso arreglárselas sólo con tres teclas (M, A, P), mientras que María propone tener 15.000.000 de teclas.	
P7) El primer "sistema" que propone Juan (JUAN1) es el siguiente: JUAN1: "Todas las combinaciones posibles con estas tres letras (M, A, P), sin que puedan repetirse las letras en una determinada combinación". (Por ejemplo: A MP, PAM estarán en JUAN1, mientras que MAPA y MMP no están permitidas). Piensas que este sistema tendrá: **Pocas combinaciones** (menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas) Infinitas combinaciones	El papel de la cantidad de elementos a combinar y la posibilidad de repetirlos en la obtención de colecciones infinitas. Este aspecto se indaga en relación a la extensión del conjunto de todas las combinaciones obtenidas a partir de diferentes situaciones: pocos elementos, sin repetir, muchos elementos, sin repetir, pocos elementos, repitiendo; muchos elementos, repitiendo.
P8) María propone un sistema similar pero basado en sus 15.000.000 de teclas (MARIA1), es decir: MARIA1: "Todas las combinaciones posibles de los 15.000.000 de teclas, sin que puedan repetirse las teclas en una determinada combinación." Piensas que este sistema tendrá: Pocas combinaciones (menos de 1000) **Muchas combinaciones** (más de 1000 pero no infinitas) Infinitas combinaciones	
P9) Juan decide, entonces que su sistema estará constituido por todas las combinaciones de las tres letras (M, A, P) pero ahora pueden repetirse las letras sin restricciones. Piensas que este sistema tendrá: Pocas combinaciones (menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas) **Infinitas combinaciones**	
P10) María insiste en utilizar 15.000.000 de teclas y que su sistema esté constituido por todas las combinaciones de esas letras y pueden repetirse sin restricciones. Piensas que este sistema tendrá: Pocas combinaciones (menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas) **Infinitas combinaciones**	

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th>Aspecto indagado</th></tr>
<tr><td>11.a) La cantidad de hojas de todos los árboles que hay en el Parque Nacional Nahuel Huapi en este momento,
¿Es infinita?
□ Sí □ No □ No sé</td><td rowspan="3">Distinción entre colecciones muy numerosas y colecciones infinitas. La respuesta “Sí” indicaría que el participante asimila muy numeroso a infinito.</td></tr>
<tr><td>11.b) La cantidad de granos de arena que hay en este momento en las playas de Bariloche, ¿Es infinita?
□ Sí □ No □ No sé</td></tr>
<tr><td>11.c) La cantidad de granos de arena que hay en este momento en el mundo, ¿Es infinita?
□ Sí □ No □ No sé</td></tr>
</table>

Realizamos, en primer lugar, un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) (Benzécri, 1973) de la tabla que cruza los 195 participantes con todas las modalidades de todas las variables. Este método ha sido especialmente diseñado para describir, visualizar y sintetizar grandes cantidades de datos obtenidos sobre un conjunto de individuos (Fine, 1996). Tomando como base las respuestas de todos los estudiantes, sin clasificación previa, intentamos identificar grupos de individuos que responden en forma similar o en forma opuesta y distinguir relaciones de estos grupos de modalidades de respuesta con las modalidades de caracterización de los sujetos.[2]

En el AFCM, dos individuos se asemejarán si poseen modalidades similares; cuantas más modalidades compartan, más “parecidos” son. Una modalidad es (salvo una dilatación) el centro de gravedad de los individuos que la poseen. Bajo esta interpretación, dos modalidades de distintas variables están próximas cuando son casi los mismos individuos los que las eligen. Las modalidades raras, es decir poco frecuentes, están alejadas de todas las demás.

Se realizó, entonces, un AFCM de la tabla de los 195 estudiantes descritos por las 16 variables (13 de respuesta y 3 de caracterización). Se tomaron como modalidades activas, para la formación de los ejes, las modalidades de las variables de respuesta, para luego proyectar sobre los planos factoriales definidos por estas, las modalidades de caracterización como suplementarias. Esto posibilita observar los principales factores de variabilidad de los modos de respuesta, así

[2] El detalle de la aplicación de los métodos, o una mayor profundización de la técnica de los mismos se puede encontrar en: Lebart, Morineau y Fénelon (1979) o en Crivisqui (1993) o Baccalá y Montoro (2008).

como visualizar la relación de estos con cada una de las variables de caracterización (*Colegio, Edad, Género*), tomadas por separado.

Se seleccionaron los dos primeros ejes factoriales, siguiendo criterios habituales (Crivisqui, 1993). El primer eje expresa el factor de mayor variabilidad de las respuestas; es decir, la situación que más se aleja de la tendencia central. Los ejes restantes son forzados por el método a ser perpendiculares a cada uno de los anteriores y, por lo tanto, describen relaciones no presentes en ellos. De acuerdo con el criterio habitual en la aplicación de estos métodos, consideramos como variable contributiva a un eje, aquella cuya contribución a la conformación del mismo es mayor a la contribución media para las variables, y como modalidad contributiva a un factor, aquella que posea una contribución mayor que la contribución media para las modalidades activas. Consideramos como modalidad de caracterización asociada a un factor aquella para la cual se puede rechazar la hipótesis de que su coordenada para ese eje se deba al azar, con un umbral del 5%.

Posterior al AFCM, realizamos una Clasificación Jerárquica Ascendente (Ward, 1963) de los estudiantes según sus modalidades de respuesta. Este método de análisis de los datos nos permite clasificar a los estudiantes de acuerdo con la similitud en sus modos de respuesta, esto es, de acuerdo con que se parezcan en las respuestas que dan a las preguntas del cuestionario.

El método de clasificación utilizado corresponde al denominado "de agregación de Ward" y utiliza los resultados del Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples realizado previamente. Consiste en realizar sucesivas particiones del conjunto de todos los estudiantes, basadas en las distancias entre las proyecciones de los puntos que representan a cada estudiante en el AFCM, sobre los ejes factoriales. Cuando decimos que "un estudiante está en una clase" nos estamos refiriendo a esta representación. En la primera partición tenemos 195 clases; es decir, en cada una de estas clases hay un estudiante. En los pasos siguientes, se van agrupando las clases que sean más parecidas en cuanto a sus modos de respuesta. El investigador selecciona en qué iteración cortará el proceso, de manera tal que la conformación de las distintas clases, así obtenidas, tenga sentido en términos del estudio realizado. Este método, además, ordena los individuos que componen cada clase según su proximidad al centro de gravedad de la clase, proporcionado así criterios más controlados que los habituales en investigaciones cualitativas para la selección de ejemplos.

Para el AFCM y la clasificación se utilizó el paquete *Decisia Spad* versión 5.5.

RESULTADOS

RESULTADOS DEL ANÁLISIS FACTORIAL DE CORRESPONDENCIAS MÚLTIPLES: ASOCIACIÓN ENTRE LAS MODALIDADES DE RESPUESTA SEGÚN LOS ESTUDIANTES QUE LAS ELIGEN

El Gráfico 1 muestra la proyección de las modalidades de todas las variables (de caracterización y de respuesta) sobre los dos primeros ejes factoriales. La Tabla II presenta las variables y modalidades contributivas para cada eje, como así también las modalidades de caracterización asociadas. También sintetiza una interpretación de los dos primeros factores a partir de la consideración del aspecto indagado por las principales modalidades de respuesta que conforman los ejes y de las modalidades de caracterización asociadas.

Tabla II: Conformación y modalidades asociadas a cada eje del AFCM

Eje	*Modalidades de variables de respuesta activas que contribuyen principalmente en la formación del eje*	*Modalidades de variables de respuesta ilustrativas bien representadas en este eje*	*Modalidades de variables de caracterización que están bien representadas en este eje*
I	(+) P1NOSE, P3NOSE, P5NOSE, P6NOSE, P7NOCONTESTA, P8NOCONTESTA, P9NOCONTESTA, P10NOCONTESTA.	(+)P11aNOSE, P11bNOSE, P11cNOSE (-)P11aNO, P11bNO, P11cNO	(+) CEM46; MENORES (-) LOSANDES, MAYORES
II	(+) P1SI, P2SI, P4NO, P6SI, P7NOCONTESTA, P8NOCONTESTA, P9NOCONTESTA, P10NOCONTESTA (-) P2NO, P7MUCHAS, P8POCAS, P8INFINITAS; P9MUCHAS; P10MUCHAS	(+)P11aNOCONTESTA, P11bNO, P11cNO, P11cNOCONTESTA (-)P11aSI; P11bSI, P11cSI	(+) CEM2, MAYORES (-) CEM46, MENORES

Los resultados indican que el Eje I da cuenta de un factor que representa la inseguridad en la respuesta tanto en lo que concierne a colecciones finitas como infinitas. Opone los estudiantes menores de una de las escuelas públicas, asociados con la inseguridad en las respuestas, a los estudiantes mayores o de la escuela técnica. En cambio, interpretamos el Eje II como un factor que representa la asimilación de infinito a un número muy grande y que tiene asociada por ejemplo, la idea de que los granos de arena deben ser infinitos.

Opone la no aceptación de la posibilidad de obtener infinitos elementos, a la falta de respuesta y a respuestas que aceptan la posibilidad de obtener infinito a partir de 3 elementos que se repiten. Opone también a los dos colegios no técnicos y también opone los estudiantes mayores (cercanos al *Colegio* B) a los estudiantes menores (cercanos al *Colegio* A). Hemos analizado la posibilidad de considerar un tercer eje y con él, los planos que este eje determina con los ejes 1 y 2, encontrando que su consideración no agrega información relevante a la ya obtenida.

Habiendo partido de los sujetos sin clasificar, el análisis de los resultados del AFCM sobre el plano factorial conformado por los primeros ejes nos permitió identificar cuatro grupos de estudiantes que compartían las ideas respecto de los aspectos indagados en el cuestionario, como así también posibles relaciones de esos grupos de estudiantes que responden en forma similar el cuestionario y sus características de edad, género o colegio al que asisten.

Encontramos así un grupo de respuestas caracterizado por las respuestas correctas a todas las preguntas (en el cuadrante superior izquierdo, ver Gráfico 1), que expresa principalmente las siguientes ideas:

- *Es posible obtener infinito a partir de finitos elementos*. A partir de la combinación de una cantidad finita de elementos que se pueden repetir, obtengo una colección infinita.
- *Infinito diferenciado de "todo"*. Un elemento del referencial no necesariamente debe estar en infinito.
- *Muy grande distinto de infinito*.

La asociación entre modalidades de variables de respuesta y de caracterización presentes en este grupo nos está señalando una fuerte vinculación entre la aceptación de las colecciones infinitas y su diferenciación con colecciones de muchísimos elementos (como la de los granos de arena o la de las hojas de los árboles), y los estudiantes mayores o de los colegios B y C.

Otro grupo de respuestas se caracteriza por la *duda* o inseguridad en los distintos tópicos indagados (en el cuadrante superior izquierdo, Gráfico 1). Un tercer grupo de respuestas representa la *imposibilidad de obtener infinito*, dado que tanto si contamos con pocos o muchos elementos que se repiten o no, lo que se obtiene es mucho, no infinito (cuadrante inferior derecho, Gráfico 1).

Los estudiantes *Iniciales* y del *Colegio* A se encuentran mayoritariamente repartidos entre el segundo y tercer grupo.

El último grupo de respuestas corresponde a la no respuesta a las últimas preguntas del cuestionario. Ninguna caracterización de estudiantes está asociada a este grupo de respuestas (cuadrante derecho, arriba; Gráfico 1).

Resultados de la Clasificación: los estudiantes según las modalidades de respuesta

Realizamos la partición sobre el conjunto de los 195 individuos representados por sus coordenadas en los 5 primeros ejes del AFCM descripto previamente. La Tabla III muestra el histograma de los 20 índices de nivel más altos.

Tabla III: Histograma de los 20 índices de nivel más elevados de la clasificación jerárquica

NÚM.	EFF.	ÍNDICE	HISTOGRAMA DE LOS ÍNDICES DE NIVEL
366	7	0.00321	*
367	15	0.00416	**
368	26	0.00426	**
369	14	0.00432	**
370	7	0.00448	**
371	40	0.00581	**
372	19	0.00634	**
373	11	0.00638	**
374	43	0.00729	**
375	8	0.00763	**
376	20	0.00822	***
377	69	0.00955	***
378	14	0.00998	***
379	28	0.01023	***
380	29	0.01262	****
381	12	0.01285	****
382	23	0.01913	*****
383	19	0.02245	******
384	47	0.02721	*******
385	31	0.02886	********
386	**76**	**0.07104**	******************

Analizando los índices, podemos ver que a partir de la iteración 385, comienzan a agruparse individuos o grupos de individuos bastante distantes entre sí. Teniendo en cuenta este hecho y considerando también los saltos en el histograma, consideramos conveniente realizar la partición en 3 o 5 clases.

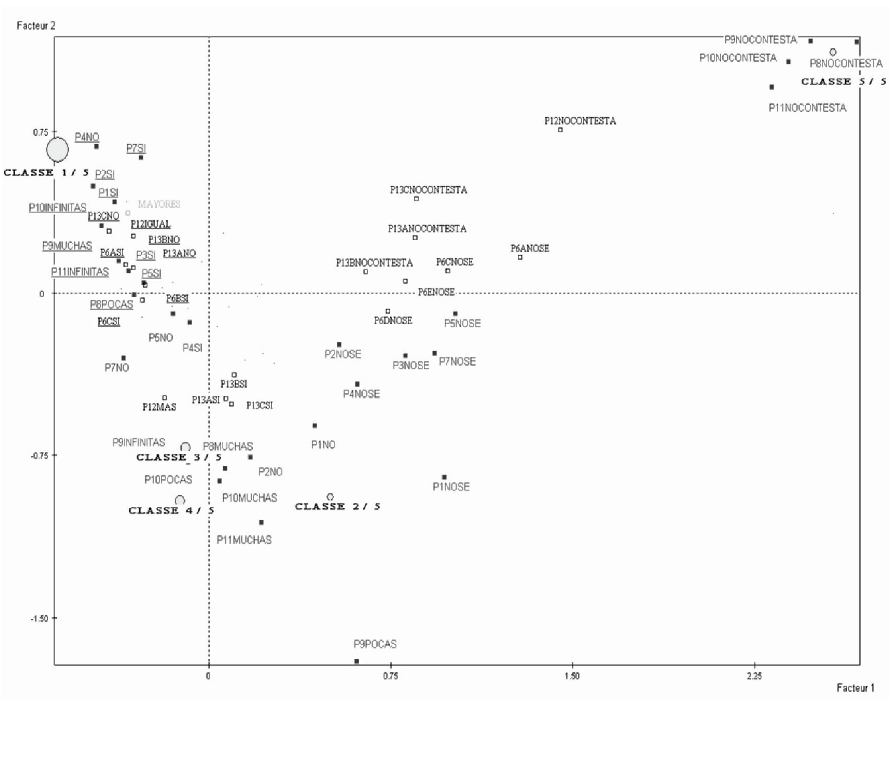
La clasificación en tres clases determina tres grupos de estudiantes asociados a *respuestas correctas, no respuestas* y *respuestas incorrectas* respectivamente. Dado que, más que observar si los estudiantes responden bien o mal, nos interesa prestar atención a *qué* responden, cuáles son las respuestas que expresan ideas alternativas y cuáles son las asociaciones entre estas respuestas, hemos decidido considerar para nuestro análisis la partición en cinco clases pues es más informativa para este propósito.

El Gráfico 1 muestra la distribución de las clases y los centros de gravedad de las mismas en el plano factorial considerado.

Esta partición en 5 clases produce una diferenciación al interior del tercer grupo del AFCM (*imposibilidad de obtener infinito)* en las clases 3 y 4 de esta clasificación, permitiéndonos un análisis más fino de las ideas alternativas y sus asociaciones, como así también de las asociaciones de estas ideas con la caracterización de los estudiantes que las manifiestan.

Describiremos cada clase a partir de los modos de respuesta característicos de los participantes pertenecientes a cada una de ellas y las modalidades de caracterización asociadas. Además, ilustramos cada clase con las justificaciones literales dadas por alguno de los estudiantes más representativos de la clase, con el sólo efecto de mostrar con las propias palabras de los estudiantes las ideas que inferimos como características de los distintas grupos de sujetos.

Gráfico 1



Proyección de las cinco clases en el primer plano factorial. Subrayamos las modalidades de variables de respuesta correspondientes a respuestas correctas. Los círculos representan el baricentro de la clase y su tamaño es proporcional a la cantidad de individuos que se encuentran en la clase.

Clase 1: Se encuentran en esta clase 86 estudiantes, correspondientes al 44.10% del total de los participantes. La clase se caracteriza por reunir una gran cantidad de estudiantes *Avanzados* y muy pocos que concurren al *Colegio* A. La característica distintiva de esta clase es que aglutina todas las respuestas correctas.

Las modalidades asociadas representan la aceptación de que con pocos o muchos elementos que se repiten es posible obtener infinitos (P1SI, P9INFINITAS, P10INFINITAS). Sin embargo, si no es posible repetir los elementos, se obtienen pocos si son pocos los elementos a combinar, o muchos si son muchos los elementos a combinar (P7POCAS, P8MUCHAS). También está presente la modalidad que representa la idea de que una colección puede tener muchísimos elementos, como el total de las hojas de los árboles, o de los granos de arena pero sin embargo no es infinita (P11aNO, P11bNO, P11cNO); en infinito no necesariamente está todo (P4NO, P6SI) y que es posible obtener infinitos elementos de manera inductiva (P5SI). En cuanto a las modalidades de respuesta presentes, hay coincidencias con el grupo 1 identificado en el AFCM.

Casi 63% de los alumnos de esta clase son *Avanzados*.

Presentamos fragmentos de justificaciones proporcionadas por algunos de los estudiantes más cercanos al centro de gravedad de cada clase, con el fin de ilustrar las ideas que conjeturamos como representativas de esta clase.

En cuanto a las modalidades de respuesta que indican que las combinaciones de elementos que se repiten son infinitas, ya se parta de pocos como de muchos elementos, encontramos justificaciones que atienden a la posibilidad de combinar los elementos. Por ejemplo:

"Porque si se pueden repetir infinitamente los dígitos, las combinaciones son infinitas" (Justificación dada a la respuesta P1SI).

Respecto a las respuestas que aseguran que si parto solo de tres elementos y no puedo repetirlos en cada combinación obtengo pocos, y si parto de 15.000.000 elementos, sin que esté permitido repetirlos, logramos muchos, encontramos que la justificación dada en algunos casos está basada en que los elementos no pueden repetirse en cada combinación:

"porque no está permitido repetir letras. Las combinaciones son muy limitadas" (justificación dada a P7POCAS),

Algunas justificaciones incluyen también una diferenciación explícita entre mucho e infinito:

"Creo que las combinaciones pueden ser muchas, ya que tiene muchas letras pero no son infinitas porque no se puede repetir." (Justificación dada a P8MUCHAS).

Clase 2: Se encuentran en esta clase 24 estudiantes que corresponden al 12,31% del total de los participantes. Se caracteriza por incluir muy pocos estudiantes mayores y tiene asociada la *duda e inseguridad en la respuesta.*

Las modalidades de respuesta que caracterizan esta clase son: P8POCAS y las correspondientes a respuestas "*no sé*" de las variables P1, P2, P3, P4, P5 y P6; es decir, de las primeras preguntas. La modalidad P8POCAS corresponde a la respuesta: *"con 15.000.000 de teclas, sin que puedan repetirse las teclas en una determinada combinación, se obtienen pocas combinaciones (menos de 1.000)".* Entre los estudiantes participantes, esta es una respuesta "rara" ya que solo 10 del total de 195 estudiantes la da. Todos ellos se encuentran en esta clase.

Ninguna modalidad de caracterización se encuentra asociada a esta clase. Sin embargo, se encuentra subrepresentada en ella la modalidad *Avanzados*. Esto quiere decir que los estudiantes que dan este tipo de respuestas generalmente no son los mayores. Estos estudiantes contestan *no sé* a casi todas las preguntas y, si bien también están todos los que responden P8POCAS, la mayoría de los de la clase, casi el 70%, contesta *no sé* a las primeras preguntas; es decir que la característica central de esta clase es la duda.

La conformación de esta clase es análoga a la del grupo 2 del AFCM, agrega a la caracterización de este grupo la información de que son muy pocos los estudiantes mayores que presentan dudas recurrentemente.

También las justificaciones presentes indican inseguridad o duda en cuanto a los distintos tópicos indagados. Por ejemplo, en cuanto a la P2 que indaga si con tres elementos que se repiten es posible obtener infinitos elementos, las justificaciones presentes hacen referencia a la duda planteada por la dificultad de lograrlo:

"No sé porque con solo tres teclas es difícil crear un idioma" (justificación dada a P2NOSE),

Otras justificaciones refieren a la duda asociada a una dificultad personal al no haber tenido la posibilidad de pensar sobre esto previamente:

"Para responder sí o no, tendría que investigar sobre el tema" (justificación dada a P2NOSE).

En cuanto a la idea de que si una colección es infinita contiene todos los elementos, encontramos también la duda o inseguridad:

"Creo que no, pero no estoy seguro" (justificación dada a P6NOSE),

Clase 3: En esta clase se encuentran 31 de los 195 estudiantes, que representan el 15.9% de los estudiantes participantes en este estudio.

Las modalidades de respuesta que caracterizan a esta clase corresponden a las respuestas que expresan las ideas: *independientemente de que esté permitido o no repetir los elementos, combinando pocos elementos se obtienen muchos pero no infinitos* (P2NO, P7MUCHAS y P9MUCHAS), y *combinando muchos elementos se obtienen infinitos* (P8INFINITAS y P10INFINITAS). También se encuentran asociadas a esta clase las respuestas que indican que *las hojas en los árboles del Parque Nacional Nahuel Huapi son infinitas* (P11aSI) y *los granos de arena en Bariloche y en el mundo son infinitos* (P11bSI y P11cSI); que expresan la idea de que *un número muy grande es infinito*.

Esta clase está caracterizada entonces por la asimilación de un número muy grande con infinito junto con la noción de que no se puede obtener infinito a partir de pocos elementos. No hay modalidades de caracterización en esta clase ni tampoco encontramos modalidades de caracterización subrepresentadas en ella. Es decir que es una modalidad de respuesta que se encuentra muy repartida entre las distintas modalidades de caracterización.

Respecto de la posibilidad de obtener infinitos elementos a partir de la combinación de tres elementos que se repiten, algunas justificaciones tienen que ver con que el proceso puede finalizar o que son muy pocos elementos:

"No sé, porque se podría llegar a un momento en el cual se interrumpe" (justificación dada a P2NO).

"Porque son pocas las letras" (justificación dada a P9MUCHAS).

En cuanto a que con 15.000.000 elementos que no se repiten se puede obtener infinitos, nos encontramos con respuestas que asimilan un número muy grande a infinito:

"Infinitas combinaciones, porque al tener 15.000.000 de teclas serán infinitas las combinaciones" (justificación dada a P8INFINITAS), es decir, un número tan grande deberá ser infinito.

Esta misma asimilación de muy numeroso a infinito, también la encontramos en las justificaciones dadas para las respuestas que aseguran que existen infinitas hojas en los árboles del Parque Nacional Nahuel Huapi, o infinitos granos de arena, en este momento:

"Sí, creo que hay "muchas"" (justificación dada a P11aSI).

También encontramos justificaciones asociadas a la imposibilidad de contar los elementos de estos conjuntos:

"Existe una determinada cantidad de granos, pero imposible de contabilizar" (Justificación dada a P11bSI).

Clase 4: Se encuentran en esta clase 35 estudiantes, casi 18% de los participantes.

Las modalidades presentes en esta clase representan las ideas de que con pocos elementos, pueda o no repetirlos en cada combinación, obtengo pocos elementos (P7POCAS y P9POCAS) y, si son muchos los elementos, obtengo muchos (P10MUCHAS), pero en ningún caso es posible obtener infinitos.

También encontramos la modalidad que representa la idea de que si retiro una cantidad finita de elementos de una colección infinita, ya NO tenemos infinitos (P6NO); lo que también podría estar expresando la idea de que, si una colección infinita es presentada como tal, entonces, debe contener <u>todos</u> los elementos.

Esta clase se parece mucho al grupo 3 del AFCM realizado previamente.

No encontramos variables de caracterización en esta clase.

Veamos algunas justificaciones dadas por algunos estudiantes de esta clase:

"Con 15 millones de letras podrías hacer muchas combinaciones pero nunca se llegaría al infinito" (justificación dada a P10MUCHAS).

"Sigo pensando igual... no es posible tantas combinaciones" (justificación dada a P9POCAS).

Clase 5: En esta clase se encuentra menos de 10 % de los estudiantes participantes (19 alumnos).

En coincidencia con el grupo 4 del AFCM, esta clase está caracterizada por las no-respuestas, principalmente a las últimas preguntas, sin estar asociada a ninguna modalidad de caracterización. Observando las modalidades subrepresentadas podemos decir que los estudiantes presentes en esta clase se caracterizan por no ser del *Colegio* C, ninguno de los estudiantes de este colegio se encuentra en esta clase.

La mayoría de los alumnos de esta clase, además de no contestar las P7, P8, P9, P10, y P11, tampoco justifican sus respuestas.

Podemos resumir la caracterización de cada clase en términos de las cuestiones estudiadas de la siguiente manera:

> **Clase 1:** Puedo tener infinito muy numeroso es distinto de infinito y en infinito no necesariamente está todo.
>
> **Clase 2:** Duda o inseguridad.

Clase 3: Un número muy grande es infinito.
Clase 4: Con pocos elementos obtengo pocos, con muchos, muchos. Es imposible construir un conjunto infinito.
Clase 5: No contesta las últimas preguntas.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

En primer lugar, notamos que todas las preguntas fueron contestadas y ninguna fue respondida de manera unánime, lo que indica que no operaron los posibles efectos *piso* ni *techo* en las preguntas (en el sentido de que haya alguna tarea que no nos ofrezca información, ya sea por demasiado simple o por demasiado compleja). Esto nos brinda confianza en que el cuestionario resultó adecuado para ser administrado a estos participantes con sus características de escolaridad y edad, permitiéndonos una indagación calibrada de las cuestiones que nos interesaron a partir de los datos obtenidos del mismo.

El análisis multivariado de las respuestas al cuestionario nos permitió reconocer patrones en las respuestas de estos estudiantes, superando la mera contabilización de *respuestas correctas* vs. *respuestas incorrectas*. En efecto, el análisis factorial de correspondencias múltiples realizado con base en las respuestas de los participantes sin clasificar, nos permitió identificar agrupaciones de patrones de respuestas, además de permitirnos encontrar asociaciones entre modos de respuestas y algunas de las características de los estudiantes que nos prefijamos para este estudio, concretamente, colegio y características evolutivo-educativas. En cambio, el género no se asoció a grupos de modalidades de respuesta.

El método de clasificación jerárquica ascendente completó este estudio brindándonos la posibilidad de identificar clases de estudiantes con modos de respuesta similares compartidas. Así, pudimos ubicar a cada estudiante en una sola clase y obtener una idea de la distribución de las concepciones acerca del infinito matemático en el conjunto de los 195 estudiantes de nivel medio participantes.

Las asociaciones entre las modalidades de respuesta de los estudiantes nos muestran un amplio espectro de ideas respecto de la posibilidad de construir una colección infinita a partir de la combinación de una cantidad finita de elementos.

Entre las ideas presentes encontramos en los extremos las posiciones que indican que *no es posible generar una colección infinita*, por un lado y en el extremo opuesto, que *es posible construir una colección infinita, independientemente de la cantidad de elementos de los que se parta.* Desde la primera posición, las colecciones infinitas no parecen ubicarse siquiera en el espectro de lo pensable o concebible. En cambio, desde la segunda posición no solo es posible pensar en colecciones infinitas, sino que también se captan los mecanismos básicos a partir de los cuales esas colecciones pueden generarse. Es de resaltar que más de 60% de las respuestas dadas a las preguntas que indagan este aspecto, son respuestas que expresan la idea de que es posible generar una colección infinita a partir de la combinación de una cantidad finita de elementos, porcentaje similar al encontrado por Fischbein *et al.* (1979) en estudiantes de edades similares a las nuestras y coincide también con los resultados obtenidos por Montoro (2005) en estudiantes universitarios.

Entre estas dos posiciones que se sitúan en dos extremos opuestos en cuanto a la posibilidad de generar colecciones infinitas o, incluso, de pensar en ellas, encontramos algunas otras posiciones que dan cuenta de niveles incipientes de problematización respecto de esta cuestión. Preferimos distinguir unas posiciones de otras en lugar de ordenarlas en una escala, pues a partir de nuestros datos no podemos afirmar que los estudiantes necesariamente transiten por estas diversas posiciones en un camino hacia una comprensión más completa. Es más, tampoco podríamos asegurar que todos los alumnos en algún momento se hayan encontrado en la posición más alejada de la representación de colecciones infinitas: aquella desde la cual estas aparecen como impensables o imposibles.

Retomando, entonces, aquellas concepciones que dan cuenta de un grado intermedio de problematización, sin ánimo de ordenarlas internamente, nos parece interesante distinguir unas de otras. Una de ellas está caracterizada por la inseguridad en la respuesta, fundamentalmente a las preguntas introductorias que investigan este tópico, lo cual sugiere una cierta conciencia de la magnitud de un problema que supera la propia posibilidad actual de representación conceptual.

Las demás concepciones que revelan un grado intermedio de problematización comparten la relevancia prioritaria dada al número de elementos del conjunto de partida. Es decir, el énfasis está puesto en la cantidad de elementos con los que se cuenta para combinar, y no en la posibilidad de repetir o no los elementos en cada combinación. Sobre la base de este principio común, encontramos dos ideas: aquella que expresa que *combinando pocos elementos, aunque se puedan repetir, es imposible obtener infinito* (pocos o muchos pero no infinitos) y la que considera que *con muchos elementos, y solo con muchos, es posible obtener infinitos*. Esta gama de ideas se había encontrado también en el estudio de Montoro (2005).

Un pequeño grupo de estudiantes manifiesta la idea de que *muchísimos elementos* son *infinitos*. Sin embargo, resulta notable que, al aumentar el número de elementos en cuestión, es mayor el número de respuestas que afirman que se trata de infinitos elementos aunque no lo sean. Esto nos está indicando que existe una identificación *muy numeroso-infinito*. Los resultados encontrados en este grupo son similares a los encontrados por Monaghan (2001) en estudiantes preuniversitarios de entre 16 y 18 años y en Montoro y Scheuer (2004) como perfil característico de los estudiantes ingresantes a carreras en las que la matemática tiene una influencia casi nula.

Las preguntas que específicamente indagan sobre la distinción entre infinito y *todo* son las que implicaron una mayor dificultad a los estudiantes, dado que fueron las que presentaron un mayor porcentaje de respuestas incorrectas que correctas o no respuestas.

Los estudiantes que diferenciaron *infinito* de *todo* son prácticamente los mismos que aceptaron las colecciones infinitas y que diferenciaron *muy numeroso* de *infinito*; estos estudiantes eran principalmente alumnos de los colegios B y C. El análisis factorial de correspondencias múltiples nos mostró que la duda respecto de la diferenciación entre infinito y todo se asoció a los alumnos menores y del *Colegio* A (Grupo 2) y la misma caracterización de alumnos se asoció también a la asimilación de *infinito* con *muy numeroso* (Grupo 3).

El contexto natural solo operó mostrando respuestas diferenciadas en las clases que evidencian una comprensión más alejada de la noción matemática.

Según los resultados del análisis de la clasificación jerárquica realizado, vemos que los alumnos que están en el último año de la escuela secundaria generalmente aceptaron las colecciones infinitas, las diferenciaron de los conjuntos muy numerosos y aceptaron también que un conjunto infinito no necesariamente posee todos los elementos; cuestión esta que no ocurrió con los estudiantes que están iniciando sus estudios secundarios. Los estudiantes intermedios (de tercer año, entre 15 y 16 años de edad) se encontraban repartidos en los distintos grupos, por lo que podemos describir esta franja etaria como de transición, en la cual están presentes todas las gamas de estas ideas. Observamos una evolución con la escolaridad y edad en el siguiente sentido: generalmente, los estudiantes más jóvenes fueron los que presentaron más dudas; es decir, se mostraron más inseguros para responder a estas cuestiones;

los estudiantes de edad intermedia se repartieron entre la duda, respuestas no adecuadas y respuestas que se ajustan al estatus matemático del infinito; y los estudiantes avanzados, principalmente, expresaron seguridad y una adecuación de sus respuestas con el estatus matemático del infinito.

En cuanto a las instituciones educativas, los estudiantes del *Colegio* A fueron los que más presentaron ideas alternativas respecto de la noción de infinito, habitualmente no aceptando las colecciones infinitas y, en el caso de aceptarlas, identificándolas con "*todo*" o con conjuntos muy numerosos. También podemos decir que los estudiantes del *Colegio* C respondieron a las preguntas o, más específicamente, no dieron por respuesta *"no sé"* a las preguntas del cuestionario. Es decir, estos estudiantes presentaron seguridad y precisión en sus respuestas. Los estudiantes del *Colegio* B y del *Colegio* C mayoritariamente aceptaron las colecciones infinitas, las diferenciaron de los conjuntos muy numerosos y diferenciaron también infinito de todo.

No se presentaron diferencias en las respuestas de los estudiantes en función del género. Esta variable no apareció en nuestro estudio como relevante.

Podemos hacer un paralelismo de estos resultados con los informados por Montoro y Scheuer (2004) y Montoro (2005), quienes encontraron que la variable de más peso para una adecuada construcción del concepto de infinito es la formación específica matemática en el sentido de que los estudiantes que más frecuentemente han trabajado con el concepto de infinito; es decir, los estudiantes de Matemática, brindaron respuestas correctas y, en nuestro caso, los estudiantes que mejor respondieron pertenecen a instituciones educativas con un proyecto educativo más sólido y con mayor énfasis en la materia matemática.

Esto coincide y fortalece la postura de varios investigadores, entre otros: Waldegg (1996); Tall (2001); Montoro y Scheuer (2004, 2006) Montoro (2005); respecto de que la noción de infinito matemático no es intuitiva, y mucho menos puede ser aprendida por la experiencia sensible, sino que se requiere de contextos educativos que favorezcan la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas y sostenidas.

Somos conscientes de las limitaciones del alcance de este estudio respecto de una explicación en profundidad de los procesos de construcción del concepto de infinito. Para dar cuenta de tal proceso, serían necesarios diseños complementarios tales como entrevista individual en profundidad o en pequeños grupos o la observación de clases a través de estudios longitudinales.

Sin embargo, nuestros resultados nos hacen pensar que los aspectos que hemos indagado de la noción de infinito resultan asequibles a los estudiantes de nivel medio, el progreso en las respuestas al avanzar el cuestionario sugiere que, en este nivel educativo, estas nociones se encuentran en lo que Vigotsky (1978) llama nivel de desarrollo potencial. Siguiendo esta línea, y asumiendo que el aprendizaje favorece el desarrollo, entendemos que, además de representar una oportunidad de reflexión, su tratamiento explícito puede colaborar con la comprensión de contenidos que involucran el concepto de infinito y que sí son curriculares en la escuela media.

Nos parece útil que los docentes puedan conocer algunas de las formas en que sus estudiantes abordan las colecciones infinitas y las dificultades que algunos pueden evidenciar para concebir incluso su existencia, como un primer paso para la planificación de estrategias educativas que favorezcan la explicitación, problematización y revisión de estos conceptos, hacia una comprensión más profunda e integrada.

La diversidad de ideas encontradas en estudiantes secundarios fortalece la perspectiva que sostiene que este concepto no debería ser asumido como transparente, sino específicamente desarrollado. La similitud de resultados respecto del estudio realizado previamente con estudiantes universitarios sugiere que es posible, sin embargo, introducirlo y trabajarlo ya desde el colegio secundario.

Datos de las autoras

María Teresa Juan y Virginia Montoro
Departamento de Matemática. Centro Regional Bariloche. Universidad Nacional del Comahue. República Argentina. mayte.juan@gmail.com/virginia.montoro@crub.uncoma.edu.ar
Nora Scheuer
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Universidad Nacional del Comahue. República Argentina.
nora.scheuer@gmail.com

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baccalá N. y Montoro, V. (2008). *Introducción al Análisis Multivariado*. Cuaderno Universitario Núm. 51. Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue.

Benzécri, J. (1973). *L'Analyse des Données*. Tomo II: *La taxonomie*. Tomo 2: *L'Analyse des Correspondences* (segunda edición 1976). París. Dunod.

Crivisqui, E. (1993). *Análisis Factorial de Correspondencias. Un Instrumento de investigación en ciencias sociales.* Edición del laboratorio de Informática Social del la Universidad Católica de Asunción. Paraguay.

DiSessa, A. A. (2008). "A bird's-eye wiev of the 'pieces' *vs*. 'coherence' controversy. (From the "pieces" side of the fence)". En Vosniadou, E. (Ed.). *Handbook of Research on Conceptual Change* Routledge. (pp. 35-60). New York

Fine, J. (1996). *Iniciación a los análisis de datos multidimensionales a partir de ejemplos.* Montevideo: Editorial Universidad de la República.

Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979). "The intuition of infinity". *Educational Studies in Mathematics, 10*, 3-40.

García O., G., Serrano, C. y Diaz, H. (1999). "¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de Número Real?" En *Revista de la facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional, 5*, 5-17.

Giordan, A. y de Vecchi, G. (1995). *Los orígenes del saber. De las concepciones personales a los conceptos científicos*. Díada: Sevilla.

Karmiloff-Smith, A. (1992). *Beyond modularity.* Cambridge, MA. Cambridge University Press. (Trad. cast.: *Más allá de la modularidad*. Madrid: Alianza. 1994).

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kilpatrick, J. (1998). La investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En Kilpatrick, J., Gomez, P. y Rico, L. (Eds.) *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 1-18). Bogotá.

Lebart, L., Morineau, A. y Fenelón, J.P. (1979). *Traitement de Données Statistiques*. París: Dunod.

Monaghan, J. (2001). "Young people's ideas of infinity". En *Educational Studies in Mathematics, 48* (2/3), 239-258.

Montoro, V. (2005). "Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios". En *Infancia y Aprendizaje, 28*, 4, 409-427.

Montoro, V. y De Torres Curth, M. (1999). "Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en el aprendizaje de la matemática". En *Epsilon, 45* (15), 357-364.

Montoro, V. y Scheuer, N. (2004). "¿Cómo piensan el infinito matemático los estudiantes universitarios de distintas carreras?" En *Epsilon*, *60*, 20 (3), 435-447.

Montoro, V. y Scheuer, N. (2006). *Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios.* En Aymerich, J. y Vives, S. (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI.* Colleció D'Informàtica I Tecnologia (22), 257-266. Castelló de la Plana: Universitat Jaume I.

Moreno Armella. L. y Waldegg G. (1991). "The Conceptual Evolution of Actual

Mathematical Infinity". En *Educational Studies in Mathematics,* 22, 211-231.
Moreno Armella. L. y Waldegg G. (1995). "Variación y representación: del número al continuo". En *Revista de Educación Matemática.* 7 (1), 12-28.
Ortiz, J. (1994). "El concepto de infinito". En *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 1* (2), 59-81.
Pozo, J. I. y Gómez Crespo M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencias*. Madrid: Morata.
Pozo, J. I, Scheuer, N., Pérez Echeverría, M. del P., Mateos, M., Martín E. y De la Cruz, M. (Eds.) (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje. Las concepciones de profesores y alumnos*. Barcelona: Graó.
Rico, L. (1997). "Los organizadores del currículo de matemáticas". En Rico, L.; Castro, E. *et al.* (Eds.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Madrid. ICE-Horsori.
Romero, A. (1997). *La introducción del número real en la enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción.* México. Servicios editoriales de la universidad de ciencias, UNAM. Colección Mathema.
Sierpinska, A. (1985). "Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite". En *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 6* (1) 5-67.
Tirosh, D. (1991). "The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorial theory". In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 199-214). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Torretti, R. (1998). *El paraíso de Cantor*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria Universidad Nacional Andrés Bello.
Vigotsky, L. (1978). *El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. (Tít. orig.: *Mind in Society. The Development of Higher psychological Processes*). México. Crítica.
Waldegg, G. (1993). "La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction". En *Annales de Didactiques es de Sciences Cognitives*. 5. 19-36.
Waldegg, G. (1996). "Identificación de obstáculos epistemológicos en el estudio del infinito actual". En *Revista Mexicana de Investigación Educativa,* 1, (1), 107-122.
Tall, D. (2001). "Natural and formal infinities". En *Educational Studies in Mathematics*, 48, (2/3), 199- 238.
Ward, J. (1963). "Hierarchical grouping to optimize an objective function". En *Journal American Statistic Association, 58*, 236-244.
Zellini, P. (2004) *Breve historia del infinito*. Madrid: Siruela.