Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada

*Martha Gabriela Robles Arredondo**
*Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez***
*Vicenç Font Moll****

Resumen: En este trabajo se presenta la descripción y la valoración de la implementación de una secuencia de actividades didácticas asistidas por computadora que promueven la construcción de significado en torno a la función derivada. Se trabajó con alumnos del primer curso de Cálculo Diferencial e Integral de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, buscando constituir, desde la noción de linealidad local y con la ayuda de un *software* interactivo, una primera introducción a este objeto matemático que favorezca su tratamiento posterior a través de límites. Para ello utilizamos algunas nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.

Palabras clave: Derivada, Función derivada, Linealidad local, Idoneidad didáctica.

Analysis and assessment of a process of instruction on the derivative

Abstract: In this paper, the description and evaluation of the implementation of a computer assisted didactic activities sequence is presented, which promotes the construction of meaning about the derivative function. We worked with students in the first Differential and Integral Calculus course, at the Division of Engineering of the University of Sonora, in order to set up, based on the local linearity notion and the use of a dynamic software, a first introduction to that particular mathematical object, that will let us work subsequently with it through limits. To be able to achieve this, we use some of the theoretical notions of the Onto-Semiotic Approach to the Mathematical Cognition and Instruction.

Key words: Derivative, Derivative Function, Local linearity, Didactical suitability.

Fecha de recepción: 9 de febrero de 2011. Fecha de aceptación 10 de enero de 2012

* Universidad de Sonora: gaby@gauss.mat.uson.mx
** Universidad de Sonora: acastillo@gauss.mat.uson.mx
** Universitat de Barcelona: vicencfont@ono.com

INTRODUCCIÓN

Las nociones de derivada en un punto y de función derivada son tradicionalmente difíciles de comprender para muchos de los alumnos en el momento del primer encuentro con ellas que, según el país, se produce en la educación media postobligatoria, o bien, al inicio de la universidad. Diferentes investigaciones han puesto de manifiesto que estas dificultades de compresión están relacionadas con las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto, por ejemplo, con el uso de las reglas de derivación. Otro problema, relacionado con el anterior, es que, en el momento del primer encuentro del alumno con la función derivada, el cálculo de la derivada usando la definición por límites resulta muy complicado para algunas funciones elementales (por ejemplo, cuando se calcula la derivada del seno).

De acuerdo con Font y Godino (2011) consideramos que, en estos momentos, a la Didáctica de las Matemáticas, tanto si es entendida como ciencia de tipo explicativo o bien de tipo comprensivo, se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes: a) comprender y explicar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas y b) guiar la mejora de dichos procesos. En el caso que nos ocupa, los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la derivada, la investigación ha generado diversas explicaciones parciales de las dificultades que tienen los alumnos para comprender la derivada en un punto y la función derivada y, con base en dichas explicaciones, se han propuesto diferentes secuencias didácticas para superarlas.

La investigación que se presenta asume una determinada explicación de las dificultades de comprensión de la derivada en un punto y de la función derivada, en concreto la que plantea el enfoque ontosemiótico (EOS), y propone una secuencia didáctica para intentar superarlas. Aparece, pues, el problema de diseñar, implementar y valorar la idoneidad de la secuencia implementada y, si es el caso, justificar que se trata de una mejora. El objetivo principal de este artículo es, precisamente, el diseño, implementación y valoración de la implementación de una secuencia de actividades didácticas asistidas por computadora que promueve la construcción de significado en torno a la función derivada. Se trabajó con alumnos del primer curso de Cálculo Diferencial e Integral de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, buscando constituir, desde la noción de linealidad local y con la ayuda de un *software* interactivo, una primera introducción a este objeto matemático que favorezca su tratamiento posterior a través de límites.

La secuencia didáctica tiene por objetivo propiciar la puesta en juego de las diferentes representaciones de la función derivada, de manera que, a partir de la gráfica de *f*, mediante una construcción visualmente convincente de la recta tangente desde la noción de linealidad local, el alumno obtenga la tabla de f', construya la gráfica correspondiente y, finalmente, identifique la expresión analítica respectiva. Se utiliza el *Applet Descartes* como herramienta que posibilita la visualización de la linealidad local, en virtud de que se trata de un *software* libre, cuyos recursos visuales facilitan que el alumno se ponga en contacto con dos nociones esenciales: la recta tangente como la recta que más se parece a la curva en las cercanías del punto de tangencia, y la no derivabilidad puntual de una función.

Es importante precisar que no se propone eludir la formalidad del tratamiento a través de límites en la construcción de la función derivada, sino brindar al estudiante una experiencia interactiva que contribuya a dar sentido a la definición formal a abordar en un momento posterior.

La estructura del artículo es la siguiente: después de esta introducción en la que se explican el problema y el objetivo de la investigación que se presenta, en el capítulo 2 se hace una breve revisión de la literatura, sobre todo en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, pero también sobre el análisis didáctico (descripción, explicación y valoración) de secuencias de actividades implementadas en las aulas. En el capítulo 3 se comenta el marco teórico utilizado, el EOS. En el capítulo 4 se explica la secuencia didáctica diseñada. En el capítulo 5 se explica la metodología. En el capítulo 6 se aplica el modelo de análisis didáctico de procesos de instrucción propuesto por el EOS poniendo el énfasis, por cuestiones de espacio, en la valoración de la implementación realizada. El artículo termina con unas consideraciones finales.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

En los cursos de Cálculo Diferencial del nivel universitario, en el momento de introducir por primera vez la derivada, es usual encontrarse con que las nociones de derivada en un punto y de función derivada son difíciles de comprender para muchos de los alumnos. Se trata de un problema didáctico relevante que diferentes investigaciones han permitido acotar: las dificultades se encuentran, precisamente, en la comprensión de las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto, por ejemplo, en el uso de las reglas de derivación. Esta dificultad de comprensión de las nociones de derivada en un punto y de función derivada se presenta no solo en relación con los alumnos, sino también con algunos profesores (Badillo, Azcárate y Font, 2011).

Las dificultades de comprensión de la noción de derivada han sido investigadas desde diferentes aproximaciones teóricas. Camacho (2011) realiza una revisión de las investigaciones que se han venido realizando en los últimos 20 años, tanto a nivel internacional como en España, en el campo de la Didáctica de las Matemáticas en la enseñanza postobligatoria. En primer lugar, analiza los estudios internacionales realizados en el seno del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) y, especialmente, en el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), con objeto de mostrar un panorama general de la investigación en este ámbito. Luego, aborda los trabajos presentados en los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Se trata de una revisión exhaustiva en la que se tienen en cuenta revisiones anteriores como la de Harel, Selden y Selden (2006). Camacho (2011) destaca la importancia de las investigaciones realizadas sobre la derivada en el marco de la teoría APOE y también considera relevantes las investigaciones realizadas en el marco del EOS. En este artículo nos limitaremos a considerar las dificultades de comprensión de la noción de derivada que han sido investigadas desde la teoría APOE y desde el enfoque ontosemiótico (EOS).

APOE es un acrónimo de las iniciales de los términos *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas*, construcciones mentales que, en el marco de esta teoría, un sujeto realiza para construir significados a partir de las situaciones problema. La propuesta teórica APOE (Dubinsky, 1991, 1996; Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Cooley, Trigueros y Baker; 2007; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011) permite delimitar y describir el camino hacia la construcción de un concepto matemático, en la mente de un sujeto –por ejemplo, el estudio de Clark *et al.* (1997) sobre la comprensión de los estudiantes de las reglas de derivación–. La descripción teórica de los pasos que ha de seguir esta construcción se llama *descomposición genética,* la cual, por otra parte, constituye la base para el diseño de secuencias de enseñanza para experimentar con los alumnos.

La teoría APOE explica el fenómeno observado en relación con la dificultad de comprensión de los sujetos sobre la noción de derivada, en términos de un desarrollo deficiente del esquema "derivada" en el sujeto. Para caracterizar dicho desarrollo se utiliza la triada *intra*, *inter* y *trans* de niveles de comprensión de un esquema propuesta por Piaget y García en la obra *Psicogénesis e historia de la ciencia* (1982).

En el nivel de desarrollo *intra* el estudiante se centra en acciones, procesos y objetos individuales, de forma aislada con respecto a otros aspectos cognitivos de naturaleza similar. En este nivel, carece de la capacidad para relacionar la acción con un sistema de condiciones a través de los cuales podría extender su aplicación e incluirlo en un sistema de transformaciones interdependientes.

En el nivel *inter* el estudiante es consciente de las relaciones presentes y puede deducir desde una operación inicial, una vez que se comprende, otras operaciones que están implicadas en ella o que puedan coordinarse con operaciones similares.

En el nivel *trans* el individuo construye una estructura subyacente que permite comprender las conexiones establecidas en el nivel *inter* y da cierta coherencia al esquema, de manera que el individuo puede decidir cuándo y cómo resulta útil el esquema.

Una de las limitaciones que tiene la teoría APOE –según Badillo, Azcárate y Font (2011); Trigueros y Martínez-Planell (2010)– es que los constructos de representación o "medio semiótico" no son considerados explícitamente en dicha teoría. Precisamente, las perspectivas semióticas ofrecen una explicación diferente, aunque no contradictoria respecto a la aportada por la teoría APOE, sobre el fenómeno observado en relación con la dificultad de comprensión de los sujetos en torno a la noción de derivada. Este fenómeno se puede explicar en términos de la complejidad ontosemiótica asociada a la derivada en un punto y a la función derivada.

Diversas investigaciones realizadas en el marco del enfoque ontosemiótico (Font, 2000a y 2005; Badillo, 2003; Font y Contreras, 2008) han puesto de manifiesto que la comprensión de la derivada está relacionada con la activación de una compleja trama de funciones semióticas que permita entender la relación entre $f'(a)$ y f'. La forma clásica de introducir el concepto de derivada, con el concepto de límite en el centro de sus acepciones local y global, conlleva un alto nivel de complejidad semiótica, lo que podría explicar el origen de la dificultad mencionada.

Otro problema didáctico relacionado con el anterior es que, en el momento del primer encuentro del alumno con la función derivada, encontrar la expresión analítica de la derivada a partir de la definición por límites resulta muy complicado para algunas funciones elementales, como la función seno o la función exponencial de la base e.

Ante estos dos problemas didácticos, se han propuesto básicamente dos tipos de secuencias didácticas alternativas: las primeras son de tipo mecanicista y no significativas, mientras que las segundas pretenden ser significativas.

Muchos profesores, dado que las dificultades se relacionan con la utilización de los límites en la definición de derivada en un punto y de función derivada (Artigue, 1998: 40-55), al enseñar dichas nociones, con frecuencia privilegian el aprendizaje de las técnicas de derivación y se considera que un estudiante ha aprendido si, al final del curso, este logra dominar las fórmulas que le permiten encontrar la expresión analítica de la función derivada, independientemente del significado que de ella haya construido. Así, se pierde de vista que la razón fundamental que justifica el estudio de la derivada es su uso como herramienta básica en el análisis, interpretación y resolución de los problemas relacionados con el cambio, en especial, lo relativo a la rapidez de la variación. Ahora bien, recurrir a clases no significativas como solución al problema de la comprensión de la derivada no constituye tal solución. Como se muestra en Pochulu y Font (2011), el análisis detallado de una clase no significativa de tipo "mecanicista" brinda explicaciones sobre por qué se presentan determinadas dificultades de comprensión en los alumnos. Según estos autores, la clase mecanicista es una de las causas de la generación de determinados problemas de comprensión de los alumnos, y el mecanismo causal es, precisamente, su estructura y funcionamiento, al no tener en cuenta la complejidad ontosemiótica asociada al objeto matemático que se quiere enseñar.

Las propuestas de mejora de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial de tipo significativo proponen otra manera de afrontar los dos problemas didácticos comentados antes, mediante planteamientos radicalmente diferentes a los de la propuesta mecanicista, entre otras razones, porque algunos casos han tenido en cuenta los resultados de la investigación didáctica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. En relación con la comprensión de las nociones de derivada en un punto y de función derivada, la sugerencia que da la teoría APOE es la implementación de ciclos formativos que permitan al sujeto realizar las construcciones mentales que resultan de la descomposición genética previamente realizada.

Desde el EOS, la sugerencia es realizar un análisis ontosemiótico *a priori* que ponga de manifiesto las diferentes configuraciones epistémicas que conforman el significado de referencia del objeto derivada, y la trama de funciones semióticas que se han de activar para relacionar entre sí los elementos de las configuraciones y las configuraciones entre ellas –como el realizado en Font (2000a); Contreras, Font, Ordóñez y Luque (2005); Font y Contreras (2008); Pino-Fan, Godino y Font (2001)– y después tener en cuenta dicha complejidad en la secuencia de configuraciones didácticas implementadas. Por ejemplo, en

Font (2000a), se analiza la complejidad semiótica de tres maneras diferentes de introducir la función derivada: 1) mediante la definición por límites, 2) hallando una condición que cumpla todas las tangentes y, a partir de ella, calcular dicha función derivada y 3) calcularla por medio de los valores de la derivada en diversos puntos, dados en una tabla. El primer método es el que, normalmente, se utiliza en los libros de texto; el segundo está sugerido por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow, mientras que el tercer método consiste en hallar primero la función derivada de una función concreta, por ejemplo la función derivada de $f(x) = x^2$, a partir de una tabla en la que se recogen las derivadas en diferentes puntos de dicha función, las cuales han sido halladas anteriormente.

La comparación de las tramas de funciones semióticas implícitas, sobre cada una de las tres maneras de introducir la función derivada, permite concluir, según Font (2000a) que la definición de f' como un límite es la que presenta mayor complejidad semiótica, ya que implica funciones semióticas que presentan notables dificultades para los alumnos. La conclusión a la que se llega en Font (2000a), a partir del análisis anterior, es que una secuencia de actividades que combine los tres procedimientos –a ser posible en el siguiente orden: 1) tercer procedimiento, 2) segundo procedimiento y 3) primer procedimiento– tiene más posibilidades de conseguir la comprensión, por parte del alumno, y evitar conflictos.

Más en general, las numerosas propuestas didácticas que pretenden resolver el problema de la comprensión de la noción de derivada mediante una enseñanza significativa, tienden a posponer la definición de función derivada por límites, en muchos casos, introduciendo primero la interpretación geométrica de la derivada. Aunque también hay otro tipo de propuestas como, por ejemplo, la de Cortés (2006) que propone iniciar la secuencia didáctica con el uso de tablas de valores de funciones para que los estudiantes entiendan y usen lo que es una razón de cambio y, con esto, empezar a construir una nueva función que permita introducir la función derivada.

Respecto a la dificultad del cálculo del límite de determinadas funciones elementales, la sugerencia es buscar métodos alternativos para encontrar la expresión analítica de la función derivada, de modo que estos no se restrinjan al uso de las reglas de derivación, o bien al cálculo directo del límite.

En Font (2000a y b) se analiza el proceso de cálculo de la función derivada y se concluye que en dicho proceso hay que considerar tres fases: 1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar f.

2) El paso de una forma de representación de f a una forma de representación de f'. 3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar f'. Entender el cálculo de la función derivada como un proceso en el que intervienen tres subprocesos, cada uno de los cuales puede utilizar representaciones diferentes, permite ampliar el abanico de técnicas de cálculo de la función derivada que no se restrinja al cálculo por límites o bien al uso de reglas de derivación (Font, 2000b). Dichas técnicas alternativas surgen bien de utilizar las posibilidades de los graficadores de funciones (por ejemplo, Tall, 1992), o bien de recuperar técnicas, gracias a las computadoras, que se desarrollaron y aplicaron en algún momento de la historia de las matemáticas (por ejemplo, Font, 2000a).

Tall (1992) propone una técnica que consiste en desarrollar el proceso siguiente utilizando las posibilidades de los graficadores:

1. Expresión analítica de $f(x) \rightarrow$ Gráfica de f'. Una manera de obtener la gráfica de la función derivada a partir de la expresión analítica de f consiste en utilizar un graficador para representar la función $pf_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (función gradiente o función pendiente de la función f según un incremento h) con h suficientemente pequeño. La **gráfica** que dibuja el graficador se puede considerar que "es" la gráfica de la función derivada.
2. Gráfica de $f' \rightarrow$ Expresión analítica de f'. El alumno ha de reconocer, o bien hallar, la fórmula de la gráfica que ha obtenido en la pantalla de la computadora. Precisamente este último punto es el que presenta más dificultades en los alumnos. Dicho de otra manera, la incorporación de la tecnología conlleva dar un papel relevante a las representaciones gráficas (contrariamente a lo que pasaba antes), y obliga a dedicar tiempo para trabajar en el aula tanto las representaciones gráficas de las funciones como la conversión de la representación gráfica a su expresión analítica.

Font (2000a) propone una técnica de cálculo de la función derivada sugerida por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow. Se trata de considerar, de entrada, un punto particular con la tangente o la normal dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, inicialmente, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla una condición que cumplen todas las rectas tangentes (por ejemplo, en el caso de la parábola que la subtangente es la mitad de la abscisa), lo que permite calcular su pendiente. Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera. Se trata de proponer a los alumnos una secuencia de actividades informáticas que está a mitad de camino entre el problema de la tangente y su inverso –no es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el problema inverso, ya que se conoce la expresión analítica de la función–. Realizar la construcción con computadora facilita las acciones de los alumnos sobre dicha construcción y les permite encontrar una condición que cumplen todas las tangentes (utilizando el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, o bien otro semejante). Construcciones de este tipo permiten que los alumnos calculen funciones derivadas sin necesidad de utilizar límites, siempre que se haya trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto.

Las técnicas alternativas de cálculo de la función derivada que estamos considerando al dar un papel preponderante a las representaciones gráficas, conllevan el uso de graficadores con representaciones dinámicas que, además, permiten experiencias interactivas. Este hecho plantea algunos problemas que la investigación sobre el uso de la tecnología ha puesto de manifiesto: el uso de la tecnología permite que los alumnos experimenten, vivan, perciban, encuentren invariantes, etc., lo cual se relaciona con la actividad kinestésica que permite al alumno pasar de un estado estático a uno dinámico en el proceso del aprendizaje (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006). El uso de la tecnología implica pasar de una concepción estática de las funciones a una dinámica, lo cual pude llevar a los maestros a generar en los alumnos metáforas sobre las funciones del tipo "una gráfica es un camino" (Font, Bolite y Acevedo, 2010).

Hasta hace poco tiempo no se habían desarrollado herramientas potentes de análisis didáctico en el área de la educación matemática que permitieran describir, explicar, valorar y guiar la mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Actualmente, como consecuencia del desarrollo en las diferentes áreas de investigación que se dedican a estudiar dichos procesos, existen distintos modelos de análisis didáctico. Entre ellos, están el enfoque epistemológico en educación matemática (Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría Antropológica de lo Didáctico), las diferentes aproximaciones socioculturales (por ejemplo, Planas e Iranzo, 2009) o los que pretenden ser modelos integradores, como el propuesto por el enfoque ontosemiótico (Godino, Contreras y Font, 2006; Font, Godino y Planas, 2010; Pochulu y Font, 2011). En Coll y Sánchez (2008) se discuten aspectos básicos a considerar en el desarrollo de modelos para el análisis de la interacción y práctica educativa en el aula. Para este trabajo hemos considerado un modelo concreto, el cual ha sido desarrollado en el llamado Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, y lo hemos aplicado para analizar un determinado proceso de instrucción.

ELEMENTOS TEÓRICOS

El enfoque ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006; Font, Planas y Godino, 2010), es el marco teórico utilizado en esta investigación. Concretamente, hemos tenido en cuenta: 1) la reflexión realizada por este marco teórico sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su emergencia a partir de las prácticas, 2) su propuesta de modelo de análisis de procesos de instrucción (Font, Planas y Godino, 2010; Pochulu y Font, en prensa) y, sobre todo, 3) el trabajo de Font (2005) en el que se realiza un encaje de las ideas de Duval (1995 y 2006) dentro de dicho enfoque, proponiéndose la siguiente manera de entender el cálculo de la función derivada (Font, 2005: 118):

> (...) el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ se puede interpretar como una práctica, en la que a su vez se han de considerar tres subprocesos: 1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$. 2) El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$. 3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

Los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos, son cuatro representaciones de la función y cuatro de su función derivada (descripción verbal, gráfica, fórmula y tabla).

Para el diseño de la secuencia didáctica se consideró, de acuerdo con Font (2000a y 2005), el proceso de cálculo de f' como compuesto por tres subprocesos que suponen la activación de diferentes ostensivos: 1) traducciones y conversiones entre representaciones de f (en nuestro caso, Gráfica de $f(x)$ ⇨ *zoom* Gráfica de $f(x)$), 2) el paso de una representación de f a una de f' (en nuestro caso, *zoom* Gráfica de $f(x)$ ⇨ Tabla de $f'(x)$), 3) traducciones y conversiones entre representaciones de f' (en nuestro caso, Tabla de $f'(x)$ ⇨ Gráfica de $f'(x)$ ⇨ Expresión analítica de $f'(x)$). Por otra parte, El objeto función derivada es concebido, pues, como emergente del sistema de prácticas asociadas a la resolución de cierto tipo de problemas matemáticos.

En la secuencia diseñada, el sistema de prácticas del que se espera que emerja el objeto función derivada, es de naturaleza intramatemática. El estudiante se enfrenta a la situación problema de construir la función derivada de una función f, tomando como punto de partida la gráfica de esta. Con la ayuda de la técnica de acercamiento proporcionada por el *software* (*zoom*), el alumno podrá observar a la gráfica de f como un segmento de recta en las cercanías de cada punto considerado. Así, a partir de la puesta en juego de propiedades, conceptos y elementos lingüísticos relacionados con objetos matemáticos asociados a la función derivada, se promueve el tránsito por las diferentes representaciones de f' (tabla, gráfica y expresión analítica), mediante la resolución de situaciones más específicas, con base en argumentos que explican y validan las acciones emprendidas. El sistema de prácticas descrito constituye la base sobre la cual va desarrollándose el significado personal del alumno respecto a la función derivada, en consistencia con el significado institucional de referencia.

En nuestra investigación, se utilizó el modelo de análisis didáctico propuesto en Font, Planas y Godino (2010) para describir, explicar y valorar el proceso de instrucción efectuado, con base en la identificación de diferentes configuraciones didácticas (CD), cada una de las cuales corresponde al conjunto de interacciones generadas a partir de una situación problema específica. Dicho modelo de análisis didáctico de procesos de instrucción considera los siguientes cinco niveles: 1) Identificación de prácticas matemáticas, 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, 4) Identificación del sistema de normas y metanormas y 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Los cuatro primeros niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto nivel se centra en una valoración basada en los cuatro análisis previos, y orientada hacia la identificación de mejoras potenciales del proceso de estudio en futuras implementaciones. Para ello, en el EOS se proponen los siguientes criterios de idoneidad:

Idoneidad epistémica, que se refiere a que las matemáticas enseñadas sean unas "buenas matemáticas". Para ello, además de tomar como referencia el currículo prescrito, se trata de tomar como referencia a las matemáticas institucionales que se han transpuesto en el currículo.

Puede incrementarse presentando a los alumnos una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); procurando el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, analítico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen, asegurando que se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando, asimismo, las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, estableciendo relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etcétera.

Idoneidad cognitiva, que expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/implementados.

Puede incrementarse si se verifica, por una parte, que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y, por otra, que los contenidos que se pretende enseñar se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable); procurando incluir actividades de ampliación y de refuerzo; realizando una evaluación formativa durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje que nos asegure que los alumnos se han apropiado de los contenidos enseñados.

Idoneidad interaccional, que se refiere al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

Puede incrementarse realizando una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, buena dicción, uso correcto del pizarrón, énfasis suficiente en los conceptos clave del tema, etc.); procurando reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos (interpretando correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, etc.); utilizando diversos recursos retóricos argumentativos para captar, implicar, etc. a los alumnos; procurando facilitar su inclusión en la dinámica de la clase y no la exclusión; favoreciendo el diálogo y comunicación entre los estudiantes; contemplando momentos en los que estos asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación), etcétera.

Idoneidad mediacional, que se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Puede incrementarse utilizando materiales manipulativos e informáticos; procurando que las definiciones y propiedades sean contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones, y procurando invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema y en aquellos contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Idoneidad emocional, que se refiere al grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.

Puede incrementarse seleccionando tareas de interés para los alumnos, promoviendo la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional; promoviendo la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.; favoreciendo la argumentación en situaciones de igualdad, de manera que el argumento se valore en sí mismo y no por quién lo dice; promoviendo la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas, etcétera.

Idoneidad ecológica, que se refiere al grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etcétera.

Puede incrementarse verificando que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; asegurando que dichos contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes; procurando que los contenidos que se enseñan se relacionen con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, etcétera.

Hemos optado por el modelo de análisis propuesto por el EOS porque consideramos que integra aspectos del llamado enfoque epistemológico y de las teorías socioculturales. Por una parte, el análisis de las prácticas, objetos y procesos matemáticos permite describir las matemáticas del proceso de instrucción analizado, mientras que el de las interacciones y de la dimensión normativa permite describir la interacción producida en el proceso de instrucción y las normas que la regulan. Por último, los criterios de idoneidad implican la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etcétera.

LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Como elementos que intervienen en la realización de cada una de las actividades didácticas se identifican los siguientes:

- *Applet Linealizador.* Escenario interactivo configurado con el *Applet Descartes*, que constituye el recurso indispensable para la realización del ejercicio (Figuras 1 y 2).

Figura 1. Escenario interactivo configurado con el *Applet Descartes*

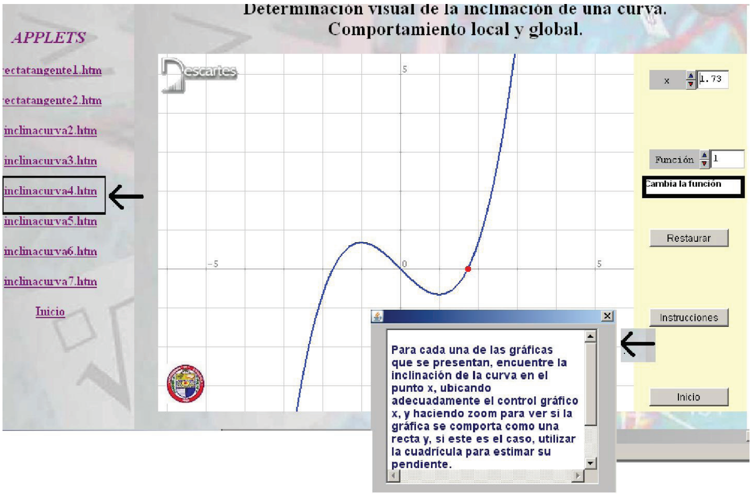
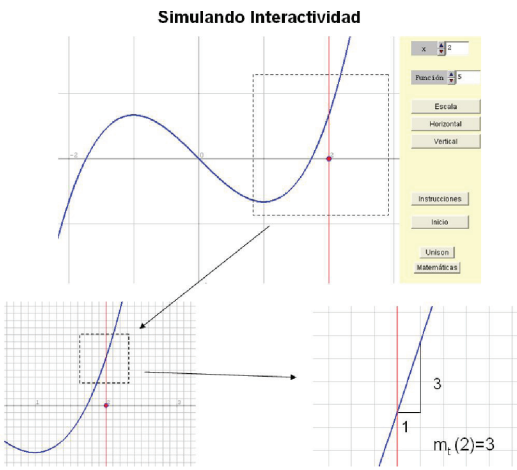


Figura 2. Proceso de acercamiento (*zoom*)



- *Hoja de Trabajo*. Documento que contiene una colección de gráficas de funciones, cuidadosamente seleccionadas y analíticamente no identificadas, así como una serie de indicaciones y preguntas que constituyen la guía de trabajo.

Además de las hojas de trabajo, el material impreso que soporta a la secuencia didáctica incluye un instrumento de diagnóstico (Cuestionario 1) y otro de evaluación (Cuestionario 2). El Cuestionario 1 contiene ocho reactivos que conducen la actividad del alumno, solicitándole que responda una pregunta, que complete una afirmación, o bien, que realice una tarea, buscando con ello determinar si los estudiantes cuentan con los conocimientos previos requeridos para el abordaje de la secuencia. El Cuestionario 2, por otra parte, contiene solo dos reactivos en formato de pregunta, cuya respuesta requiere que el alumno ponga en juego un sistema de prácticas consistente con los significados personales que se espera haya logrado como resultado de la implementación de la secuencia didáctica. Los dos cuestionarios y las siete hojas de trabajo pueden encontrarse en Robles (2010: 113, 153, 161).

A continuación, se presenta una breve descripción de las siete actividades didácticas que, con el apoyo de los applets de trabajo diseñados gracias a la configurabilidad del *Applet Descartes*, fueron desarrolladas mediante las hojas de trabajo respectivas.

Actividad 1

Esta actividad presenta al estudiante una justificación visual de una proposición que es el eje de esta propuesta: *la recta tangente es la recta que mejor aproxima a una curva en las cercanías del punto de tangencia*. Así, el proceso de acercamiento (*zoom*) permite mostrar al alumno que, de todas las rectas que pasan por un punto dado de la curva, hay una que tiene como pendiente la misma que el segmento visualizado: la recta tangente.

Actividades 2 a 6

En estas cinco actividades, el proceso linealizador se aplica a un conjunto de gráficas que abarcan funciones lineales, funciones cuadráticas, polinomios de grados 3 y 4, una selección de funciones trascendentes y la función exponencial natural.

Se pretende propiciar que el estudiante aplique la técnica de acercamiento a la gráfica de una función f analíticamente no identificada, de manera que, a partir de una tabla obtenida mediante el trabajo dinámico realizado con el *applet* Linealizador, construya la gráfica correspondiente y, finalmente, obtenga la expresión analítica de una función $m_t(x)$ que, en el proceso de institucionalización, será identificada como *la función derivada de* f. Además, con estas actividades se promueve también, aprovechando los recursos visuales del *software*, un primer contacto con la teoría de máximos y mínimos.

Actividad 7

En esta última actividad se analizan las gráficas de tres funciones no derivables en uno o más puntos. Para estas funciones la no derivabilidad puntual se asocia a cambios abruptos en la curva, o bien, a la existencia de una recta tangente vertical.

En relación con los *applets* de trabajo, es importante decir que Descartes es un programa realizado en lenguaje Java y, por su característica de ser configurable, ofrece la posibilidad de diseñar escenarios interactivos (o *applets*) en forma de pizarra electrónica, que pueden insertarse en las páginas web (Tellechea, 2004, 2007). Estos *applets* ofrecen al usuario la posibilidad de una interacción libre y dinámica que permite explorar, detectar patrones de comportamiento y conjeturar sobre los objetos representados y sus características. Por todo esto, el conjunto de applets constituye el recurso indispensable para la realización de la tarea matemática propuesta por la secuencia de actividades didácticas.

En el sitio http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Secuencia_Gaby/secuencia.htm, además de las versiones electrónicas de los dos cuestionarios y las siete hojas de trabajo, pueden encontrarse los vínculos a los ocho *applets* de Java utilizados, de manera que la activación de cualquiera de ellos hace posible la interacción con el *applet* Linealizador correspondiente, desde cualquier computadora.

La técnica de acercamiento que permite la visualización dinámica de la linealidad local en cada uno de los *applets* consta de dos procedimientos básicos:

1. Para aplicar el zoom en torno a un punto dado de la gráfica de f, señalar con el botón derecho del mouse la región correspondiente a la cuadrícula en que se presenta la curva respectiva, arrastrando hacia arriba para acercar la imagen, o hacia abajo para alejarla.

2. Para desplazar la gráfica en cualquier dirección, señalar cualquier parte de la cuadrícula con el botón izquierdo del mouse y arrastrarlo hasta ubicar la imagen en la posición deseada.

METODOLOGÍA

De acuerdo con Font y Godino (2011), consideramos que la Didáctica de las Matemáticas debe aspirar a la mejora del funcionamiento de sus procesos de enseñanza y aprendizaje y que, por tanto, se necesitan criterios de idoneidad o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y guiar su mejora. Se trata de realizar una meta-acción (la valoración) que recae sobre acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción). En definitiva, son necesarios criterios de idoneidad que permitan contestar a la pregunta genérica, "¿Sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora de los procesos de instrucción matemática? Los principios y criterios de idoneidad son reglas de corrección útiles en dos momentos de los procesos de instrucción matemáticos. *A priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". *A posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado.

Desde esta perspectiva la investigación en Didáctica de las Matemáticas se ha de interesar por 1) caracterizar estos criterios de calidad y 2) realizar investigaciones concretas en las que se apliquen dichos criterios con el objetivo de valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, para poder así proponer acciones encaminadas a su mejora en futuras implementaciones. Un ejemplo de criterios de calidad son los Principios del NCTM (2000), y otro el de los criterios de idoneidad formulados por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006), que son los que se han aplicado en esta investigación.

De acuerdo con el EOS, entendemos que es necesario el estudio exhaustivo de aspectos descriptivos y explicativos de un proceso de instrucción para poder argumentar valoraciones fundamentadas sobre esta situación, mediante la aplicación de los criterios de idoneidad comentados anteriormente. Por tanto, la metodología aplicada en esta investigación ha consistido en 1) el diseño de una secuencia didáctica, en la que se han tenido en cuenta los criterios de idoneidad *a priori*, 2) su implementación, 3) su descripción detallada, la cual sirve de base a la última fase que es 4) la aplicación de los criterios de idoneidad para valorar el proceso de instrucción y guiar su mejora.

Esta metodología puede ser aplicada tanto por un investigador externo, como por un profesor que juega al mismo tiempo el rol de investigador, que ha sido el caso de este trabajo. En ambos casos, lo que es determinante es que la valoración se base en una descripción detallada del proceso de instrucción y en un proceso de triangulación, con el objetivo de impedir que se acepten con demasiada facilidad las valoraciones iniciales.

La implementación de la secuencia didáctica se llevó a cabo con el Grupo 6 de Cálculo Diferencial e Integral I, del primer semestre de la carrera de Ingeniería Química, que estuvo a cargo de la profesora/investigadora durante el periodo 2009-2 (segundo semestre del año 2009), y que corresponde a la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, Unidad Centro. Las actividades didácticas fueron objeto de un pilotaje previo realizado con un grupo a cargo de otro profesor, cuyas características eran similares a las del grupo investigado, con el objeto de identificar conflictos semióticos potenciales que pudieran sugerir alguna mejora en el diseño de los materiales de trabajo.

El Cuestionario 1, como instrumento diseñado para recoger evidencias en relación con los conocimientos previos de los estudiantes, se aplicó inmediatamente antes de iniciar con las actividades didácticas, mientras que el Cuestionario 2 se aplicó al final de ellas.

El gran tamaño del grupo piloto (41 alumnos inscritos), evidenció la necesidad de realizar la parte de la investigación correspondiente a la determinación de los significados personales de los alumnos a través de un estudio de casos, para lo cual se seleccionaron cinco estudiantes de entre aquellos que, además de mostrar disposición a expresarse por escrito, hubieran realizado la secuencia completa (siete actividades y dos cuestionarios), cuidando de abarcar sistemas de prácticas tanto consistentes como no consistentes con los significados institucionales de referencia. Los cinco alumnos fueron identificados conforme al orden alfabético reportado en el acta oficial del grupo.

Las evidencias obtenidas durante la fase experimental, así como el análisis didáctico realizado fueron sometidos a la técnica de triangulación. Primeramente, se realizó una triangulación de datos, ya que, además de las respuestas a las hojas de trabajo, se consideraron como evidencias las grabaciones de audio realizadas por la profesora/investigadora durante la aplicación de la secuencia, así como sus anotaciones tras la revisión de las respuestas a las hojas de trabajo y en relación con las sesiones de discusión e institucionalización. Finalmente, los resultados obtenidos de la interpretación de las evidencias fueron objeto de una triangulación de expertos, pues el análisis inicial fue sometido a la opinión de especialistas en el tipo de análisis didáctico aplicado.

La investigación realizada mediante el análisis del proceso de instrucción promovido por la implementación de la secuencia didáctica es de tipo exploratorio, ya que no se pretende generalizar a otros contextos o poblaciones; además, el nivel de análisis es puntual, pues investiga el estudio de una cuestión matemática específica en un contexto determinado.

ANÁLISIS DIDÁCTICOS

La aplicación del modelo análisis didáctico de procesos de instrucción propuesto por el EOS tuvo primero una finalidad descriptiva-explicativa (apartado siguiente), y después valorativa (apartado Análisis valorativo). Por cuestiones de espacio, en este trabajo desarrollamos con más profundidad la parte valorativa.

ANÁLISIS DESCRIPTIVO/EXPLICATIVO

Los primeros cuatro niveles de análisis propuestos por el modelo teórico utilizado permitieron apreciar claramente la complejidad de la interacción didáctica en efecto observada a lo largo del proceso de instrucción efectuado, así como aquellos elementos discursivos y normativos que hubieran podido condicionar la situación de aprendizaje. A continuación, se comenta lo observado a lo largo del proceso de instrucción en relación con cada uno de los primeros cuatro niveles; los niveles 1 y 2 se refieren a los contenidos matemáticos puestos en juego, mientras que los niveles 3 y 4 se orientan hacia la interacción didáctica.

Identificación de prácticas matemáticas (Nivel 1)

En este primer nivel de análisis, se hace una identificación de las prácticas matemáticas propuestas por la secuencia didáctica, entendidas como aquellas acciones o manifestaciones (lingüísticas o de otro tipo) realizadas a lo largo del proceso de instrucción, en cuanto a los problemas matemáticos involucrados, su resolución, comunicación o generalización a otros contextos y problemas.

En el caso particular de la Actividad 1, el propósito es el de conducir al alumno desde su noción de recta tangente como la que toca un solo punto de la circunferencia, hasta la conjetura de que la recta tangente puede tocar a la curva en más de un punto o cortarla y seguir siendo tangente en la zona de corte.

Los sistemas de prácticas promovidos por las actividades 2 a 6, que constituyen el eje de la secuencia, tienen el propósito de que, a partir de la gráfica de f y desde la noción de linealidad local, el alumno se apoye en la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente para llegar a la identificación de la expresión analítica de la función derivada f'.

En cuanto a la séptima y última de las actividades, el objetivo es esencialmente distinto al de las precedentes, ya que en ella se busca poner al estudiante en contacto con la noción visual de *no derivabilidad en un punto*. Así, en dos de los casos, las situaciones problema y el sistema de prácticas promovido tienen el propósito de llevar al estudiante a concluir que la diferencia entre una curva suave y otra que presenta algún cambio abrupto en su comportamiento gráfico, radica en que sea posible o no reemplazarla localmente por un segmento de recta único, mientras que, en un tercer caso, se pretende que el alumno identifique que la derivabilidad en un punto está relacionada con un valor real de la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos (Nivel 2)

En este segundo nivel de análisis, la atención se centra sobre los objetos matemáticos puestos en juego durante la realización de las prácticas matemáticas. Si consideramos los objetos matemáticos activados en la realización y evaluación de una práctica matemática que permite resolver una *situación problema*, observamos el uso de *representaciones*, verbales, icónica, analíticas, etc. Estas representaciones son la parte ostensiva de una serie de *conceptos-definiciones*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si la práctica realizada es satisfactoria. Así, cuando un alumno realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado (llamado configuración epistémica en el EOS) formado por situaciones problema, representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, llamados objetos primarios en el EOS (Godino, Font & Batanero, 2007).

El análisis se orienta, esencialmente, hacia la identificación de las redes de objetos involucrados, a partir de la elaboración de *configuraciones epistémicas de objetos matemáticos*, sin dejar de aludir a los procesos matemáticos efectuados a lo largo del proceso de instrucción. La trama de objetos matemáticos *intervinientes* y *emergentes* (Font, 2007: 113-114) es descrita para cada una de las actividades didácticas, de manera que el análisis de cada configuración permite identificar, además, procesos matemáticos asociados como los de significación, materialización, generalización, algoritmización, comunicación, enunciación, argumentación e institucionalización, entre los más relevantes.

La descripción detallada de las configuraciones epistémicas correspondientes a cada una de las actividades didácticas puede encontrarse en Robles (2010). En este trabajo nos limitaremos a presentar el resumen de la Tabla 1.

Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas (Nivel 3)

Una configuración epistémica proporciona información sobre las prácticas matemáticas implementadas a partir de una situación problema y sus lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos asociados. Considerando que la implementación de dichas prácticas puede estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien distribuirse entre ambos, además de la configuración epistémica, hay que considerar las configuraciones docente y discente, de manera que la articulación de las tres constituye lo que se identifica como *configuración didáctica*. En cada proceso de instrucción se produce una *trayectoria de configuraciones didácticas*, que a su vez se descompone en trayectorias más específicas, cuyo análisis lleva a la comprensión global de la trayectoria didáctica en su conjunto. Las tres trayectorias específicas que consideramos en esta investigación pueden agruparse en dos: *trayectoria epistémica* (distribución temporal de prácticas, objetos y procesos) y *trayectoria instruccional* (docente y discente).

La elaboración de las tres trayectorias pasó por diferentes momentos. Primero, se elaboraron *a priori* las trayectorias epistémica, docente y discente, cada una de las cuales presenta la distribución en el tiempo que se esperaba tuvieran los objetos matemáticos involucrados, de las funciones del profesor y de las acciones de los estudiantes, respectivamente. En un segundo momento, la contrastación entre estas trayectorias teóricas (*a priori*) y la información empíricamente obtenida durante el proceso de instrucción y del estudio de casos de los cinco alumnos seleccionados permitió elaborar las trayectorias *a posteriori*, lo cual aportó información valiosa, entre otros aspectos, en relación con los conflictos semióticos presentes en las interacciones observadas durante la implementación de la secuencia.

De acuerdo con el EOS, entendemos por conflicto semiótico cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). La aparición y no resolución de dichos conflictos se relacionan con un significado personal limitado en el estudiante respecto a la función derivada. En Robles (2010) se detallan los conflictos semióticos observados. A continuación, se presentan brevemente algunos comentarios al respecto.

Los conflictos semióticos más claramente identificados se refieren a dificultades para asociar el signo de la función derivada con el comportamiento creciente o decreciente de la función f, así como para realizar una comparación entre f' y f' a partir de argumentos gráficos. Además, los alumnos enfrentaron una dificultad ampliamente documentada (Font, 2000: 225-237; Del Castillo, 2004: 5): el paso del lenguaje gráfico al lenguaje analítico.

En Robles (2010: 131-151) se detallan los conflictos semióticos presentados, haciendo referencia explícita a las trayectorias teóricas elaboradas.

Identificación del sistema de normas y metanormas (Nivel 4)

Para analizar el aspecto normativo del proceso de estudio investigado, además de considerar las respuestas registradas por los cinco estudiantes en las hojas de trabajo, se tuvieron en cuenta las normas que intervinieron durante las sesiones de retroalimentación e institucionalización realizadas al inicio de cada nueva actividad con respecto a la inmediata anterior. A este respecto, cabe aclarar que las normas observadas se refieren al grupo en lo general, y no solamente a los cinco alumnos estudiados.

Para la identificación de las normas y metanormas presentes durante la implementación de la secuencia didáctica, se puso especial cuidado en detectar tanto situaciones presentadas con regularidad, como aquellos momentos de la interacción didáctica asociados a algún tipo de ruptura con respecto al patrón esperado.

En cuanto al papel del profesor, se identificaron aquellas normas que reflejaran expectativas de actuación, mientras que, en relación con los estudiantes, el foco se colocó sobre aquellas ideas preconcebidas que hubieran podido llevarlos a desacatar o a malinterpretar las normas del docente.

Los cuatro primeros niveles de análisis descritos permitieron descomponer el proceso de instrucción en una trayectoria de configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006), y, para cada una, estudiar diferentes aspectos. Así, con objeto de integrar los elementos arrojados por los cuatro niveles de análisis abordados hasta el momento, se presenta la Tabla 1 que condensa los aspectos más relevantes del proceso de instrucción investigado, aportando una panorámica de la interacción didáctica generada con información por renglón o por columna, según sea el interés.

Tabla 1. Resumen de los niveles de análisis 1-4

Configuración didáctica	*Prácticas*	*Objetos*	*Procesos*	*Funciones del docente*	*Funciones del alumno*	*Conflictos*	*Normas del docente*	*Normas del alumno*
CD1:	Observación de la linealidad local de *f*. Construcción de la tabla de $m_t(x)$ Construcción de la gráfica de $m_t(x)$	Tabla de $f'(x)$ Gráfica de $f(x)$	Problematización. Materialización Significación Particularización Algoritmización Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Explora, interpreta y formula.		La hoja de trabajo debería resultar suficiente para el desarrollo de la práctica	Si no entiendo una instrucción a la primera, puedo pedirle al profesor que me explique lo que quiere que yo haga.
CD2:	Identificación analítica de $m_t(x)$	Expresión analítica de $f(x)$	Significación Materialización. Comunicación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, socializa y argumenta.	Dificultad en el paso del lenguaje gráfico al analítico	La notación $m_t(x)$ debiera resultar consistente con el hecho de que la función a construir expresa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de abscisa *x* dada.	Para identificar a la función pendiente de la recta tangente puede utilizarse la notación acostumbrada para cualquier función; es decir, en términos de $f(x)$ o de y
CD3:	Identificación analítica de *f*	Expresión analítica de $f(x)$	Significación Materialización. Comunicación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, socializa y argumenta.	Dificultad en el paso del lenguaje gráfico al analítico	Si un alumno entiende bien algo, debe ser capaz de expresarlo por escrito.	Una cosa es entender algo y otra poder expresarlo por escrito.

Configuración didáctica	*Prácticas*	*Objetos*	*Procesos*	*Funciones del docente*	*Funciones del alumno*	*Conflictos*	*Normas del docente*	*Normas del alumno*
CD4:	Comparación gráfica de *f* y $m_t(x)$	Complejidad relativa entre las gráficas de *f* y	Significación Enunciación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, formula y argumenta.	Dificultad para argumentar en el contexto gráfico.	Se suponen suficientes los contenidos abordados en este curso, por lo que los alumnos no tienen por qué recurrir a conceptos estudiados en el curso de Cálculo de preparatoria.	No es necesario hacer todo este trabajo si ya sabemos que $m_t(x)$ es la derivada
CD5:	Relación entre el signo de $m_t(x)$ y el comportamiento creciente o decreciente de f	Nociones elementales del criterio de la primera derivada para máximos y mínimos relativos	Significación Enunciación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Explora, interpreta, formula y argumenta.	Dificultad para comprender la indicación.		
CD6:	Comparación analítica de f y $m_t(x)$	Complejidad relativa entre las expresiones analíticas de *f* y $m_t(x)$	Significación Enunciación Argumentación Institucionalización	Asigna, regula y evalúa la actividad. Institucionaliza.	Interpreta, formula y argumenta.			

Análisis valorativo

La valoración de la idoneidad didáctica de la secuencia se desarrolla a partir de los seis criterios de idoneidad propuestos en el EOS. A excepción de la idoneidad epistémica cuya valoración es independiente del momento en que esta se realice, para cada criterio se presenta una comparación entre lo esperado a partir del diseño de la secuencia (*a priori*), y lo observado como resultado de su implementación (*a posteriori*).

Idoneidad epistémica

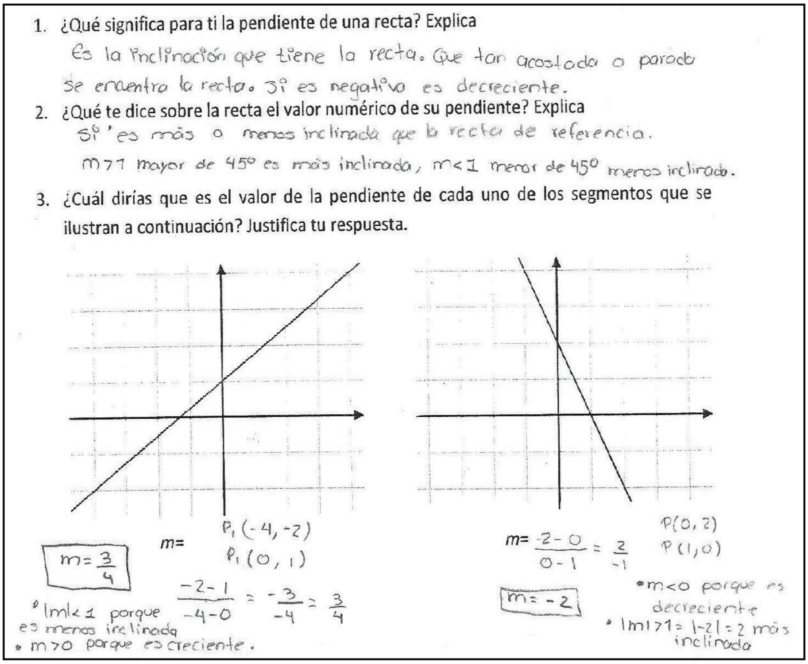
Las actividades didácticas fueron diseñadas cuidadosamente con la intención de implementar un sistema de prácticas que promoviera la construcción significativa de la funciócando que, más allá de las técnicas de derivación, la ruta procedimental plan derivada, busnteada permitiera al alumno acercarse intuitivamente a la perspectiva puntual de la derivada y, desde ahí, acceder a la noción funcional. Por lo que respecta al concepto de tangencia, el sistema de prácticas promovido por la primera actividad de la secuencia tuvo como único propósito la rectificación de una noción primaria asociada al caso de la circunferencia, y la consecuente emergencia de otra, que fuera más consistente con el significado institucional de referencia y que constituyera el punto de partida para la realización del resto de las actividades. Consideramos que estos elementos apuntan hacia una idoneidad epistémica alta.

Idoneidad cognitiva

A priori: En la fase de pre-Cálculo, se consideró una prioridad establecer un sistema de prácticas que garantizara cierto grado de familiaridad de los alumnos con las distintas representaciones asociadas a las funciones principales del Cálculo. Este sistema de prácticas se orientó, principalmente, hacia el establecimiento de una trama de funciones semióticas, por parte de los estudiantes, que promoviera la identificación de una función partiendo de su gráfica, y no solo desde su expresión analítica. De este modo, la tabla construida a partir de la interacción con el *software* propone la localización de puntos en el plano que, dada la familiaridad con las curvas estudiadas, sugieren la construcción de una gráfica ya conocida, cuya expresión analítica también resulta familiar. Las Figuras 3 y 4 permiten inferir que los significados institucionales pretendidos se encuentran en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, lo que justifica el considerar como alta la idoneidad cognitiva *a priori.*

Las respuestas de la Figura 3 permiten inferir que el alumno 16 tiene como conocimiento previo un significado de la pendiente de una recta como aquello que determina su inclinación y que también identifica, según el signo de la pendiente, si la recta es creciente o decreciente. Por otra parte, también se muestra competente en el cálculo de la pendiente a partir de la representación gráfica de la recta. Las respuestas de la Figura 4 permiten inferir que el alumno 26 reconoce, a partir de la gráfica, la familia a la que pertenece una función (para el caso de las rectas y las parábolas).

Figura 3. Estudiante #16, Cuestionario 1, reactivos 1, 2 y 3



1. ¿Qué significa para ti la pendiente de una recta? Explica

Es la inclinación que tiene la recta. Que tan acostada o parada se encuentra la recta. Si es negativo es decreciente.

2. ¿Qué te dice sobre la recta el valor numérico de su pendiente? Explica

Si es más o menos inclinada que la recta de referencia.

$m>1$ mayor de 45° es más inclinada, $m<1$ menor de 45° menos inclinada.

3. ¿Cuál dirías que es el valor de la pendiente de cada uno de los segmentos que se ilustran a continuación? Justifica tu respuesta.

$\boxed{m=\frac{3}{4}}$ m= $P_1(-4,-2)$ $P_1(0,1)$ $\frac{-2-1}{-4-0}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

• $|m|<1$ porque es menos inclinada

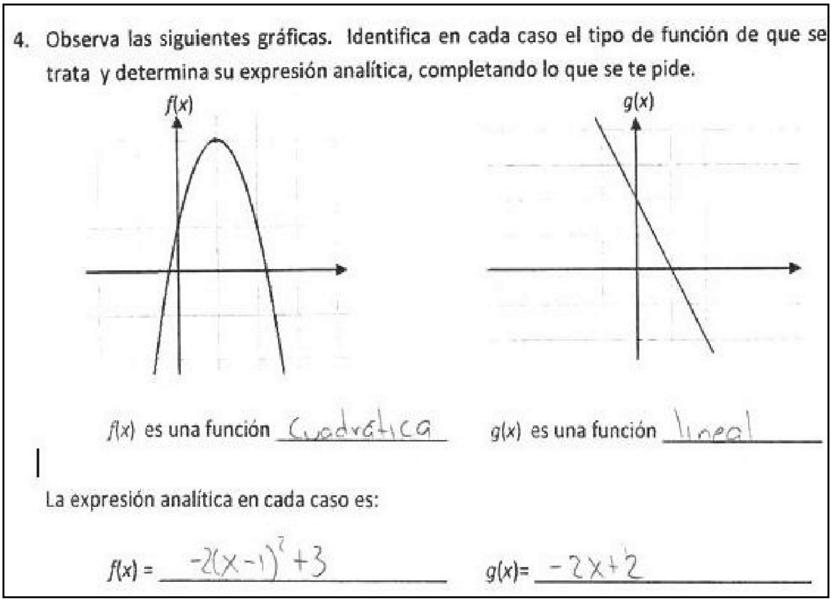
• $m>0$ porque es creciente.

m= $\frac{-2-0}{0-1}=\frac{2}{-1}$ $P(0,2)$ $P(1,0)$ $\boxed{m=-2}$

• $m<0$ porque es decreciente

• $|m|>1=|-2|=2$ más inclinada

Figura 4. Estudiante #26, Cuestionario 1, reactivo 4



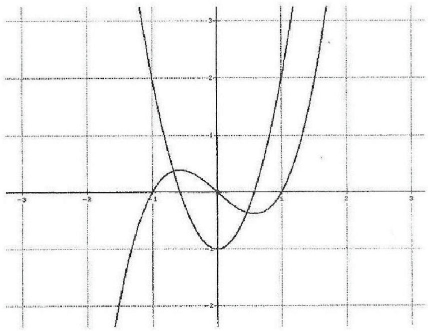
A posteriori: A lo largo de las actividades de la secuencia, no solo en relación con las hojas de trabajo sino también en lo relativo a su participación discursiva en las sesiones de retroalimentación e institucionalización, pudo inferirse también una aceptable familiaridad de los alumnos con otras funciones, como algunas polinomiales de grado mayor que dos, funciones trascendentes como el seno, el coseno, el coseno de un ángulo doble, el logaritmo natural y la exponencial natural. Además, las respuestas al Cuestionario 2 permiten inferir que el sistema de prácticas promovido por la secuencia sí alcanza a impactar los significados personales de los alumnos que constituyeron el estudio de casos, como se muestra en la Figura 5. En particular, esta figura permite inferir que el alumno 16 ha realizado una conexión entre la noción de pendiente de una recta (Figura 3) y la interpretación geométrica de la derivada en un punto (Figura 5).

Figura 5. Estudiante #16, Cuestionario 2, reactivos 1 y 2a)

1. ¿Por qué, si la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$, cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica

Porque la derivada no es la recta tangente de la curva, si no mide las Pendientes de las rectas tangentes en absiza x_0.

2. A continuación encontrarás las gráficas que corresponden a f y f'.



$R_T = 2x + b$
$0 = 2(1) + b$
$-2 = b$
$y = mx + b$
$R_T = 2x - 2$

Sin realizar ningún trazo y explicando ampliamente tu respuesta en cada caso, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a la gráfica de f, en el punto de abscisa 1? Porque $f'(x)$ mide las m de $f(x)$ entonces observando las gráficas veo que cuando $x=1$ en $f(x)$, $f'(x)$ vale 2, por lo tan- esa es la m de la R_T, después solamente sustituyo el punto par encontrar la ordenada en el origen que es -2.

Por todo lo anterior, la idoneidad cognitiva empírica se consideró alta.

En relación con los significados personales de los cinco alumnos seleccionados para el estudio de casos, se observó cómo la utilización del *software* en la visualización de la linealidad local, favoreció que la noción primaria de tangencia, asociada al caso de la circunferencia, evolucionara positivamente. La posibilidad de manipular y ver cómo una curva se vuelve indistinguible de su recta tangente cuando se aplica el *zoom* suficiente alrededor del punto, representa una experiencia introductoria que resulta significativa para el estudiante, en relación con la identificación del carácter local de la noción de tangencia. Como resultado de la evolución de la noción de tangencia, los estudiantes enriquecieron su significado de recta tangente. La herramienta tecnológica favoreció la transformación de los significados personales de los alumnos, haciendo emerger a la recta tangente como la recta que tiene la misma pendiente que el segmento visualizado en el punto dado.

El acercamiento intuitivo promovido por la visualización de la linealidad local, que permite al estudiante asomarse a las cercanías de un punto de una curva, observar cómo esta parece transformarse en un segmento de recta conforme aumenta el acercamiento, y, finalmente, relacionar la pendiente del segmento visualizado con la de la recta tangente en el punto dado, contribuyó a dar sentido al recorrido por las diferentes representaciones de la función derivada, que inicia con la tabla construida con la ayuda del *software*, pasa por la gráfica respectiva, y finaliza con el arribo a la expresión analítica correspondiente. Por lo anterior, es posible afirmar que el sistema de prácticas promovido por la secuencia didáctica sí logra incidir positivamente en la construcción de significado en torno a la función derivada.

Idoneidad interaccional

A priori: La elaboración del material impreso, así como los *applets* de trabajo, se realizó en función de los conflictos semióticos observados durante el pilotaje de prueba, identificándolos como potenciales y, por tanto, poniendo especial cuidado en cuanto a redacción, brevedad de texto, sencillez de lenguaje, simplificación de la tarea esencial, orientación de las preguntas hacia la respuesta esperada, etc. La consideración de todos estos elementos contribuyó también a incrementar las posibilidades de resolver los conflictos semióticos que, efectivamente, se presentaran durante el desarrollo del proceso de instrucción. Por todo lo anterior, la idoneidad interaccional *a priori* fue calificada como alta.

A posteriori: Contrario a lo esperado, desde la primera actividad se hizo patente la necesidad de discutir y reflexionar de manera grupal acerca de los significados construidos en cada actividad, con objeto de institucionalizar consensos en diversos momentos del desarrollo de la secuencia, y no al final de las actividades como se había pensado. Esto dejó al descubierto la importancia del trabajo colaborativo de los estudiantes, así como lo esencial de la participación del profesor en sus funciones de investigación, regulación, motivación, asignación y evaluación.

Finalmente, la interacción didáctica generada por la implementación de la secuencia, bajo la cuidadosa conducción del profesor, constituyó un ambiente propicio para anticipar y resolver conflictos semióticos con resultados satisfactorios, por lo que la idoneidad interaccional empírica puede calificarse, al menos, como media-alta.

Idoneidad mediacional

A priori: Desde el diseño de la secuencia, se tenía conciencia de las limitaciones asociadas a la disponibilidad de equipo de cómputo individual; es decir, se sabía de antemano que, en el mejor de los casos, sería posible asignar una computadora por cada dos alumnos, y en función de esto se procedió. Lo relativo al *software*, al material impreso y al tiempo destinado para cada actividad, permitió considerar a la idoneidad mediacional teórica como alta.

A posteriori: Implementada la secuencia, se confirmó lo relativo a la disponibilidad del equipo y a lo adecuado del *software*, pero en cuanto al resto de los recursos se evidenciaron algunas diferencias respecto a lo esperado. Las hojas de trabajo no resultaron tan autosuficientes como se había pensado. Además, se evidenció la conveniencia de que el total de horas consumidas fuera menor. Por tanto, desde la perspectiva *a posteriori,* la idoneidad mediacional fue considerada como media.

Idoneidad emocional

A priori: La certeza de una alta idoneidad emocional estuvo siempre presente durante el diseño de la secuencia. Se supuso que el estudiante se "maravillaría" ante la posibilidad de observar la linealidad local de una curva, y no solo la asumiría como cierta. Además, se dio por hecho que la interacción con el *applet* Linealizador, con las hojas de trabajo y con los compañeros sería suficiente motivación. Esto determinó que la idoneidad emocional se considerara alta, desde la perspectiva *a priori*.

A posteriori: Las expectativas sobre el aspecto afectivo de los alumnos no se cumplieron. La observación de la linealidad local no fue motivo de asombro como se esperaba. Además, la solicitud expresada frecuentemente en las hojas de trabajo, respecto a explicar ampliamente las respuestas, generó inconformidad en algunos estudiantes. En cuanto a la socialización, las esperadas discusiones constructivas en torno a conceptos o posibles respuestas a las hojas de trabajo cedieron el paso a la urgencia por responder para cumplir con el compromiso. Todo esto permite explicar que la idoneidad emocional *a posteriori* se haya percibido baja.

Idoneidad ecológica

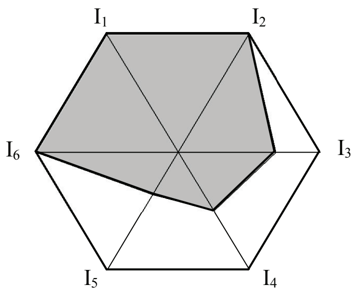
A priori: Desde el diseño, se tuvo la certeza de que la implementación facilitaría el posterior tratamiento formal de la función derivada vía límites, en términos de un mayor sentido y más agilidad para desarrollar los contenidos subsiguientes. Esta fue la razón de considerar a la idoneidad ecológica teórica como alta.

A posteriori: Se cumplieron las expectativas. El poder hacer referencia a la experiencia intuitiva aportada por la secuencia, se tradujo, efectivamente, en una mayor comprensión del acercamiento formal a f', lo que redundó, a su vez, en una mayor rapidez de avance en los temas finales del programa. Por todo esto, la idoneidad ecológica fue calificada como alta.

Los argumentos expuestos en relación con la perspectiva *a priori* explican el que la profesora/investigadora haya asignado la máxima puntuación a la idoneidad didáctica esperada. Sin embargo, como puede observarse en relación con la perspectiva *a posteriori*, la realidad mostrada por las evidencias recabadas durante la implementación de la secuencia, reveló diferencias notables respecto a lo esperado.

Para efectos de que el lector pueda visualizar el resultado del análisis valorativo realizado, en la Figura 6 se representa, mediante un hexágono irregular gris inscrito, la idoneidad didáctica empírica del proceso de instrucción investigado, con referencia a la perspectiva *a priori* que, por considerarse óptima, se ha simbolizado mediante un hexágono regular. En un proceso de instrucción ideal se deberían cumplir conjuntamente todos los criterios de idoneidad y se obtendría un hexágono regular; en cambio, en un proceso de instrucción implementado difícilmente se conseguirán conjuntamente todos los criterios de idoneidad, por lo que se espera que el hexágono resultante sea irregular.

Figura 6. **Idoneidad didáctica del proceso de instrucción**



Así, mientras la distancia que va del centro a cada uno de los vértices del polígono regular representa la puntuación máxima respecto a la idoneidad correspondiente, el hexágono gris refleja la valoración del proceso de instrucción desde la perspectiva de los resultados. Las distintas idoneidades se identifican conforme a la siguiente nomenclatura, desde la perspectiva *a posteriori*: I_1: Idoneidad epistémica (*alta*), I_2: Idoneidad cognitiva (*alta*), I_3: Idoneidad interaccional (*media-alta*), I_4: Idoneidad mediacional (*media*), I_5: Idoneidad emocional (*baja*) e I_6: Idoneidad ecológica (*alta*).

CONSIDERACIONES FINALES

La primera aportación relevante de esta investigación es el diseño de una secuencia didáctica que tiene por objetivo propiciar la puesta en juego de las diferentes representaciones de la función derivada, de manera que, a partir de la gráfica de f, mediante una construcción visualmente convincente de la recta tangente desde la noción de linealidad local, el alumno obtenga la tabla de f', construya la gráfica correspondiente y, por último, identifique la expresión analítica respectiva. Los *applets* y las actividades diseñadas son un material útil, tanto para los profesores que se interesen en la enseñanza de la derivada, como para otros investigadores del proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho objeto matemático.

La segunda aportación es la aplicación al proceso de instrucción implementado de un modelo de análisis didáctico sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas. El tipo de análisis desarrollado ha respondido, en primer lugar, a la pregunta ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? Este estudio exhaustivo de aspectos descriptivos y explicativos de un proceso de instrucción ha permitido establecer valoraciones fundamentadas sobre dicho proceso, que sirvan de guía para la mejora de implementaciones posteriores.

A partir de la valoración *a posteriori* del proceso de instrucción investigado, se evidenciaron las fortalezas y limitaciones asociadas a los distintos aspectos evaluados. Así, aunque las idoneidades epistémica, cognitiva, ecológica e incluso la interaccional se perciben elevadas, las idoneidades mediacional y emocional no resultaron tan bien evaluadas como se esperaba. En este sentido, las limitaciones identificadas sugieren posibles modificaciones, adaptaciones o reorganizaciones que conducirían a un proceso en espiral hacia diseños cada vez más finos, pero siempre perfectibles.

Con relación con el proceso de instrucción investigado, pudo apreciarse un nivel de *idoneidad didáctica* satisfactorio. El análisis de los diferentes criterios de idoneidad parciales, desde las perspectivas *a priori* y *a posteriori*, aportó una visión panorámica que permite percibir que, aunque los conflictos semióticos potenciales sean identificados *a priori* y, en función de ello, el proceso de instrucción se diseñe de tal manera que dichos conflictos se puedan superar, la aparición de conflictos semióticos en la implementación resulta inevitable, y constituye la explicación de la falta de consistencia de los significados personales de algunos estudiantes respecto a los significados pretendidos.

El tipo de investigación que se ha descrito en este artículo puede servir para ayudar a la reflexión de los profesores sobre su propia práctica. Las experiencias innovadoras realizadas por los profesores tienen elementos de una investigación didáctica cuando implican una reflexión, la formulación de preguntas y el uso de determinadas técnicas para la toma de información. Cuando el profesor reflexiona sobre su propia práctica, puede aprovechar los ejemplos sobre la forma en que se han aplicado a un proceso de instrucción concreto algunos constructos teóricos propuestos por el enfoque ontosemiótico, en particular los *criterios de idoneidad*.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco de: 1) la red "Uso de las tecnologías para el aprendizaje de las matemáticas", aprobada por el Programa de Mejoramiento del Profesorado de la Secretaría de Educación Publica de México y 2) el proyecto de investigación y desarrollo "Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato", EDU2009-08120, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1998), "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?". En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 5, núm. 1, pp. 40-55.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996), "A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education". En *Research in Collegiate Mathematics Education*, núm. 2, pp.1-32.

Badillo, E. (2003). "La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia." Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E.; Azcárate, C. y Font, V. (2011), "Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ de profesores de matemáticas". En *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 29, núm. 2, pp. 191–206.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000), "A Calculus Graphing Schema", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, núm. 5, pp.557-578.

Camacho, M. (2011), "Investigación en didáctica de las matemáticas en el bachillerato y primeros cursos de universidad", en M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, Ciudad Real, España, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, pp. 195-223.

Clark, J., Cordero, F. Cottrill, J., Czarnocha, B., Devries, D., St. john, D., Tolias, G. y Vidakovié, D. (1997), "Constructing a schema: The case of the chain rule?". En *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 16, núm 4, pp. 345-364.

Coll, C. y Sánchez, E. (2008), "El análisis de la interacción alumno-profesor líneas de investigación". En *Revista de Educación*, núm. 346, pp.15-32.

Contreras A., Font, V., Luque, L y Ordóñez, L. (2005), "Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis". En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 25, núm 2, pp.151-186.

Cooley, L. Trigueros, M. y Baker, B. (2007), "Schema thematization: a framework and an example". Enn *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 38, núm. 4, pp. 370-392.

Cortés, J. C. (2006), "La razón de cambio (cociente de incrementos) desde un punto de vista gráfico y numérico". En *Unión*, núm 8, 3-10.

Del Castillo, (2004). "Obtención de expresiones analíticas a partir de gráficas: el caso de las funciones senoidales", Tesis de Maestría, Universidad de Sonora.

Dubinsky, E. (1991), "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking". En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Press, pp. 95-123.

Dubinsky, E. (1996), "Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria". En *Educación Matemática*, vol. 8, núm. 3, pp. 24-41.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et penseé humaine*, Berna, Peter Lang.

Duval, R. (2006), "A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics". En *Educational Studies in Mathematics*, vol. 61, núm 1, pp. 103−131.

Ferrara, F., Pratt, D., y Robutti, O. (2006), "The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus". En A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*, Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, pp. 237-274.

Font, V. (2000a), "Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades", Tesis doctoral, Universitat de Barcelona.

Font, V. (2000b), "Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno",, En *Uno*, núm. 25, 21-40.

Font, V. (2005), "Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada", en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds), *Investigación en Educación Matemática.* Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Córdoba, Universidad de Córdoba, pp. 109-128.

Font, V. (2007), "Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto". En *Educación Matemática*, vol. 19, núm. 2, pp. 113-114.

Font, V., Bolite, J. y Acevedo, J. (2010), "Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions". En *Educational Studies in Mathematics*, vol. 75, núm. 2, pp. 131-152.

Font, V. y Contreras, A. (2008), "The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education". En *Educational Studies in Mathematics*, vol. 69, núm. 1, pp. 33-52.

Font, V. y Godino, J. D. (2011), "Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato". En J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas*, Barcelona, España, Graó, pp. 9-55.

Font, V., Planas, N. y Godino, J.D. (2010), "Modelo para el análisis didáctico en educación matemática". En *Infancia y Aprendizaje*, vol. 33, núm. 1, pp. 89-105.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoro, G. (2011), "Characterizing Thematized Derivative Schema by the Underlying Emergent Structures". En *International Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 9, núm. 5, pp. 1023-1045.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007), "The onto-semiotic approach to research in mathematics education". En *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, vol. 39, núm. 1-2, pp. 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006), "Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas". En *Paradigma*, vol. 27, núm. 2, pp. 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006), "Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológicosemiótico de la cognición matemática". En *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, vol. 26, núm. 1, pp. 39-88.

Harel, G.; Selden, A. y Selden J. (2006), "Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectives", en A. Gutiérrez y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*, Rotterdam, Sense Publishers, pp. 147-172.

NCTM (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA, NCTM.

Piaget, J. y García, R. (1982), *Psicogénesis e historia de las ciencias*, México D. F., Editorial Siglo XXI Editores.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2001), "Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada". En *Educação Matemática Pesquisa*, vol. 13, núm. 1, pp. 141-178.

Pochulu, M. y Font, V. (2011), "Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa". En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 14, núm. 3, pp. 361-394.

Planas, N. e Iranzo, N. (2009), "Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas". En *Revista*

Latinoamericana de Investigación en Matemática, vol. 12, núm. 2, pp. 179-213.

Robles, G. (2010), "La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local", Tesis de Maestría, Universidad de Sonora, [URL:http://www.mat.uson.mx/eduardo/Tesis_Gaby.pdf]

Sánchez-Matamoros, G. (2004), "Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)", Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. M. y Llinares, S. (2006), "El desarrollo del esquema de la derivada". En *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 18, núm. 3, pp. 355-368.

Tall, D. (1992), "L'enseignement de l'analyse a l'age de l'informatique". En B. Cornu (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, Paris, Presses Universitaires de France, pp. 161-182.

Tellechea, E. (2004). El *Applet Descartes* en el diseño de actividades interactivas de Matemáticas. Curso para Profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. Sonora, [URL:http://www.mat.uson.mx/eduardo/CursoDCEN2.pdf].

Tellechea, E. (2007), "Diseño de herramientas interactivas en línea como apoyo a los cursos de Cálculo". En Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Universidad de Sonora, pp. 163-169. [URL:http://www.mat.uson.mx/eduardo/Tellechea2007.pdf].

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010), "Geometrical representations in the learning of two-variable functions". En *Educational Studies in Mathematics*, vol. 73, núm. 1, pp. 3-19.