

Aspectos geométricos en modelos de competencia no-suaves que exhiben la bifurcación zip

Geometric aspects of nonsmooth models of competition that exhibit the zip bifurcation

Carlos Mario Escobar Callejas, José Rodrigo González Granada, Óscar Fernández S.
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

ccescobar@utp.edu.co

jorodryy@utp.edu.co

oscarf@utp.edu.co

Resumen— En el presente artículo de investigación se estudian aspectos geométricos relacionados con el decaimiento de las órbitas del sistema con respecto a un segmento de equilibrios en un modelo del tipo predador presa generado a partir de un campo tridimensional no lineal y no diferenciable que presenta el fenómeno de la bifurcación zip. Estas relaciones geométricas son interesantes ya que ellas permiten tratar la atractividad del segmento de equilibrios en estos sistemas.

Palabras clave— Atractividad, bifurcación de zip, respuesta funcional, sistema no suave.

Abstract—This research paper examines geometrical aspects related to the decay of the orbits of the system relative to a segment of equilibrium in a predator prey type model generated from a non-linear and non-differentiable three-dimensional field that present the phenomenon of the zip bifurcation. These geometric relationships are interesting because they can treat the attractiveness of the equilibrium segment in these systems.

Key Word — Attractiveness, functional response, nonsmooth system, zip of bifurcation.

I. INTRODUCCIÓN

Farkas [1985] ha introducido el concepto de bifurcación zip en un sistema suave (campo diferenciable) EDO tres-dimensional del tipo predador-presa con respuesta funcional generalizada tipo Holling II para denotar el siguiente fenómeno. "A bajos valores de la capacidad de carga k del ecosistema con respecto a la presa, una línea de equilibrios L_k es un atractor del sistema, ella representa coexistencia estable de las tres especies. Si k es incrementado los equilibrios de L_k son continuamente desestabilizados, empezando por aquellos, que representan la dominancia del k -estratega sobre el r -estratega. Arriba de cierto valor de k , el sistema no tiene más equilibrios estables que representen coexistencia; sin embargo, un ciclo límite permanece representando la oscilación de coexistencia del r -estratega y la presa". Recientemente Farkas, E. Saéz and Szantó [2005] han generalizado el

fenómeno de zip a un sistema suave EDO cuatro dimensional con respuesta funcional generalizada tipo Holling III, Kiss [2007] ha generalizado la bifurcación zip en un sistema predador-presa $(n+1)$ -dimensional con respuesta funcional tipo Ivle. También Ferreira [2007] ha tratado la ocurrencia de la bifurcación zip en un sistema suave predador-presa $(n+1)$ -dimensional con respuesta funcional tipo Holling II y en el [2009] ha mostrado la ocurrencia de la bifurcación zip en sistemas predador-presa que presentan reacción difusión.

Una característica importante de estos sistemas es que el octante positivo es particionado en variedades invariantes bidimensionales que intersectan el segmento de equilibrios L_k en puntos de equilibrios aislados [Butler, 1983]. Por lo tanto el análisis local de la atractividad del segmento L_k se restringe al análisis de la atractividad de esta familia de variedades invariantes bidimensionales del sistema en un entorno tubular suficientemente pequeño del segmento de equilibrios L_k . En este artículo se considera un sistema de naturaleza no-suave (campo no diferenciable) el cual no tiene variedades invariantes locales bidimensionales del sistema que particionen el octante positivo alrededor del segmento de equilibrios L_k ; como consecuencia de ello, el análisis de la atractividad del segmento de equilibrios que se realiza en sistemas suaves no aplica, debido a la falta de linealización en el origen el cual se localiza sobre L_k que es una línea de discontinuidad del sistema; sin embargo con la ayuda de las propiedades geométrica del decaimiento de las órbitas y la estructura de los valores propios de los subsistemas que conforman el sistema no suave es posible el análisis de la atractividad del segmento de equilibrios L_k . En esta ocasión sólo se deriva algunas propiedades geométricas que sirven para acotar el decaimiento de las órbitas alrededor de L_k permitiendo tratar la atractividad del segmento de equilibrios L_k en estos sistemas.

II. ALGUNAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL DECAIMIENTO DE LAS ÓRBITAS ALREDEDOR DE L_k

A continuación se presenta una generalización no suave del modelo tratado por varios autores [Butler 1983; Farkas, 1985], bajo el supuesto de que la respuesta funcional de los predadores es una función continua a tramos compuesta por la unión de dos respuestas funcionales que satisfacen las condiciones

denominadas de Butler-Farkas [Butler1983; Farkas,1985] en el espacio de estado del modelo, además de ciertas condiciones de continuidad y de compatibilidad para garantizar la existencia de la bifurcación de zip no-suave.

Además se muestran propiedades geométricas del decaimiento de las órbitas alrededor del segmento de equilibrios Lk que ayudan a tratar la atractividad de Lk en estos sistemas. En este modelo se nota el punto encima de la letra como diferenciación con respecto al tiempo. El modelo considerado es el siguiente:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} f_1((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)); & (s, x_1, x_2) \in D_1 \text{ y } (k, a_1, a_2) \in \tilde{D} \\ f_2((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)); & (s, x_1, x_2) \in D_2 \text{ y } (k, a_1, a_2) \in \tilde{D} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$f_j((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2)) = \begin{cases} \gamma g(s, k) - p_j(s, a_1)x_1 + p_j(s, a_2)x_2 \\ p_j(s, a_1)x_1 - d_1x_1, \\ p_j(s, a_2)x_2 - d_2x_2, \end{cases}; j=1,2$$

$$D_1 = \{(s, x_1, x_2) \in R^3 \mid 0 \leq s \leq \lambda; 0 < x_1 < x_2 \leq \infty\}$$

$$D_2 = \{(s, x_1, x_2) \in R^3 \mid \lambda \leq s \leq \infty; 0 < x_1 < x_2 \leq \infty\}$$

$$\tilde{D} = \{(k, a_1, a_2) \in R^3 \mid 0 < k, a_1, a_2 < \infty\}$$

$$\pi = D_1 \cap D_2$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$p_2(s, a) = p_3(s, a) - p_3(\lambda, a) + p_1(\lambda, a) \quad s \geq \lambda$$

$$p(s, a) = \begin{cases} p_1(s, a) & s \leq \lambda \\ p_2(s, a) & s \geq \lambda \\ p(\lambda, a_i) = d_i & i=1,2, \end{cases}$$

$$p_j(s, a_i) = p_j(\lambda, a_i) + z_{ij}(s - \lambda); z_{ij} = \partial_s p_j(\lambda, a_i)$$

Se considera el sistema (1.1) definido en el espacio de estados D y el espacio de parámetro $\tilde{D}$ compuesto por la unión de dos subsistemas $\dot{x} = f_j((s, x_1, x_2), (k, a_1, a_2))$ los cuales son generados por los campos suaves f_j ; $j=1,2$ definidos sobre los espacios de estados D_j y de parámetros D , separados por el plano de discontinuidad π que es la superficie de conmutación de los flujos de cada subsistema φ_j ; $s(t)$ representa la población de especie de la presa y $x_1(t)$, $x_2(t)$ describen las poblaciones de las especies predatoras que compiten por la presa $s(t)$; $p(s, a_i)$ es una función continua por tramos que representa la tasa de nacimiento o respuesta funcional del predador i , formada por la unión de las respuestas funcionales $p_1(s, a_i)$ y $p_3(s, a_i)$ las cuales satisfacen las condiciones denominadas de Butler-Farkas y la condición de continuidad (1.2) en todo el espacio de estados D ; $p_j(s, a_i)$ representa la tasa de nacimiento o respuesta funcional del predador i que actúa en el subsistema j . La

respuesta funcional $p_2(s, a_i)$ satisfacen las condiciones denominadas de Butler-Farkas en D_2 , y $g(s, k)$ significa la resistencia ambiental del medio al crecimiento de la presa. Las constantes, $\gamma, d_i > 0$, son respectivamente la tasa de crecimiento maximal de la presa, tasa de muerte de la especie predatora i y por último, $a_i > 0$, $i=1,2$ representan los parámetros de escala en la respuesta funcional del predador i . Se dice que el sistema (1.1) es suave (no-suave) en el caso en que las respuestas funcionales satisfacen la igualdad respectivamente, es decir $f_1 = f_2$ ($f_1 \neq f_2$).

El sistema (1.1) tiene los siguientes puntos de equilibrio:

$Q_1(0,0,0)$, $Q_2(k,0,0)$ y los puntos del segmento de línea recta Lk:

$$L_k = \left\{ \begin{aligned} &(s, x_1, x_2) \in R^3 : p(\lambda, a_1)x_1 + p(\lambda, a_2)x_2 = \gamma \lambda g(\lambda, k); \\ &s = \lambda, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Si el sistema (1.1) es suave, las variedades invariantes locales de cada subsistema que intersectan transversalmente el segmento de equilibrios Lk coinciden sobre la variedad de discontinuidad π ; sin embargo si el sistema (1.1) es no suave podría por efecto de la conmutación del sistema no coincidir sobre el plano de discontinuidad π , lo que motiva la siguiente definición.

Definición 1: Sea $x_0 \in L_k$ y $V_{x_0,j}$ la variedad invariante local estable (inestable) del subsistema generado por el campo f_j ; $j=1,2$, en x_0 . Decimos que el sistema no suave (1.1) preserva sus variedades invariantes locales $V_{x_0,1}$ y $V_{x_0,2}$ en $x_0 \in L_k$ si $V_{x_0,1} \cap \pi = V_{x_0,2} \cap \pi$; en caso contrario decimos que no preserva o que destruye sus variedades invariantes locales en x_0 por la conmutación del sistema.

A continuación se analiza algunas propiedades geométricas de la dinámica del sistema no suave (1.1) cuando los subsistemas del sistema no suave (1.1) asociado a los campos f_j ; $j=1,2$, no preserva sus variedades invariantes locales. En este caso las fronteras de las variedades invariantes bidimensionales de cada subsistema del sistema (1.1) no coinciden sobre la superficie de conmutación π , como consecuencia de ello se tiene que las únicas variedades invariantes bidimensionales del sistema son los planos coordenados, por lo cual el método para determinar la estabilidad de los puntos del segmento de equilibrios Lk a partir de la linealización de los subsistemas del sistema no suave (1.1) generado por los campos f_j ; $j=1,2$, no es aplicable, y se requiere conocer la forma como estas variedades intersectan transversalmente la superficie de conmutación π , para así determinar una regla decaimiento de las órbitas, esta vez no con respecto al equilibrio asociado a la variedad invariante que lo contiene, si no con respecto al segmento de equilibrios Lk. Ahora con cada conmutación de la órbita a cada lado de la superficie de conmutación, sobre las variedades bidimensionales respectivas van cambiando sus centros de equilibrio en la dirección del zip. Sin embargo se puede demostrar que la

atractividad del segmento de equilibrios L_k persiste a pesar de la conmutación de las órbitas del sistema no suave (1.1). Al dividir la tercera ecuación por la segunda ecuación del subsistema generado por el campo $f_j; j=1,2$, se obtiene las ecuaciones de las trayectorias que satisfacen la ecuación

$$\text{diferencial } \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1} \times \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}.$$

Así, la función $f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1} \times \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}$ es una integral

primera del subsistema generado por el campo f_j ; como una consecuencia se tiene que las superficies

$$x_2 = c_j x_1^{z_j}, \quad c_j \geq 0; \quad z_j = \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}; \quad j=1,2, \quad (2.2)$$

son superficies invariantes del subsistema generada por el campo $f_j; j=1,2$, donde $c_j \in \mathbb{R}$. Para $c_j \geq 0$, sea $M_j; j=1,2$, las variedades invariantes del subsistema j definida por

$$M_j = \{(s, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : s \geq 0, x_2 = c_j x_1^{z_j}, c_j \geq 0\}, j=1,2.$$

Entonces, la familia de variedades $\{M_j : c_j \geq 0; j=1,2\}$ de cada subsistema del sistema (1.1) son dos familias de foliaciones bidimensional del octante positivo de $\mathbb{R}^3$, cuya intersección con el plano de discontinuidad π forma a su vez dos familias de curvas que particionan el primer cuadrante en el plano π , véase figura 1.

A continuación se considera la notación preliminar de los elementos geométricos de interés de las intersecciones de las variedades invariantes con la superficie de discontinuidad, véase figura 1.

Definición 2. Considere las variedades invariantes

$$M_j = \left\{ (s, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : s \geq 0, x_2 = c_j x_1^{z_j}, c_j \geq 0, \right. \\ \left. z_j = \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}; j=1,2, \right\}, \quad (2.3)$$

y los siguientes elementos geométricos:

- $(\lambda, x_{11}, x_{21})$ es la condición inicial de la órbita que pertenece a los entornos tubulares suficientemente pequeños $T_m \subset T_M$ del segmento de equilibrios L_k de los subsistemas 1 y 2 del sistema (1.1) respectivamente.
- $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$ es el punto de equilibrio contenido en la variedad invariante definida por la condición inicial $(\lambda, x_{11}, x_{21})$
- $\bar{x}_{11}$ es la distancia entre la condición inicial $(\lambda, x_{11}, x_{21})$ y el punto de equilibrio $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$

- $(\lambda, x_{12}, x_{22})$ es el segundo punto de intersección de la órbita con condiciones iniciales en $(\lambda, x_{11}, x_{21})$ con el plano de discontinuidad
- $\bar{x}_{21}$ es la distancia entre el punto $(\lambda, x_{12}, x_{22})$ y el punto de equilibrio $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$
- $(\lambda, x_{12q}, x_{22q})$ es el punto de equilibrio contenido en la variedad invariante definida por la condición inicial $(\lambda, x_{12}, x_{22})$
- $\bar{x}_{22}$ es la distancia entre el punto $(\lambda, x_{12}, x_{22})$ y el punto de equilibrio $(\lambda, x_{12q}, x_{22q})$
- $(\lambda, x_{13}, x_{23})$ es el tercer punto de intersección de la órbita con condiciones iniciales en $(\lambda, x_{11}, x_{21})$ con el plano de discontinuidad π
- $\bar{x}_{32}$ es la distancia entre el punto $(\lambda, x_{13}, x_{23})$ y el punto de equilibrio $(\lambda, x_{12q}, x_{22q})$

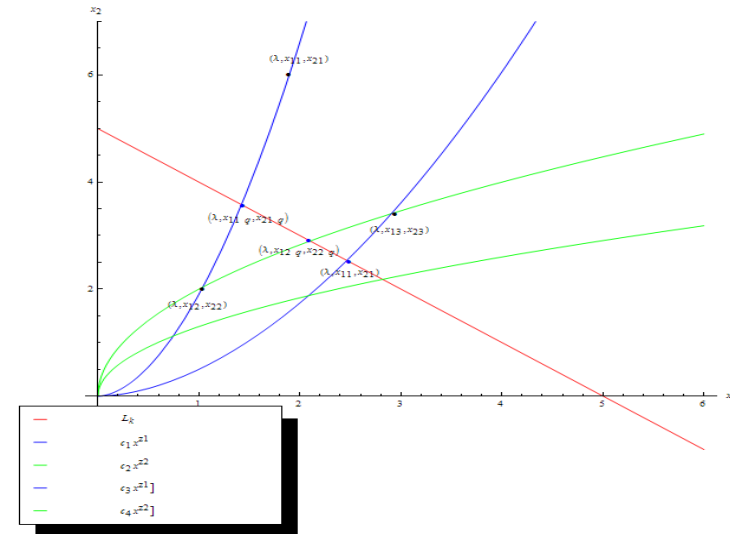


Figura 1. Las curvas de intersección de las variedades invariantes (2.14) con el plano de discontinuidad π

Proposición 1: Sea $\bar{x}_{21}$ y $\bar{x}_{22}$ las distancias dadas en la definición 2, entonces la razón entre las distancias $\bar{x}_{22}$ y $\bar{x}_{21}$ están acotadas por

$$\frac{p(\lambda, a_2)}{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}} \leq \frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \leq \frac{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}}{p(\lambda, a_2)}$$

Prueba: Considere las rectas

$$y = c_1 z_1 x_{11q}^{z_1-1} x + c_1 x_{11q}^{z_1-1} (1 - z_1), \quad (2.4)$$

que pasa por el punto $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$, y el punto $(\lambda, x_{12}, x_{22})$; y la recta

$$y = c_2 z_2 x_{11q}^{z_2-1} x + c_2 x_{11q}^{z_2-1} (1 - z_2), \quad (2.5)$$

que pasa por el punto $(\lambda, x_{12q}, x_{22q})$, y el punto $(\lambda, x_{12}, x_{22})$. Igualando las ecuaciones (2.4) y (2.5) se obtiene

$$x = x_{12} = \frac{c_1(1-z_1)x_{11q}^{z_1} - c_2(1-z_2)x_{12q}^{z_2}}{c_2 z_2 x_{12q}^{z_2-1} - c_1 z_1 x_{11q}^{z_1-1}} \quad (2.6)$$

Si se evalúa la ecuación que define Lk en (2.1) en el punto (x_{12q}, x_{22q}) , y se tiene en cuenta la igualdad (2.2) se tiene que C_j viene dado por

$$c_j = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{1jq} p(\lambda, a_1)}{x_{1jq}^{z_j} p(\lambda, a_2)}; j = 1, 2. \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.6) en (2.7) se obtiene

$$x = x_{12} = \frac{x_{11q} x_{12q} (\gamma \lambda g(\lambda, k)(z_1 - z_2) + p(\lambda, a_1)((z_2 - 1)x_{12q} - (z_1 - 1)x_{11q}))}{(z_1 x_{12q} - z_2 x_{11q}) \gamma \lambda g(\lambda, k) + x_{11q} x_{12q} (z_1 - z_2) p(\lambda, a_1)} \quad (2.8)$$

Ahora si se despeja $\bar{x}_{21}$ de la primera componente de la ecuación vectorial siguiente

$$\bar{x}_{21} \frac{(1, \frac{\partial x_2}{\partial x_1}(x_{11q}))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}(x_{11q})\right)^2}} + (x_{12}, x_{22}) = (x_{11q}, x_{21q}), \quad (2.9)$$

que resulta de considerar el vector tangente a la curva $C_1 x_1^{z_1}$ en el punto $(\lambda, x_{11q}, x_{21q})$ se tiene

$$\bar{x}_{21} = -(x_{12} - x_{11q}) \sqrt{1 + (C_1 z_1 x_{11q}^{z_1-1})^2} \quad (2.10)$$

Sustituyendo (2.7), y (2.8) en (2.9), se obtiene

$$\bar{x}_{21} = \frac{(x_{11q} - x_{12q})(-z_2 \gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{12q}(z_2 - 1)p(\lambda, a_1)) \sqrt{p(\lambda, a_2)^2 + z_1^2 (\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{11q} p(\lambda, a_1))^2}}{p(\lambda, a_2)((z_2 x_{11q} - z_1 x_{12q}) \gamma \lambda g(\lambda, k) + x_{11q} x_{12q} (z_1 - z_2) p(\lambda, a_1))} \quad (2.11)$$

Si se despeja $\bar{x}_{22}$ de la primera componente de la ecuación vectorial

$$\bar{x}_{22} \frac{(1, \frac{\partial x_2}{\partial x_1}(x_{12q}))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}(x_{12q})\right)^2}} + (x_{12}, x_{22}) = (x_{12q}, x_{22q}),$$

la cual resulta de considerar el vector tangente a la curva $C_2 x_2^{z_2}$ en el punto $(\lambda, x_{12q}, x_{22q})$ se obtiene

$$\bar{x}_{22} = -(x_{12} - x_{12q}) \sqrt{1 + (C_2 z_2 x_{12q}^{z_2-1})^2}. \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.7), y (2.8) en (2.12), se tiene

$$\frac{(x_{11q} - x_{12q})(z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{11q}(z_1 - 1)p(\lambda, a_1)) \sqrt{p(\lambda, a_2)^2 + z_2^2 (\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{12q} p(\lambda, a_1))^2}}{p(\lambda, a_2)((z_1 x_{12q} - z_2 x_{11q}) \gamma \lambda g(\lambda, k) + x_{11q} x_{12q} (z_2 - z_1) p(\lambda, a_1))} \quad (2.13)$$

Derivando parcialmente la razón entre $\bar{x}_{22}$ y $\bar{x}_{21}$ con respecto a la variable x_{11q} y x_{12q} respectivamente, se tiene que

$$\partial_{12q} \left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) = \frac{P \times Q}{R} \quad y$$

$$P = -x_{11q} z_2 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_2) \sqrt{p(\lambda, a_2) x_{11q}}^2 + z_1^2 (\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{11q} p(\lambda, a_1))^2}$$

$$Q = (-z_2 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1) + x_{12q} (z_2 p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2))$$

$$R = (z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{11q} (z_1 - 1) p(\lambda, a_1)) \left(\sqrt{p(\lambda, a_2) x_{12q}}^2 + z_2^2 (\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{12q} p(\lambda, a_1))^2 \right)^3$$

$$\partial_{11q} \left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) = \frac{\bar{P} \times \bar{Q}}{\bar{R} \times \bar{S} \times \bar{T}}$$

$$\bar{P} = -z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) (z_2 \gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{12q} (z_2 - 1) p(\lambda, a_1))$$

$$\bar{Q} = (z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1) - x_{11q} (z_1 p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2))$$

$$\bar{R} = (z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{11q} (z_1 - 1) p(\lambda, a_1)) \sqrt{p(\lambda, a_2) x_{12q}}^2 + z_2^2 (\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{12q} p(\lambda, a_1))^2}$$

$$\bar{S} = \sqrt{p(\lambda, a_2) x_{12q}}^2 + z_2^2 (\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{12q} p(\lambda, a_1))^2}$$

$$\bar{T} = \sqrt{p(\lambda, a_2) x_{11q}}^2 + z_1^2 (\gamma \lambda g(\lambda, k) - x_{11q} p(\lambda, a_1))^2}$$

luego

$$\partial_{11q} \left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}) = 0, \text{ si } x_{11q} = \frac{z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1)}{(z_1 p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2)},$$

$$\partial_{12q} \left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{12q}) = 0, \text{ si } x_{12q} = \frac{z_2 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1)}{(z_2 p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2)},$$

lo cual implica que la gráfica de la función

$$\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q}) \text{ tiene forma de silla, ya que los puntos}$$

críticos de las curvas $\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q})$ con x_{12q} constante, no

depende de x_{11q} , y las curvas $\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q})$ con

x_{12q} constante, no depende de x_{11q} . En este caso el máximo

absoluto de la función $\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q})$ se encuentra en el

extremo de la curva crítica $\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q})$ con

x_{12q} constante, es decir en el punto $(x_{11q}, x_{12q}) = (\bar{x}_{11q}, \bar{x}_{12q})$ con

$$\bar{x}_{11q} = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}$$

$$\bar{x}_{12q} = \frac{z_1 \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1)}{(z_1 p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2)}$$

y su máximo viene dado por

$$\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q}) = \frac{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}}{p(\lambda, a_1)} \geq \sqrt{2}.$$

El mínimo absoluto de la función $\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q})$ se encuentra en el extremo de la curva crítica $\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q})$ con x_{11q} constante, es decir en el punto

$$(x_{11q}, x_{12q}) = (\bar{x}_{11q}, \bar{x}_{12q}) \text{ donde}$$

$$\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q}) = \frac{p(\lambda, a_1)}{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}} \leq 1.$$

con lo cual se termina la prueba. $\square$

A continuación se presenta una interpretación geométrica de los valores de los puntos críticos y de los máximos y mínimos absolutos obtenidos en la proposición anterior.

Proposición 2: Considere las variedades invariantes

$$x_2 = c_j x_1^{z_j}, \quad c_j \geq 0; \quad z_j = \frac{\partial_s p_j(\lambda, a_2)}{\partial_s p_j(\lambda, a_1)}; \quad j = 1, 2, \quad (2.14)$$

entonces, las abscisas de los puntos de intersección donde las curvas de intersección de las variedades invariantes (2.14) con el plano de discontinuidad π , intersectan ortogonalmente al segmento de equilibrios Lk, son los valores críticos obtenidos en la proposición anterior. Además el máximo y el mínimo absoluto de la función

$$\left(\frac{\bar{x}_{22}}{\bar{x}_{21}} \right) (x_{11q}, x_{12q}) \text{ corresponden a la cosecante del ángulo}$$

formado por la recta Lk, y el eje x_1 , y al seno del ángulo formado por la recta Lk y el eje x_1 , respectivamente.

Prueba: Por hipótesis la pendiente de la recta Lk y la curva de intersección de la variedad invariante (2.14) con el plano de discontinuidad π , del subsistema generado por el campo f_j son ortogonales en el punto de intersección, por lo tanto de la igualdad (2.14) y la igualdad (2.1), se tiene que el producto de sus pendientes viene dado por:

$$c_j x_{1jq}^{z_j-1} p(\lambda, a_2) \frac{p(\lambda, a_1)}{p(\lambda, a_2)} = -1. \quad (2.15)$$

Como el punto (x_{11q}, x_{12q}) está en la intersección de la recta Lk y la superficie invariante (2.14), entonces se tiene la siguiente igualdad

$$\gamma \lambda g(\lambda, k) - p(\lambda, a_1) x_{1jq} - c_j p(\lambda, a_2) x_{1jq}^{z_j} = 0. \quad (2.16)$$

De la ecuaciones (2.15) y (2.16) se tiene que

$$\bar{x}_{1jq} = \frac{z_j \gamma \lambda g(\lambda, k) p(\lambda, a_1)}{(z_j p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2)},$$

con lo cual se obtiene la primera parte de la afirmación

Los interceptos de la recta Lk con los ejes x_1 y x_2 son

$$\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}, \text{ y } \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)}, \text{ respectivamente, luego la}$$

cosecante del ángulo formado por la recta Lk y eje x_1 viene dado por

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)} \right)^2 + \left(\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right)^2}}{\left(\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right)} = \frac{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}}{p(\lambda, a_1)}, \text{ y el}$$

seno del ángulo formado por la recta Lk y eje x_1 viene dado por

$$\left(\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right) \sqrt{\left(\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)} \right)^2 + \left(\frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)} \right)^2} = \frac{p(\lambda, a_1)}{\sqrt{p(\lambda, a_1)^2 + p(\lambda, a_2)^2}}, \text{ con}$$

lo cual se termina la prueba. $\square$

III. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente artículo de investigación se han obtenido propiedades geométricas relacionadas con el decaimiento de las órbitas del sistema con respecto a un segmento de equilibrios en un modelo del tipo predador presa, el cual es generado a partir de un campo tridimensional no lineal y no diferenciable que presenta el fenómeno de la bifurcación zip. Estas relaciones geométricas son interesantes, ya que ellas permiten tratar la atractividad del segmento de equilibrios L_k en estos sistemas.

REFERENCIAS

Referencias de publicaciones periódicas:

- [1] G. J. Butler, "Competitive predator-prey systems and coexistence". In *population Biology Proceedings, Edmonton: Lecture Notes in Biomathematics*. 52: 210-299. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [2] M. FARKAS, "ip bifurcation in a competition model", *Nonlinear analysis*". Vol 8. p. 1295-1309. TMA 1984.
- [3] M. FARKAS, "A zip bifurcation arising in population dynamics", In *10th Int. Conf. On, Nonlinear Oscilations*, Varna 1984. 150-155. Sofia: Bugarian Academy of Science., 1985.

- [4] M. FARKAS, E. SÁEZ, SZÁNTÓ, " Velcro Bifurcation in Competition Models with Generalized Holling Functional Response", *Miskolc Mathematical Notes*, Vol 6, N.2, 2005, pp.165-178.
- [5] J. D. FERREIA, " Hopf and zip bifurcation in an specific $(n+1)$ -competitive system", *Matematicas: Enseñanza Universitaria*. 2007.
- [6] J. D. FERREIA, L. A. OLIVEIRA, , " Zip bifurcation in a competitive system with diffusion. Differential Equations and Dynamical Systems, " Vol. 17, Nos. 1 & 2, pp. 37--53, January & April 2009.
- [7] K- KISS, KOVACS SANDO. " Qualitative behavior of n -dimensional ratio-dependent predator-prey systems". *Applied Mathematics and Computation* 199 535–546. 2008.