Geometrización de una porción del espacio real

Alberto Camacho Ríos, Bertha Ivonne Sánchez Luján, Ricardo Blanco Vega y Jesús Humberto Cuevas Acosta

A la memoria de Juan Mena Hernández

Resumen: El artículo tiene por objetivo describir el conocimiento matemático que surgió de la geometrización de una porción de terreno o espacio real levantada a finales del siglo XVIII con un grafómetro y cordel. El levantamiento topográfico se considera como una práctica de referencia en el marco de la aproximación teórica conocida como socioepistemología, mientras que la geometrización es la práctica social asociada. Los resultados establecen la matematización y transposición del espacio real en un microespacio y ponen en evidencia los conocimientos matemáticos de la actividad. Al final se plantean casos particulares que subrayan la utilidad de los instrumentos y técnicas de medición de la topografía en la resolución de problemas escolares de la geometría euclidiana y de trigonometría.

Palabras clave: práctica de referencia, geometrización, grafómetro, espacio real.

Géométrisation d'une portion de l'espace réel

Résumé: L'exposé est destiné à décrire les connaissances mathématiques qui sont apparues de la géométrisation d'une portion de terrain ou espace réel, soulevée à la fin du XVIIIe siècle avec un graphomètre et une corde. L'soulèvement est considéré comme une pratique de référence dans l'approche théorique connue sous le nom de socioépistémologie en tant que la pratique sociale associée est la géométrisation. Les résultats montrent la mathématisation et la transposition de l'espace réel dans un micro-espace et mettant en évidence les connaissances mathématiques de l'activité. Finalement, se posent des cas individuels qui mettent en évidence l'utilité des outils et des techniques de mesure de la topographie dans la résolution des problèmes à l'école de la géométrie euclidienne et la trigonométrie.

Mots clef: pratique de référence, géométrisation, graphomètre, espace réel.

Fecha de recepción: 27 de agosto de 2010.

> *...muchos autores informan que los egipcios fueron los inventores de la geometría, que nació de la medida de los campos, necesaria debido a las crecidas del Nilo que borraban el límite entre las propiedades. Por lo demás, no es de asombrar que haya sido una exigencia práctica la determinante de la invención de esa ciencia...*
>
> *Tomado de Los comentarios al libro I de los Elementos de Euclides de Proclo*

INTRODUCCIÓN

La *geometría natural* –como la han llamado Houdement y Kusniak (2006)– tiene por fuente de validación la realidad, aquello que es sensible. Ésta comprende tres facultades esenciales del ser humano: intuición, experiencia y deducción, que se ejercen fundamentalmente sobre objetos materiales con la ayuda y manipulación de instrumentos (Houdement y Kusniak, 2006, p. 12). De esto último se desprende que la geometría euclidiana no es natural. En este marco, se puede considerar que la topografía es una especie de *geometría natural* –también conocida en su origen como *geometría práctica*– que ha sido poco investigada como objeto de estudio, dejándola al margen de las matemáticas y de las tradiciones propiamente técnicas.

La particularidad de la topografía es que asocia los pensamientos geométrico y trigonométrico a una técnica que le sirve de objeto para *geometrizar* la realidad inmediata mediante diferentes prácticas, como son levantamientos topográficos, nivelaciones, observaciones astronómicas, etc. La geometrización es un tipo de matematización elemental que se acciona durante los levantamientos con el propósito de controlar las mediciones angular y lineal de superficies de terrenos, así como posteriormente durante el diseño de la planta topográfica correspondiente.[1]

En lo que sigue, se hará referencia a la extensión de los terrenos con la frase *espacio real,* debido a su carácter fundamental de poseer las tres dimensiones espaciales y contar con una medida superficial que las delimita, así como con la finalidad de distinguirla del que se conoce como espacio matemático o espacio

[1] Una versión de este artículo se presentó como ponencia con el título "Geometrización del espacio real" en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM XIII, sección Historia y Epistemología, llevada a cabo en junio de 2011 en Recife, Brasil.

euclidiano. En este sentido, se puede decir que la geometrización transforma el espacio real de los terrenos en microespacios de geometría natural que se les aproximan, siendo estos últimos modelos a escala de los primeros.

Desde el punto de vista de la asociación de conocimientos matemáticos con diferentes técnicas, la topografía puede verse como definidora de "prácticas de referencia" de las que se han desprendido nuevos conocimientos matemáticos. En sí mismo, el conocimiento matemático se admite como una unidad o síntesis de la acumulación de conocimientos generados por diferentes prácticas de referencia, los cuales tienen por límite el saber o conocimiento matemático teórico (De Gortari, 1988, pp. 388-391).

Si bien las prácticas de referencia generan nuevos conocimientos –que se podrían denominar como *conocimientos de referencia*–, entre estos últimos y las primeras se colocan las *prácticas sociales*. Éstas son actividades que orientan la interacción del conocimiento al centro de las prácticas de referencia, dando sentido a los procesos de matematización del espacio real, "en el cual intervienen una buena cantidad de nociones y procedimientos matemáticos" (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006, p. 90).

En general, las prácticas sociales se describen en forma de argumentaciones de la matemática, las cuales posteriormente devienen al salón de clase. Así, por ejemplo, y en un contexto restringido de la noción de espacio, la geometrización del espacio matemático fue una práctica de referencia que desarrollaron geómetras y analistas como Newton, Leibniz y Euler, entre otros. La actividad consistía en eliminar una o más de sus *determinaciones*. Por "determinaciones" se referían a la medida finita de las longitudes del espacio matemático, es decir, el largo, el ancho y la profundidad, de manera que, al eliminar una de ellas, la parte correspondiente se *perdiera* en el infinito. En la siguiente etapa, se establecía una reformulación o síntesis de conocimientos en la que se contrastaba el infinito con el cero, de lo cual se desprendía una primera proposición sintética. En el caso de Newton, la proposición que resultó de esa práctica se definió como: "Todo [espacio] que es capaz de aumentar y disminuir es descrito con movimiento continuo" (Camacho, 2005).

Puede observarse que la actividad normativa que rige esta última actividad es una práctica social inducida por argumentos variacionales que llevan a la construcción del concepto de límite infinito, de la cual se desprende una primera proposición o discurso matemático. Este discurso es la parte inicial que orientó la construcción de los *Principia* newtonianos y posteriormente sería ordenado en forma de discurso matemático escolar por Bails (1789, pp. 313-314) y otros autores de obras elementales, acomodándolo de la siguiente manera: "La extensión infinita es un espacio geométrico que tiene por límite el infinito".

En resumen, desde el punto de vista pedagógico, lo que interesa, como un objetivo colateral del escrito, es establecer una relación entre los argumentos de la geometría elemental que se mueven en la práctica topográfica y el espacio físico en que se ubica esta disciplina. Puestos en situación, tales argumentos están muy próximos a la percepción que tienen los estudiantes del propio espacio. No obstante, la amplitud del estudio socioepistemológico del conocimiento que aquí se presenta no permitió el diseño de situaciones de aprendizaje donde los argumentos matemáticos que surgen de la topografía pudieran ser colocados en situación escolar, a lo más, se mencionan en las conclusiones algunos casos particulares respecto al uso de instrumentos y métodos de medición y observación que se han experimentado en el salón de clase. Sin embargo, el objetivo central del estudio se comenta en el siguiente rubro.

MARCO TEÓRICO

La socioepistemología

El presente escrito está subordinado a la aproximación teórica conocida como socioepistemología, la cual es articulada por las siguientes acciones:

1. "El foco del análisis es puesto [...] en la práctica social y en la manera como hace su aparición en forma de discurso matemático la función normativa de esta última [para, enseguida]
2. presentarse como una forma de discurso matemático escolar" (Cantoral y cols., 2006, p. 90).

Significados asociados

Las imágenes de los conocimientos rescatados del estudio de las prácticas sociales –antes mencionadas– son reconocidas en la socioepistemología como *significados* asociados del propio conocimiento que, en su acontecer histórico, mantienen una representación cercana con el discurso matemático escolar actual. En cuanto a su devenir, los significados adoptan diferentes imágenes cuyo límite es su representación escolar en el presente. El rescate de significados ha permitido experimentar en el salón de clase diseños de situaciones de aprendizaje en las que se hacen interactuar dichos significados con su representación escolar vigente en el afán de mejorar su enseñanza (Camacho y Sánchez, 2010, p. 34; Camacho, 2011a, pp. 164-170). Esta última etapa es conocida en el diseño de la situación como *resignificación* del conocimiento y ocurre a partir del trabajo de los estudiantes con los diferentes significados –incluso los determinados en los análisis cognitivo y didáctico– ordenados en la situación. La resignificación es un mecanismo que une las argumentaciones del conocimiento matemático escolar en juego con las instrucciones a las que se sujeta la situación, toda vez que dinamiza esta última.

La precisión, eje central en los levantamientos topográficos

Hay que destacar que, para el caso de la topografía, las practicas de referencia y las prácticas sociales están sujetas a los instrumentos de uso. Así, en los levantamientos topográficos que se plantean, se hace alusión al *grafómetro* y al cordel. Por la incertidumbre causada por la poca precisión que los instrumentos aportaban, así como por las limitaciones de las técnicas de observación, tales prácticas provocaban pequeños errores que falseaban la geometrización final del terreno o terrenos. Ante ese problema, geómetras que vivieron entre los siglos XVII al XIX, como Euler, Mayer, Gauss, Bessel, Díaz Covarrubias, etc., juzgaron necesario asumir dichos errores con tolerancias que previamente se podían especificar y cuyo establecimiento estaba en función, como ya se mencionó, tanto de los instrumentos como de los tipos de levantamientos que había que desarrollar.

Vista así, la tolerancia especificada constituyó la diferencia entre los conocimientos matemáticos que se construyeron a partir de las prácticas de topografía y los conocimientos matemáticos ideales contenidos, en un primer momento, en los *Elementos* de Euclides. En épocas de mayor contribución a la construcción del conocimiento matemático, la tolerancia fue de la mano con el conocimiento *aproximado,* ampliamente discutido por Bachelard (1928) y, además, como consecuencia, asociado a los desarrollos en serie de MacLaurin en el contexto de las funciones analíticas.

A partir de lo anterior y como una cuestión metodológica que se asume en el estudio, se parte de que los cambios tecnológicos sufridos por los instrumentos llevaron a cambiar a su vez las técnicas y las prácticas de observación y medición, dando lugar a transformaciones de las prácticas sociales asociadas a las prácticas de referencia, lo cual tuvo como consecuencia la determinación de nuevos conocimientos matemáticos.

Ante esto último, se plantea para el estudio el siguiente objetivo:

Describir las particularidades de algunos significados del conocimiento matemático que surgieron de operaciones topográficas mediante ciertos problemas específicos desarrollados a lo largo de la historia y cuya representación actual se sitúa en la matemática y en la probabilidad.

En sí se considera el siguiente caso:

La transición que sufrió la dioptra hasta parecerse el grafómetro, así como las técnicas y conocimientos que derivaron de ello. Esta etapa, que inicia en el siglo III a. C., pasa por el siglo XVI y concluye a finales del siglo XIX, se caracteriza por una aproximación restringida en las mediciones angulares y lineales. Esta parte comprende la simulación del levantamiento topográfico de un polígono cerrado medido a finales del siglo XVIII con un grafómetro para los ángulos y un cordel para las longitudes. El levantamiento se caracteriza por una aproximación restringida en la parte lineal de la medición. Para la situación que se analiza, interesa establecer el microespacio correspondiente y hacer ver las diferencias entre este último y el espacio real del terreno. Lo anterior se considera a partir de tomar la geometrización como eje central de trabajo.

Puesto que los instrumentos utilizados en el levantamiento que se presenta son por demás limitados e imprecisos, el resultado que arroja la geometrización es un modelo matemático de compensación lineal elemental que se desprende de la práctica social. El ejercicio ha sido elegido deliberadamente y con él se intenta mostrar cómo de lo contingente de los elementos que integran la práctica topográfica surge un conocimiento –la imagen de un significado asociado a cierto concepto– todavía expedito, que sufrirá en su evolución transformaciones importantes antes de ser vehiculado al salón de clase.

ESTADO DEL ARTE

Desde la perspectiva del uso de la geometría natural, Kusniak (2005) y Houdement y Kusniak (2006, p. 6) han dotado a sus estudiantes de "espacios de trabajo geométrico personal", que destacan dos campos de actividades fundamentales, "el primero relaciona la experiencia, vinculando el mundo sensible con herramientas de medición", mientras que el segundo "devuelve al nivel de abstracción las figuras geométricas, relacionándolas con sus propiedades matemáticas". En la misma dirección, Matheron y Noirfalise (2007) experimentaron con estudiantes "microespacios de trabajo geométrico", simulando en las instrucciones el propio trabajo desarrollado por ingenieros a mediados del siglo XX (esta actividad se comenta de nuevo en las conclusiones).

Por su lado, Montiel (2008) hizo una revisión de las funciones trigonométricas desde su definición a través de la matematización de la astronomía expuesta en el *Almagesto* de Ptolomeo. La autora sugiere la *anticipación* como práctica social vinculada a la matematización, de modo que el modelo matemático que se puede construir con ello es de naturaleza geométrica elemental. En una segunda etapa, la investigadora ha experimentado con estudiantes el uso de instrumentos de medición angular semejantes a los clisímetros usados por los topógrafos[2] –construidos *ex profeso* con un transportador de plástico y una mirilla por demás simple–, con los cuales llevó a sus estudiantes a medir ángulos de elevación de edificios y construcciones, para luego regresar la práctica al salón de clase. Cantoral y cols. (2006, p. 90) han considerado el teorema del binomio de Newton (TBN) como el objeto matemático que llevó a ingenieros del siglo XVIII a "*predecir* el comportamiento de lo que fluye [...] calor, movimiento, flujos eléctricos". En este caso, las prácticas de referencia asociadas son actividades de ingeniería cuya práctica social normativa es la predicción relacionada con una buena cantidad de argumentos matemáticos de naturaleza variacional.

Finalmente, en Camacho y Sánchez (2010) se coloca la noción de *variabilidad* como resultado de investigación. Este último significado surgió de sistemas de prácticas de referencia vinculadas con actividades de ingeniería que se asocian con modelos de aproximación incorporados en el dominio de las funciones analíticas y fue fundamental en el diseño experimental –del todo geométrico– de una situación de aprendizaje para la enseñanza del concepto de función.

GEOMETRÍA PRÁCTICA

En la actualidad, se podría interrogar a un topógrafo sobre qué es lo que determina la precisión en los levantamientos topográficos. Él puede suponer, de entre las respuestas que podría dar, el orden de importancia que tienen los levanta-

[2] El clisímetro es un nivel de mano de amplia utilidad en los levantamientos topográficos, al cual se le adaptó un círculo vertical para la medición de ángulos de elevación o depresión.

mientos. Dependiendo de su importancia, éstos se clasifican en: de *primer orden, segundo orden* y *tercer orden*. Por lo general, los de tercer orden involucran teodolitos cuya aproximación angular no rebasa el minuto y se acompañan de estadales para la determinación de las distancias; mientras que los de primer orden suelen elaborarse con teodolitos de aproximación angular de hasta centésimos de segundo, asociando a la parte lineal cintas métricas o distanciómetros electrónicos.

En la misma dirección, se puede exigir al topógrafo que eche mano de las precauciones necesarias en la toma de datos para asegurar la justeza de la medición. No obstante, los errores *accidentales* y *sistemáticos* –por ejemplo, dar una tensión superior a la que soporta la cinta métrica, lo cual provoca un error en la medición lineal– que se relacionan con los instrumentos aparecen inevitablemente en los cierres angular y lineal de los polígonos levantados.

La dioptra y su evolución

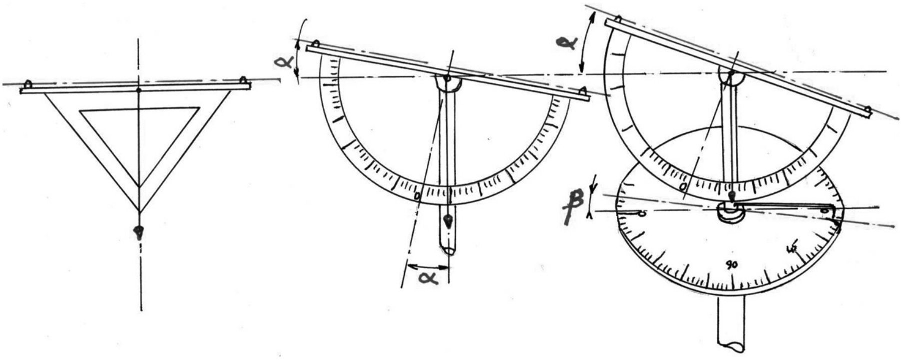
Durante el primer tercio del siglo XVI, en la *geometría práctica,* como se conocía a la topografía desde la época de los antiguos griegos, uno de los instrumentos de observación de mayor uso fue el grafómetro. Este instrumento es el antecedente inmediato del teodolito común[3] y también se puede decir que es una consecuencia de la evolución tecnológica de la dioptra, ampliamente utilizada por los griegos y romanos en los levantamientos topográficos. La figura 1 muestra tres procesos de evolución que tuvo ese instrumento hasta asemejarse al grafómetro diseñado por el francés Danfrie (1597) (véase la figura 3).

La dioptra que aparece en la imagen A de la figura 1 era un instrumento sencillo constituido por un triángulo isósceles cuya base servía de *alidada*. Por lo general, la alidada es una regla fija o móvil que tiene en cada extremo una pínula en la cual se han practicados pequeños agujeros que sirven para dirigir visuales. La punta del triángulo –unión de los lados iguales– se colocaba en su base y servía para sujetar el hilo de la plomada. Luego que la base del instrumento se centraba sobre algún vértice del terreno, la observación a través de la alidada resultaba al posicionarla horizontalmente.

No obstante, el modelo del triángulo isósceles se intercambiaba más comúnmente por otro cuadrangular, como el que se muestra en la figura 2. De igual

[3] Cuando se menciona al teodolito común, se hace referencia a los de aproximación angular de un minuto de grado sexagesimal.

Figura 1 Las imágenes muestran el proceso de evolución que sufrió la dioptra hasta asemejarse al grafómetro diseñado en 1597 por P. Danfrie, el cual aparece en la figura 3. (Obtenido el 28 de julio de 2010 de: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/70/Dioptra-principe.jpg)



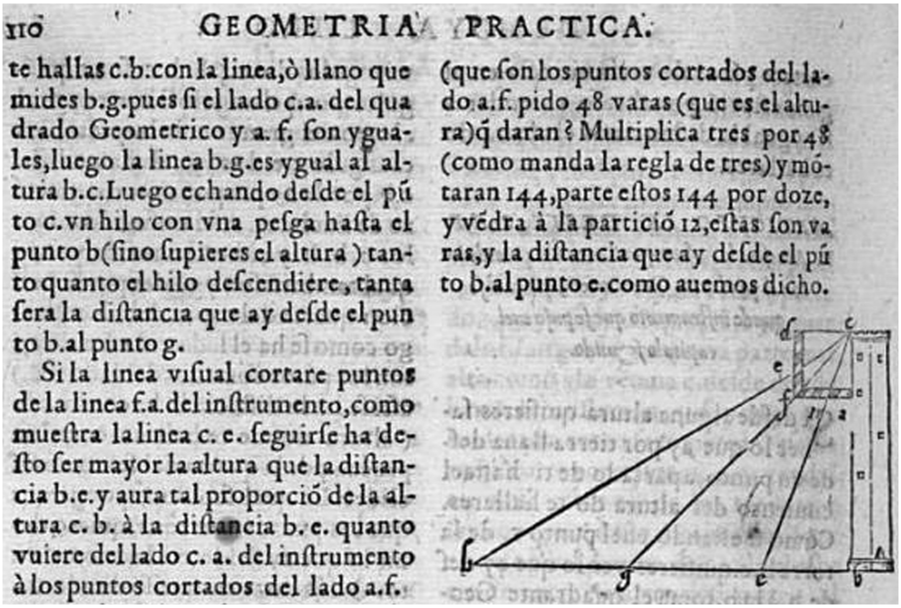
modo, la base opuesta a la graduación servía de alidada, ya que el movimiento angular se iniciaba en alguno de los vértices no graduados del cuadrado.

La primera evolución, dada por Herón de Alejandría, unos 130 años a. C., consistió en reemplazar el triángulo y el cuadrado por un semicírculo graduado en forma de transportador cuya base servía de alidada (véase la imagen B de la figura 1). El sistema se colocaba sobre una rodilla de madera que servía para nivelarlo al centrar la plomada sobre algún vértice del terreno. Posteriormente, la rotación de la alidada permitía la elección angular deseada, la cual estaba en función del origen o índice del transportador.

Una segunda evolución se muestra en la imagen C de la figura 1. Ésta consistió en incorporar un segundo disco graduado, perpendicular al primero, sobre un eje vertical, con el cual se determinaban los ángulos de elevación.

Con estos instrumentos se realizaban levantamientos y nivelaciones semejantes a los que se efectúan en la actualidad con los teodolitos comunes. Incluso, hay evidencia de la utilidad de la dioptra en el proyecto de construcción de acueductos, trazado de caminos y amplios túneles romanos durante el siglo VI a. C.; sin embargo, su invención se atribuye a los griegos hacia el siglo III a. C. Por su lado, la figura 2 deja ver el uso práctico que se hacía de la dioptra en su modalidad de escuadra graduada sujeta a un marco cuadrado para la medición de ángulos de depresión y otras operaciones; esto último durante el siglo XVI

Figura 2 En la ilustración se aprecia el uso que se hacía de la dioptra para la medición de ángulos de depresión durante el siglo XVI. La ilustración aparece en la *Geometría práctica* de Pérez de Moya, escrita hacia 1523



110 GEOMETRIA PRACTICA.

te hallas c.b. con la linea, ò llano que mides b.g. pues ſi el lado c.a. del quadrado Geometrico y a. f. ſon yguales, luego la linea b.g. es ygual al altura b.c. Luego echando deſde el pũto c. vn hilo con vna peſga haſta el punto b (ſino ſupieres el altura) tanto quanto el hilo deſcendiere, tanta ſera la diſtancia que ay deſde el punto b. al punto g.

Si la linea viſual cortare puntos de la linea f.a. del inſtrumento, como mueſtra la linea c. e. ſeguirſe ha deſto ſer mayor la altura que la diſtancia b.e. y aura tal proporciõ de la altura c. b. à la diſtancia b. e. quanto vuiere del lado c. a. del inſtrumento à los puntos cortados del lado a.f. (que ſon los puntos cortados del lado a. f. pido 48 varas (que es el altura) q̃ daran? Multiplica tres por 48 (como manda la regla de tres) y mõtaran 144, parte eſtos 144 por doze, y vẽdra à la particiõ 12, eſtas ſon varas, y la diſtancia que ay deſde el pũto b. al punto e. como auemos dicho.

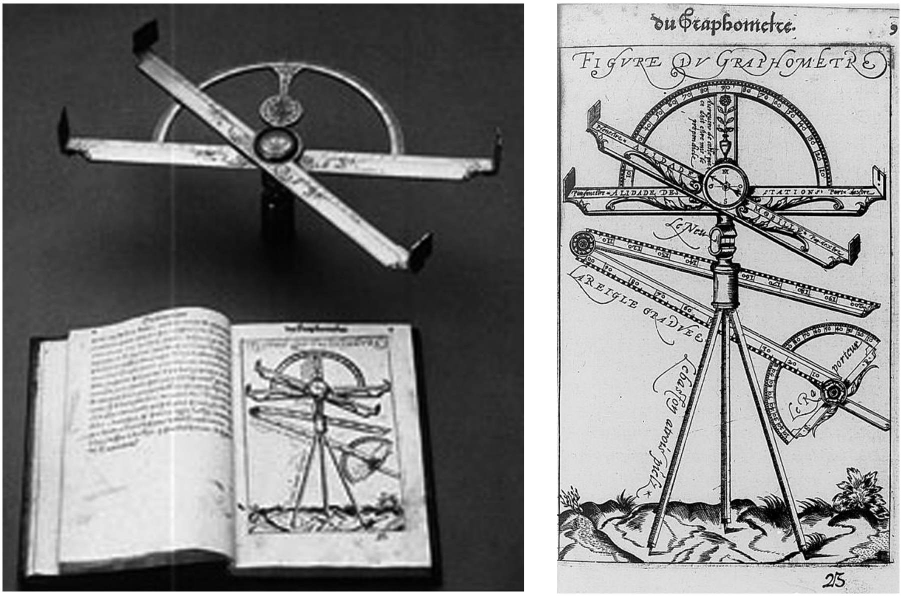
(Pérez de Moya, 1523). Obsérvese cómo la graduación de la escuadra tiende a parecerse a la forma de un semicírculo graduado.[4]

El grafómetro

Desde su invención en 1597, el grafómetro se distinguía por su sencillez, portabilidad y resistencia. Como tal, constaba en la parte superior de un semicírculo graduado que servía para medir ángulos verticales (véase la figura 3). Las observaciones se realizaban a través de unas pínulas colocadas al final de dos alidadas cuyos extremos contaban con vernieres para apreciar las fracciones de

[4] En esta dirección, Apóstol (2004) encontró un error de alineación de 0.1 grado al usar la dioptra en el trazo del túnel de Samos, construido por los romanos durante el siglo VI a. C en el interior del monte Kastro.

Figura 3 Grafómetro diseñado por el francés Philippe Danfrie. Las ilustraciones muestran la manera de emplearlo. Véase la referencia Danfrie (1597). Obtenido el 27 de julio de 2010 de: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b2100149p/f13



la graduación angular.[5] Para medir los ángulos horizontales, se usaba el semicírculo inferior, el cual estaba atravesado a la mitad por una regleta, la cual se sujetaba mediante un tornillo a otra en la parte donde terminaba la primera. Este aditamento se llamaba *recipiángulo* y permitía medir los ángulos de entrada o salida que formaban las dos rectas del terreno comprendidas por el vértice donde se estacionaba el instrumento que, en este caso, eran alineadas por las regletas. Semejante a la dioptra, todo el sistema se apoyaba sobre una rodilla para fijarlo a un tripié (Danfrie, 1597).

El grafómetro fue ampliamente utilizado en las operaciones de alineación, medición de terrenos y, sobre todo, en la delimitación de los campos de cultivo para el pago de impuestos catastrales, trazado de edificios públicos y catedrales,

[5] Humboldt consigna el uso del grafómetro en la medición de una base inclinada *AB,* utilizada para determinar la altura en toesas sobre el nivel del mar de la cima denominada *Tolima,* ubicada en los Andes. Citado en: *Viaje de Humboldt por Colombia y el Orinoco,* para el año de 1806. Obtenido el 28 de noviembre de 2010 de: http://www.lablaa.org/blaavirtual/exhibiciones/humboldt/ibague3.htm.

así como observaciones astronómicas, tanto por los agrimensores como por los geómetras –europeos y americanos– desde mediados del siglo XVII y hasta finales del siglo XIX.

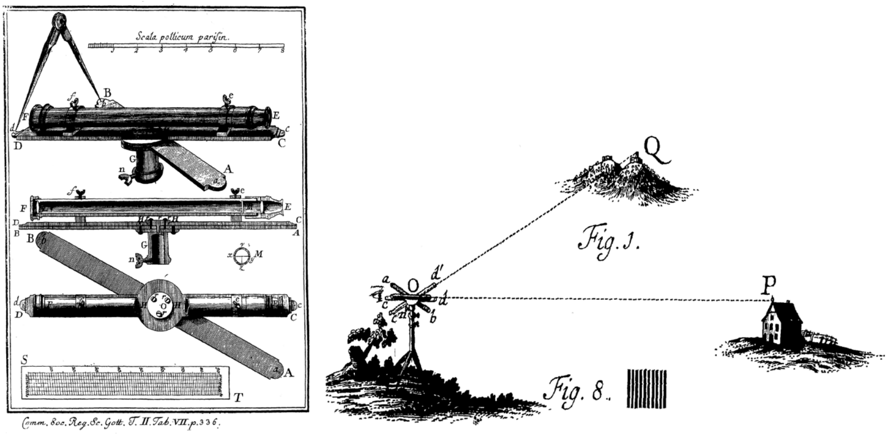
En su origen, los grafómetros se limitaban a una aproximación angular que dependía del tamaño del diámetro y la graduación del semicírculo, la cual podía ser del orden de 10′ de grado sexagesimal (aunque era común que el semicírculo se graduara en los sistemas sexagesimal y centesimal).[6] En sí misma, la medición angular era complicada, porque inicialmente estos instrumentos no contaban con un aditamento óptico para precisar la lectura, por lo que se llegaba a cometer errores de hasta 30′ en las alineaciones. Otra de las limitaciones provenía de su *nivelación* horizontal, ya que carecían de niveles y accesorios para ese fin. Por consiguiente, las distancias que se medían –con cordeles–,[7] contenían errores de observación que hacían que la geometrización final del terreno no correspondiera con el espacio real levantado.

Sin embargo, el grafómetro fue mejorándose con incorporaciones tecnológicas hasta su etapa final, que corresponde al último tercio del siglo XIX, y dejó de utilizarse debido a la amplia difusión de los teodolitos comunes. Así, para mediados del siglo XVIII, la casa inglesa Canivet construía los mejores grafómetros de un pie de diámetro en los círculos horizontal y vertical, cuya alidada, por lo general, era dividida por el método de Werner, es decir en subdivisiones sexagesimales y centesimales, con las cuales se podían medir los ángulos con aproximación de 1'. En esta etapa, los grafómetros se hallaban armados con anteojos de 28 pulgadas con lentes de buen alcance para las observaciones de hasta más de 15 kilómetros, e incluían tornillos niveladores para el eje horizontal de tales instrumentos. En sí, en esa época era tal su semejanza con los teodolitos comunes que ya no podían distinguirse de éstos.

[6] Si la graduación del semicírculo era centesimal, el instrumento se conocía como goniómetro.

[7] Por lo general, los cordeles que se usaban para los levantamientos topográficos, sobre todo a lo largo del siglo XVIII, eran de cáñamo y medían unos tres cuartos de centímetro de diámetro. Estos cordeles se torcían, enceraban y aceitaban para que resistieran la tensión. El cordel, de hasta 50 varas (cada vara equivalía a 0.836 m), se marcaba utilizando una *vara patrón*. Finalmente, estos segmentos se subdividían en *palmos,* cada palmo se subdividía en doce dedos y cada dedo en doce *granos*.

Figura 4 A la izquierda, grafómetro alemán con anteojo, la abertura del compás servía para determinar el valor angular al observar su valor sobre la escala que ahí aparece. A la derecha se puede ver el método utilizado en la medición de un ángulo horizontal. Fue utilizado para los levantamientos topográficos alrededor del año 1750



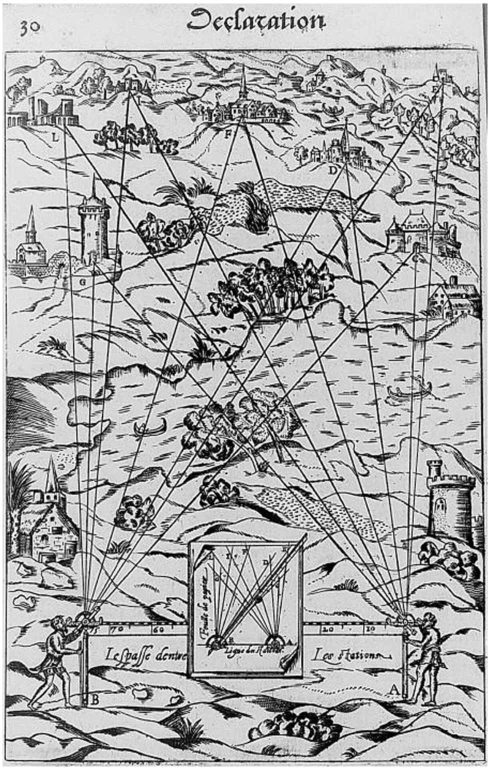
Fuente: Commentarii Societatis Regiae Scientiaru Gottingensis, Gottingae, 1752, 1755.

Las técnicas de medición usando el grafómetro

En un principio, las técnicas de medición que se empleaban con los grafómetros consistían en la *intersección angular* de los diferentes vértices de que constaban los terrenos, tomándose como puntos de referencia para las observaciones dos o más estaciones desde las cuales se dominaba con el instrumento el total de la superficie. Las estaciones establecían a su vez un lado *base* para los triángulos que así se formaban, logrando con ello una *red* de triángulos o triangulación elemental. En la figura 5 se aprecia el modelo de medición angular y lineal utilizado con el grafómetro.

No obstante, otros métodos expeditivos que se llegaron a utilizar fueron el de *radiaciones,* que consiste en medir los vértices de los terrenos sobre un punto central *P* (véase el ejemplo que se muestra en la figura 6) desde el cual se domina su totalidad, tomando, a su vez, una de las radiaciones (por ejemplo la línea *PA*) como referencia base para la medición de los ángulos centrales.

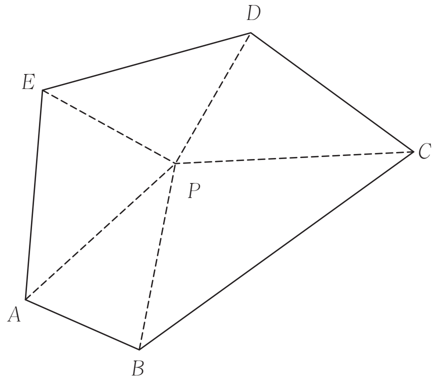
Figura 5 Técnica de medición angular y lineal mediante *intersecciones*, haciendo uso del grafómetro sugerido por Danfrie (1597)



Otro método común era (y sigue siendo) el de *itinerarios* o *caminamiento cerrado*, que consiste en levantar el polígono midiendo sus ángulos internos; por ejemplo, en la figura 6, el ángulo *EAB*, así como las longitudes correspondientes entre cada vértice, iniciando con la distancia *AB* para concluir la medición con la distancia *EA*, toda vez que se sigue la marcha de la medición sobre el itinerario del polígono en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

En la actualidad, las técnicas de medición se siguen eligiendo de acuerdo con los *reconocimientos* previos que hay que desarrollar antes de la medición de los terrenos. No obstante, y de acuerdo con su aparición, históricamente las técnicas se pueden resumir en dos; en primer lugar, el método de triangulación elemental y, en segundo, el de poligonación o itinerarios.

Figura 6 Técnica de medición angular y lineal de un terreno mediante *radiaciones* desde el punto P



GEOMETRIZACIÓN DE UNA PORCIÓN DE SUPERFICIE DE TERRENO HACIENDO USO DEL GRAFÓMETRO

Situemos el siguiente ejemplo a finales del siglo XVIII,[8] conviniendo que el terreno *ABCDEA* de la figura 6, en su forma ideal, fue medido a partir de un levantamiento topográfico que utilizó la técnica de poligonación itinerante con un grafómetro de aproximación angular de 1′ y una cuerda resistente dividida en décimos de metro. Supóngase que se cuenta ya con la medición de los ángulos internos y las distancias medidas sobre el terreno. No obstante, consideremos un error sistemático en la medida de las longitudes debido a lo defectuoso de la cuerda.[9]

Una primera condición que se establece es que la suma s de los ángulos internos medidos debe ser:

$$s = (n - 2)180^{\circ} \text{ grados} \tag{1}$$

[8] Con la salvedad del uso del sistema métrico, el cual fue establecido en Francia hacia el año de 1791.

[9] En la práctica de las operaciones topográficas actuales, el grueso de los errores lineales que se exponen en el ejemplo con el grafómetro y cordel se encuentra lejos de ocurrir debido a la precisión de los instrumentos de uso, es el caso de teodolitos actuales de aproximación angular de centésimos de segundo sexagesimal, así como de la *estación total* o distanciómetros electrónicos para la determinación de las longitudes.

En la expresión 1, n es el número de vértices con que cuenta el polígono; para el caso que nos ocupa $s = 720º$ –sugerida en los *Elementos* de Euclides para las figuras geométricas regulares–.[10] Una cuestión que surge de esto último es la generalización que se hace de la expresión 1 para los polígonos irregulares como el que se muestra en la figura 6. Pero dejemos por lo pronto esta cuestión y supongamos que la suma s' que se obtuvo difiere de s por una cantidad angular $\pm e$, la cual aceptamos, como principio fundamental, que debe dividirse en partes iguales entre todos los ángulos. Es más, supongamos que ya ejecutamos esta última operación y el *cierre* angular cumple con lo especificado en la expresión 1.

El trabajo que seguía era el diseño de la planta topográfica a cierta escala previamente convenida. Al no contarse con un sistema de coordenadas rectangulares,[11] lo que se permitía era el uso del transportador para la medición polar de los ángulos en el papel y de una regla graduada para las longitudes, la cual hacía las veces de escalímetro. Supongamos que el contorno del terreno *ABCDEA*, de la figura 6 no *cierra* al dibujarse debido a los pequeños errores de observación de las distancias causados por el uso y las limitaciones de los instrumentos, dando la pequeña diferencia $k = AF$, que se ha exagerado en la figura 7 para darle más claridad. En este caso, el error k, que se comete al trazar sobre el papel un lado medido equivocadamente sobre el terreno, influye en la posición de los siguientes lados del polígono.

Hasta esta parte del trabajo, el espacio real es el polígono cerrado *ABCDEA* que se muestra en la figura 6, mientras que el microespacio preliminar que resulta corresponde al polígono abierto formado por los vértices *ABCDEF* de la figura 7.

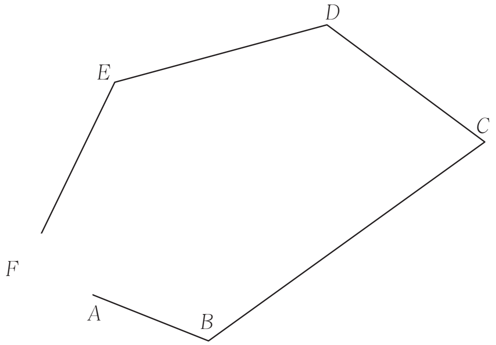
El modelo de análisis que se presenta a continuación fue tomado de diferentes fuentes (Gauss, 1822; Díaz Covarrubias, 1896, pp. 240-247; Toscano, 1955, p. 57; Caillemer, 1967, p. 70; Pasini, 1969, p. 342; Jordan, Reinhertz y Eggert, 1981, p. 466).

Por su naturaleza, el error $k = FA$ en la geometrización es inevitable. Pero supongamos que se encuentra dentro de la tolerancia previamente especificada para este tipo de levantamientos, razón por la cual no es necesario verificar la medición, es decir, elaborar de nuevo el levantamiento. Por tanto éste puede *disi-*

[10] Al final de los *Elementos*, Euclides demuestra en un lema que los ángulos interiores de un pentágono regular miden un ángulo recto y un quinto de este último, es decir 108º, lo cual deja ver el conocimiento que se tenía de este tema. Sin embargo, esto no prueba la generalización de la expresión 1 para cualquier figura regular.

[11] Aun cuando el modelo de coordenadas fuera conocido, su difusión no tenía el alcance de utilidad que se desarrollaría a lo largo del siglo XIX.

Figura 7 Al dibujar el espacio real identificado por el polígono cerrado ABCDEA con transportador y regla graduada a cierta escala, éste no *cierra* debido a los errores de observación de las distancias cometidos con el grafómetro y el cordel, quedando así el polígono abierto ABCDEF



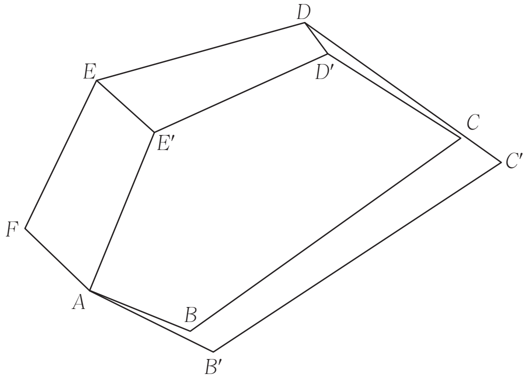
mularse, o sea, no eliminarse, sino repartiendo proporcionalmente su valor entre los lados del polígono. Al no haber más fundamentos para atribuir a una parte de las longitudes mayor error que el resto, habrá que dividir el error *k* proporcionalmente entre éstas. Esto consiste en desplazar cada vértice, paralelamente al error *k*, una cantidad proporcional a la longitud de cada lado.

Supongamos que $AB = l_1$, $BC = l_2$,..., *etc*., de modo que $c_1 = BB'$, $c_2 = CC'$,..., $c_{n-1} = EE'$, sean las correcciones que les corresponden, donde el polígono corregido es $A\,B'C'D'E'$ y, además, que $P = l_1 + l_2 + ... + l_{n-1}$ sea el perímetro total (véase la figura 8). De aquí se sigue que, para el primer lado AB: $P : c_n :: l_1 : c_1$, de donde: $c_1 = \frac{c_n}{P} l_1$. De igual modo, para el segundo lado BC, se tendrá: $P : c_n :: l_1 + l_2 : c_2$, o bien: $c_2 = \frac{c_n}{P}\left(l_1 + l_2\right)$. Así que la corrección para el penúltimo lado está dada por la relación 2:

$$c_{n-1} = \frac{c_n}{P}\left(l_1 + l_2 + ... + l_{n-1}\right) \tag{2}$$

Puesto que, además, las correcciones son proporcionales entre sí, las magnitudes de éstas irán de menor a mayor, y la última quedará con la misma magnitud. Para ejemplificar, se contemplan los lados del polígono con las siguientes magnitudes dadas en metros: $AB = 175.2$, $BC = 341.7$, $CD = 289.6$, $DE = 274.5$

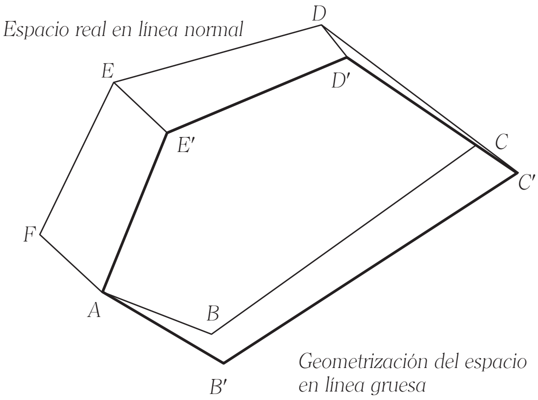
Figura 8 Las magnitudes *FA, BB′, CC′, DD′* y *EE′* son las que hay que restar a cada vértice respectivamente para que quede el polígono corregido



y $EA = 124.3$, cuyo perímetro es: $P = 1\ 205.3$. Haciendo uso de la expresión 2, las correcciones correspondientes quedan de la siguiente manera: $BB' = 1.16$, $CC' = 3.41$, $DD' = 5.32$, $EE' = 7.13$ y $FA = 8.00$. En este caso, el error de cierre $k = FA$ se midió directamente con la regla graduada en el polígono dibujado a la escala especificada.

Con este supuesto, la geometrización final del terreno se aprecia en línea más gruesa que el resto en la imagen de la figura 9.

Figura 9 La figura muestra la geometrización del espacio real ideal a partir del uso del grafómetro y un cordel defectuoso, así como el error o desplazamiento homotético que se produjo con ello



Como se ve en la figura 9, el error sistemático que supusimos en la medida de las longitudes tiene por efecto dar un polígono homotético del espacio real. En este caso, la relación de homotecia está en proporción directa al error sistemático.

CONCLUSIÓN Y PERSPECTIVAS

En el centro de la práctica topográfica se pueden plantear las siguientes observaciones desde la perspectiva de estudio que hemos elegido.

- La práctica de referencia es una práctica topográfica que involucró la medición del terreno haciendo uso de la técnica de poligonación itinerante, es decir, medir los ángulos internos del polígono y las distancias entre cada dos vértices marchando sobre el perímetro del terreno y siguiendo un orden inverso al de las manecillas del reloj.
- La práctica social que norma la actividad para determinar el microespacio es la geometrización. Esta actividad muestra argumentos en forma de discurso matemático, tomados inicialmente de los *Elementos* de Euclides, como es el caso de la ecuación 1 para el cierre angular. No obstante, el problema que surge en el cierre lineal hizo que se establecieran condiciones que dieran oportunidad de ajustar dicho error, como es el caso de la expresión 2.
- Para el levantamiento, la geometrización se mueve en un ambiente en el que se privilegia la *proporción* como una razón entre las magnitudes del terreno. Mientras que los objetos matemáticos de uso son los ángulos, magnitudes lineales y direcciones.
- La expresión 2, $c_{n-1} = \frac{c_n}{P}\sum_{i=2} l_{n-1}$, es un modelo matemático de compensación lineal, resultado de la práctica social. Por sí mismo, el modelo sugiere que "si hay un error en el cierre lineal $k = A'A$ de un polígono cerrado, éste debe ser repartido siguiendo una *compensación paralela proporcional*".
- La transposición del espacio real ideal del terreno al microespacio, resultado de la geometrización, se experimentó al confrontar el grafómetro con el uso del transportador y el cordel con la regla graduada.
- Por su lado, la métrica de uso para el espacio real se guarda mediante la

escala utilizada durante la geometrización del microespacio. De aquí que esta última sea una actividad que se ubica en ambas experiencias.

En principio no se aprecia que los conocimientos matemáticos sugeridos por la expresión 2, los cuales surgieron durante las actividades desarrolladas con la práctica social, hayan tenido una aplicación inmediata en el contexto de la matemática en sí y su enseñanza, pero ello no nos debe preocupar, puesto que esto último ocurriría posteriormente mediante las diferentes reformulaciones que sufrió el modelo de compensación 2. Incluso, Camacho (2011b) ha mostrado la transformación y evolución que sobrellevó la representación 2, al establecerse como un modelo de compensación más efectivo cuando fue innovado por Gauss, transformándolo en el método de los mínimos cuadrados. El método de los mínimos cuadrados se convirtió en práctica de uso común en la ingeniería a causa del *rigor* impuesto por Gauss tanto a los métodos de medición angular y lineal como a los del cálculo de las triangulaciones geodésicas que desarrolló en Hannover a lo largo de los años 1820 a 1825. El rigor fue consecuencia del perfeccionamiento tecnológico que sufrieron los teodolitos en esa época –sobre todo en la precisión angular– al tolerar la medición de los ángulos hasta centésimos de segundo sexagesimal.

Por su lado, las técnicas de medición angular y lineal de la topografía fueron rescatadas por pedagogos como Anfossi (1943) y Granville, Smith y Mikesh (1954), entre otros, para la enseñanza de los conceptos elementales involucrados en los cursos de trigonometría. Aunque estas ideas se han utilizado para introducir algunos conceptos de la geometría elemental. Así, por ejemplo, Matheron y Noirfalise (2007) han puesto a estudiantes del liceo francés a resolver problemas de geometría euclidiana a través de operarlos como problemas reales, incorporando técnicas y herramientas de uso procedimental. Desde la perspectiva de la *Teoría antropológica de lo didáctico,* les formularon –en una calca– una *organización didáctica* relacionada con problemas de medición de ángulos internos y lados de triángulos, de modo que las técnicas de uso fueron tomadas de las actividades que realizaban los topógrafos franceses a lo largo del siglo XX. De esta manera, crearon para los estudiantes un microespacio que modelaba el espacio real, incluidos juegos de geometría que simularon ser instrumentos de observación como el teodolito y la cinta métrica.

Por su lado, Camacho (2011a) desarrolló un diseño de situación de aprendizaje en la que incluyó elementos de una práctica de astronomía con la que se buscaba dotar de significado a las actividades de enseñanza del concepto de seno trigonométrico. En la actividad, se diseñaron tablas trigonométricas –que se utilizaron ampliamente en el ambiente escolar a lo largo del siglo XX– que simulaban las tablas de cuerdas de la astronomía ptolemaica, logrando con ello que los estudiantes bosquejaran las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente. En el mismo artículo, el autor proporcionó a estudiantes de arquitectura microespacios de trabajo trigonométrico –hojas de papel milimétrico tamaño carta– en los que se consignaron lotes de terrenos a escala para que, triangulando en diagonal estos últimos, los estudiantes determinaran los ángulos internos del polígono, el área de la superficie del lote y el diseño en tinta de la planta topográfica correspondiente (Camacho, 2011a, pp. 154-157), con el objeto de hacer hincapié en el aprendizaje de las relaciones trigonométricas.

Estos últimos ejemplos dejan ver la utilidad no sólo de los significados que se rescatan en el estudio socioepistemológico, sino también la posible aplicación escolar de las técnicas e instrumentos de medición topográfica que hacen más funcional y comprensible –para los estudiantes– el diseño de las situaciones de aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anfossi, A. (1943), *Trigonometría rectilínea,* México, Editorial Progreso.

Apóstol, T. (2004), "El túnel de Samos", *Ingeniería y Ciencia,* vol. 64, núm. 4, pp. 30-40. Obtenido el 28 de julio de 2010 de http://pr.caltech.edu/periodicals/EandS/articles/LXVII1/samos.htlm.

Bachelard, G. (1928), *Essai sur la connaissance approchée,* París, Librairie Philosophique J. Vrin.

Bails, B. (1789), *Principios Matemáticos de la Real Academia de San Fernando,* 2a. ed., Madrid, Imprenta de la Viuda de Ibarra, tomo II.

Caillemer, A. (1967), *Topographie et photogrammétrie,* París, Sociéte des Editions Technip.

Camacho, A. (2005), "Sistemas sintéticos. Lo inteligible en los manuales para la enseñanza", *Revista Cinta de Moebio,* Universidad de Chile, 022.

——— (2010), "Análisis sociocultural de la noción de variabilidad", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* núm. especial, vol. 13, núm. 4, pp. 29-52.

——— (2011a), "Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial", *Revista Iberoamericana de Educación*

Superior (*RIES*), vol. 2, núm. 3, pp. 152-171. Disponible en http://ries.universia.net/index.php/ries/article/view/84.

Camacho, A. (2011b), "Gauss. Aplicación del cálculo de las probabilidades a un problema de geometría práctica. Estudio socioepistemológico". Documento presentado en el mes de julio durante el *Primer Encuentro Internacional de la Enseñanza en la Probabilidad y la Estadística* 2011, en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

Cantoral, R., Farfán R. M., Lezama J., y Martínez G. (2006), "Socioepistemología y representación: algunos ejemplos", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9, pp. 83-102.

Chevallard, Y. (2006), "Passé et présent de la Théorie Antropologique du Didactique", en Ruiz-Higueras, L. Estepa, F. J. A. García (eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la teoría Antropológica de lo Didáctico*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Impreso en España, pp. 705-746.

Danfrie, Ph. (1597), Illustrations de declaration de l'usage du graphonomètre par la pratique duquel l'on peut mesurer toutes distances. Obtenido el 9 de julio de 2010 de http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b2100149p/f13.

De Gortari, E. (1988), Diccionario de la lógica, España, Plaza y Valdés.

Díaz, F. (1897), *Tratado elemental de topografía, geodesia y astronomía práctica*, México, Oficina Tipográfica de la Secretaría de Fomento, tomo I, 3a. ed.

Gauss, F (1822), *Die trigonometrischen und polygonometrischenrechnungen in der feldmesskunst*, EudenStrien Halle.

Granville, W. A, Smith, P y Mikesh, J. (1954), *Plane and spherical trigonometry*, Boston Massachusetts, Ginn and Company.

Houdement, C., y Kusniak, A. (2006), *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*, Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 11, pp. 175-193.

Jordan, W., Reinhertz, C. y Eggert, O. (1981), *Topographie* (Mantero, J. M., trad.), Barcelona, Gustavo Gili (trabajo original publicado en 1890).

Kusniak, A (2005), "Espace de travail géométrique personnel: une approche didactique et statistique", *Third International Conference about Implicative Statistic Analysys*, Palermo, Italy, disponible en http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_05_Kusniak_16.

Matheron, Y. y R. Noirfalise (2007), "Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'aer et de per", *Une recherche de la Commission Interirem (cii) didactique soutenue par l'inrp",* consultado el 5 de febrero de 2011, en http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/textes-fondateurs.

Montiel, G. (2008), "Una construcción social de la función trigonométrica. Implicaciones didácticas de un modelo socioepistemológico", en Hernández, H. y G. Buendía (eds.), I*nvestigaciones en Matemática Educativa,* Universidad Autónoma de Chiapas, pp. 105-119.

Pasini, C. (1969), *Tratado de topografía,* Barcelona, Gustavo Gili, 6a. ed. española.

Pérez de Moya, J. (1523), *Tratado de geometría práctica y especulativa,* Alcalá, Observatorio de Marina de San Fernando, Impreso por Iván Gracián.

Toscano, R. (1955), *Métodos topográficos,* México, Editorial Porrúa.

DATOS DE LOS AUTORES

Alberto Camacho Ríos
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Chihuahua, México.
camachoalberto@hotmail.com

Bertha Ivonne Sánchez Luján
Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez, Ciudad Jiménez, Chihuahua, México
ivonne_mx_2000@yahoo.com

Ricardo Blanco Vega
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Chihuahua, México.
ricardo.blanco@itchihuahuaii.edu.mx

Jesús Humberto Cuevas Acosta
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Chihuahua, México.
jhca_1@yahoo.com