LA FUNDAMENTACIÓN DEL *CALCULUS* EN ESPAÑA: EL CÁLCULO INFINITESIMAL EN GABRIEL CISCAR (1760-1829)

ELENA AUSEJO
Universidad de Zaragoza

FRANCISCO JAVIER MEDRANO
IES Jerónimo Zurita (Zaragoza)

Resumen

Este artículo estudia el cálculo infinitesimal en Gabriel Ciscar, según se explica en su edición corregida y *aumentada con una exposición de los principios del cálculo* del *Examen Marítimo* de Jorge Juan (1793), para su uso en el *Curso de estudios mayores* de la Academia de Guardias Marinas de Cartagena.

Ciscar, partidario del cálculo de fluxiones, acepta el cálculo infinitesimal sólo en virtud del respeto que le merece Jorge Juan. En realidad, las diferencias entre el enfoque fluxional o infinitesimal aparentemente no fueron tan importantes para los autores españoles a finales del siglo XVIII, cuando la notación de Leibniz era absolutamente dominante, pero los conceptos fluxionales aún se consideraban más rigurosos –una posición que aparece en autores como Juan Justo García, Subirás, Bails, Chaix e incluso Vallejo. Sin embargo, éste no es el caso de Ciscar, que rechaza las diferenciales pese a su utilidad como resultado de su profundo conocimiento del problema de los fundamentos de cálculo.

Este artículo muestra cómo Ciscar se alínea con la teoría de los límites como base de la fundamentación del cálculo, lo que constituye un claro precedente del enfoque correcto del problema.

Abstract

This paper studies Gabriel Ciscar's work on infinitesimal calculus, as explained in his *exposition of the principles of calculus*, which was published in his corrected and enlarged edition of Jorge Juan's *Examen Marítimo* (1793), to be used in the *Course of Major Studies* at the Midshipmen Academy in Cartagena.

Ciscar, a partisan of fluxional calculus, accepts infinitesimal calculus only out of consideration for Jorge Juan. Actually, differences between fluxional or infinitesimal approaches were apparently not so important for Spanish authors by the end of the 18th century, when Leibniz's notation was absolutely dominant, but fluxional concepts were still considered more rigorous –a position that appears in authors such as Juan Justo García, Subirás, Bails, Chaix, and even Vallejo. Nevertheless, this is not the case of Ciscar, as he dismisses differentials despite their usefulness as a result of his deep understanding of the problem of foundations of calculus.

This article shows how Ciscar follows the theory of limits as the basis for the foundations of calculus, which is a clear precedent for the correct approach to the problem.

Palabras clave: Matemáticas, Cálculo infinitesimal, Límite, España, Siglo XVIII, Ciscar.
Keywords: Mathematics, Infinitesimal Calculus, Limit, Spain, 18th Century, Ciscar.

Recibido el 25 de enero de 2012 – Aceptado el 25 de abril de 2012

Introducción: Gabriel Ciscar, matemático[1]

Aunque la figura del matemático profesional es prácticamente inexistente en la sociedad española hasta la segunda mitad del siglo XIX, como corresponde a un mundo en el que la profesionalización científica se iba gestando muy poco a poco, sí que se encuentran con anterioridad núcleos de personas que cultivaron las matemáticas en España. Lo que hoy catalogaríamos como matemáticos españoles entre mediados del siglo XVIII y mediados del XIX se hubieran presentado ante nosotros como militares de los cuerpos y armas facultativos, marinos, ingenieros, arquitectos, profesores u hombres emprendedores amantes de las ciencias que procuraron incidir en la vida política del país en favor de las ciencias exactas como base de la modernización científica y técnica.

Se puede afirmar que el desarrollo de las matemáticas fue asunto de hombres de mentalidad heterodoxa, afrancesados primero y liberales después, fuertemente devotos de las conquistas revolucionarias francesas. Además, cabe constatar que cuando saltan las tensiones entre las matemáticas y la política, es la ciencia la que queda postergada en beneficio de la atención a asuntos más urgentes y decisivos en casi todos los casos [HORMIGÓN, 1995].

Indudablemente los marinos, tanto por su propia profesión como por la extensión real del estado español entre los siglos XVI y XVIII, hubieron de contar con la ciencia para el desempeño de sus actividades cotidianas. La modernización científica en la marina española tuvo mucho que ver con el trabajo y la tutela personal del caballero Jorge Juan, por una parte, y con el establecimiento de los Observatorios Astronómicos vinculados a la Marina (San Fernando, Cartagena) y la modernización de los planes de estudios de los guardiamarinas por otra. Pues bien, en este contexto destaca la obra matemática de Gabriel Ciscar y Ciscar, centrada en la Academia de Guardias Marinas de Cartagena, cuya dirección asumió entre 1788 y 1798.

Actualmente siguen sin estar totalmente explicados el origen y procedencia del elevado nivel de conocimientos matemáticos alcanzado por Gabriel Ciscar, esto es, el detalle de su formación matemática. Tras estudiar humanidades en la Escuela Pía de Valencia y filosofía en Valencia, en 1777 ingresó en la recién creada Compañía de Guardias Marinas de Cartagena donde, tras sólo cinco meses de estudio, obtuvo las máximas calificaciones en los exámenes. En 1778 embarcó en el navío San Juan Bautista para realizar el viaje de prácticas en las cercanías de Sicilia y el Mar Adriático, ascendió a alférez de fragata y en 1782 a alférez de navío. En agosto de 1783 volvió a Cartagena para incorporarse al Curso de Estudios Mayores junto con otros seis oficiales, pero fue eximido de asistir a clase por el director, Jacinto Ceruti, «por hallarse en estado de imponerse en los estudios sin auxilio de maestro». En octubre del mismo año pasó a ocuparse de la clase de Navegación en Cartagena, dos años después de la de *Matemáticas sublimes* y en 1788 fue ascendido a Teniente de Navío y nombrado Director de la Academia, hasta que en 1798 cesó como director y primer maestro de matemáticas por haber sido designado Comisario Provincial de Artillería de Marina.

La obra matemática de Ciscar es esencialmente docente. En 1785 propone un ambicioso plan de estudios para la Academia de Cartagena que se aprueba también para las de Ferrol y Cádiz. En 1793 publica la reedición corregida y ampliada del *Examen Marítimo* de Jorge Juan, para su uso en el *Curso de estudios mayores* de la Academia, en la que destaca su *exposición de los principios del cálculo*, un tema que se sitúa entre los más candentes de la matemática de la época. Posteriormente, en el bienio 1795-96, aparecen sus Tratados de aritmética, trigonometría esférica y cosmografía para la instrucción de los guardias marinas, y en 1803, ya alejado de sus tareas docentes, su *Curso de estudios elementales de Marina* en cuatro tomos (Aritmética, Geometría, Cosmografía y Pilotaje), que será objeto de seis ediciones.

Un lustro después, la invasión napoleónica puso a Ciscar en la senda de la lucha por la libertad: en lo sucesivo, la guerra, la represión y el exilio sólo le permitieron una relación esporádica con las matemáticas [LÓPEZ SÁNCHEZ, 1995].

El cálculo infinitesimal en Gabriel Ciscar

El texto en el que más claramente se perciben las ideas de Ciscar sobre el cálculo infinitesimal es su reedición ampliada del *Examen Marítimo* de Jorge Juan, que reelabora para su uso en el Curso de Estudios Mayores de la Academia de Guardiamarinas.

En la introducción [CISCAR, 1793] comenta que fue durante la preparación de este curso cuando vio la necesidad de incluir algunas notas aclaratorias e incluso corregir algunos errores que se observaban en la obra original de Jorge Juan. Lo más interesante desde el punto de vista del estudio actual es que dedica una parte importante de sus adiciones al tema del cálculo (64 de las 114 páginas). De hecho, la nueva edición lleva el subtítulo de *aumentada con una exposición de los principios del cálculo.* Aunque no sea un libro dedicado específicamente al cálculo, sí que lo trata de manera suficientemente extensa como para poder evaluar sus conocimientos, influencias y planteamientos con respecto al tema.

Se muestra claramente partidario del cálculo fluxional de Newton frente al infinitesimal de Leibniz. Por consiguiente, la idea de infinitesimal en cuanto que cantidad infinitamente pequeña le repugna. Admite, sin embargo, que tanto el método de Newton como el de Leibniz se diferencian sólo en el modo de demostrar las operaciones que se usan en ellos, siendo iguales en lo demás. Pero deja clara su preferencia por el primero:

> Por el método de las fluxîones se demuestran las reglas de éste cálculo sublime con más evidencia: pero como nuestro Autor [Jorge Juan] se sirve del infinitesimal, para aclararlo nos veremos precisados á seguirlo á pesar nuestro [CISCAR, 1793, p. 51].

No queda duda de que el método no le gusta nada y de que sólo la fuerza de la figura y de la obra de Jorge Juan le lleva a mantenerlo sin sustituirlo por el de Newton. Es importante reseñar que no es ésta la única vez que aparece la figura de Jorge Juan, con su *Examen Marítimo*, como referente determinante para modificar los criterios de un autor y tratar el cálculo mediante el método y la notación infinitesimal en lugar de fluxional. Así, también Francisco Subirás afirma, en el Certamen del Seminario de Nobles de 1776, que a pesar de seguir los principios del cálculo fluxional usará el diferencial *para conformarnos en todo con el Método de nuestro Excelentísimo Director difunto* [SUBIRÁS, 1776, p. VII].

Por otro lado Ciscar defiende, al igual que Cousin [1777 y 1796], la idea de límite como base de la comprensión tanto del cero como del infinito, rechazando explícitamente las cantidades infinitamente pequeñas del cálculo infinitesimal, que para él no existen y son de hecho ceros absolutos, una idea muy asumida ya por los matemáticos de la época. Así, su inquietud ante la concepción del cálculo como un cálculo de aproximación aparecerá mencionada en diferentes ocasiones, dado que le preocupa mucho la práctica de despreciar cantidades que, según él, aunque sean muy pequeñas *no se puede saber si será o no despreciable mientras se ignore el uso que se ha de hacer de esta expresión* [CISCAR, 1793, p. 53]. Define límite al estilo de D´Alembert o Cousin:

> 204 La cantidad x se dice que tiene por límite otra cantidad y, quando x se puede ir aproxîmando mas y mas á y hasta no diferenciarse de ella en nada, pero sin poder pasar de allí.
>
> 205 […] Si una cantidad […] disminuye sin límite, se dice que su límite es el infinitamente pequeño ó cero [CISCAR, 1793, p. 54].

Parece pues que Ciscar renuncia a la idea de que el límite no puede ser nunca alcanzado por la cantidad variable que se le está aproximando, una idea que no será desterrada hasta que Lacroix, en su *Traité* de 1797, elimine esta restricción de la definición de límite que, sin embargo, permanecerá durante el comienzo del siglo XIX. Así, diferentes autores declaran de forma expresa que no se alcanza o no se sobrepasa el límite, como puede verse en los siguientes ejemplos:

> On dit qu´une grandeur est la limite d´une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d´une grandeur donnée, si petite qu´on la puit supposer, sans pourtant que la gran-

> deur, qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche; en force que la différence d'une pareille quantité à la limite est absolument inassignable». [D'ALEMBERT, 1785, p. 309].
>
> On dit d'une grandeur qu'elle a pour limite une autre grandeur, quand on conçoit qu'elle peut en approcher jusqu'à n´en différer que d'une quantité aussi petite qu'on voudra, sans pouvoir jamais coïncider avec elle [COUSIN, 1796, p. 84].
>
> Si una cantidad varía acercándose continuamente á otra cantidad ó expresión, de manera que la diferencia entre esta y aquella pueda llegar á ser menor que qualquiera cantidad dada, por pequeña que sea, sin que jamás pueda llegar á serle igual; dicha cantidad ó expresión se llama el límite de la otra» [CHAIX, 1801, p. 3].
>
> Se entiende por límite de una cantidad o función á aquella á la cual no puede llegar jamas la otra; pero que se le puede acercar tanto que la diferencia entre ella y la cantidad propuesta sea menor que cualquiera otra cantidad dada, por pequeña que sea» [VALLEJO, 1813, p. 71].

En cuanto a Ciscar, el ejemplo geométrico que utiliza permite dudar sobre la solidez de su creencia en la posibilidad de alcanzar el límite:

> 210 Para poner un ejemplo de los límites de las cantidades, no hay mas que atender que al paso que aumenta el número de lados de un polígono regular inscripto, el polígono se acerca mas á igualarse con el círculo, de suerte que puede haber un polígono inscripto cuya diferencia con el círculo sea menor que *m*, representando *m* una cantidad cualquiera por pequeña que sea. De aquí se sigue que el círculo es el límite del polígono inscripto, y también lo es del circunscripto.
>
> El número de lados que puede tener un polígono no tiene límite, y por eso se dice que su límite es el infinito.
>
> El seno verso ó diferencia entre el radio mayor y menor del polígono va disminuyendo al paso que aumenta el número de lados, y esta disminución no tiene límite; y así se dice que su límite es el infinitamente pequeño [CISCAR, 1793, p. 55].

En cualquier caso, para Ciscar el límite explica perfectamente los fundamentos del cálculo, frente a la oscuridad de los infinitamente pequeños. Así,

> las expresiones cero, nada, infinitamente pequeño, infinitesimal y diferencial, son idénticas en quanto á su valor, y la diferencia consiste solo en que por cantidad infinitamente pequeña, infinitesimal ó diferencial, entendemos el cero ó nada que ha resultado de haber disminuido mas y mas una cantidad que se puede disminuir sin límite [CISCAR, 1793, p. 54].

En otras palabras, está intentando trazar una distinción –muy elemental– entre el número constante cero y una función que tiende a cero. Esta distinción es importante, porque será el tratamiento que dará Cauchy a sus infinitésimos, que pasarán a ser variables o funciones de límite cero. Así, el planteamiento de Ciscar constituye un claro precedente del enfoque correcto del problema, aunque faltan muchos elementos para dotarlo de un mínimo rigor, entre otros, una organización expositiva en torno al concepto de función, que Ciscar maneja pero no utiliza como elemento aglutinador de su enfoque. Trabaja muchas más veces con el poco claro concepto de cantidad, que deja sin definir el papel de variable dependiente e independiente. No es éste un error específicamente imputable a Ciscar, puesto que es usual en ese momento, pero muestra cómo la idea correcta no es suficiente en ausencia del entramado operativo y teórico que permita desarrollarla.

Consecuencia de su rechazo de los infinitesimales es su crítica a algunos planteamientos que han venido gozando de bastante popularidad pero han quedado ya obsoletos:

> Las ideas que Wolfio y otros Autores dan de las cantidades infinitamente pequeñas son inexâctas, y de ellas se seguiría que el cálculo infinitesimal era un cálculo de aproxîmación [CISCAR, 1793, p. 54].

Una reflexión interesante, presente también en la obra de Cousin, es la que hace sobre el problema de la aproximación. En opinión de Ciscar la introducción de unas cantidades infinitamente pequeñas como distintas de cero implica un método de aproximación, que no de cálculo exacto. Esta cuestión la resuelve a través de la idea de límite, pero hay que recordar que habrá otras respuestas a este problema. Entre ellas cabe destacar la de Carnot, cuya teoría de compensación de errores tiene algún seguidor entre los autores españoles. Pues bien, Ciscar, como Cousin, rechaza explícitamente esta posibilidad, lo que muestra su profunda y acertada comprensión de los problemas de fundamentación del cálculo infinitesimal que se dirimían en su época.

No puede, sin embargo, sustraerse a la tremenda facilidad de uso que la idea de diferencial ofrece, en virtud de la cual se mantiene incluso entre autores que niegan la misma existencia de la diferencial. No obstante, su utilidad y facilidad no hacen la más mínima mella en su rechazo:

> En el cálculo infinitesimal se supone que si dos ó mas cantidades disminuyen hasta llegar á ser iguales á cero, ó lo que es lo mismo, hasta llegar á ser infinitamente pequeña; estos ceros conservan entre sí una cierta razon. Tenemos este principio por falso, y creemos que las equaciones entre cantidades infinitesimales son absurdas, sin embargo de ser utilísimas, por deducirse de ellas otras equaciones verdaderas [CISCAR, 1793, p. 54].

Lo que está negando es el manejo de las diferenciales como cantidades infinitamente pequeñas y, por consiguiente, alineándose con la postura que sigue la línea de D´Alembert, según la cual no tiene sentido un cociente de ceros. Esto supone un rechazo explícito de la postura planteada por Euler de que el cálculo es simple y llanamente un cálculo de ceros, donde un cociente de ceros puede dar como resultado una cantidad finita.

También cabe destacar los superlativos que en la cita precedente aplica a las ecuaciones entre cantidades infinitesimales: *absurdas* pero *utilísimas*. En las páginas posteriores va a intentar por una parte demostrar y por otra conciliar estos dos calificativos. Y cuando ya considera demostrado el absurdo usa un ejemplo significativo, recurriendo a un tema que ni es la primera vez que aparece ni será la última, a saber, los números imaginarios:

> Ahora se comprehenderá mejor lo que diximos; esto es, que aunque las expresiones diferenciales fuesen absurdas, sin embargo podrán deducirse de ellas otras expresiones verdaderas; del mismo

modo que, aunque $\sqrt{-9}$ y $\sqrt{-4}$ son expresiones absurdas, $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}}=\frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{-1}}=\frac{2}{3}$, expresión real; y $x^2+1=\left(x+\sqrt{-1}\right)\left(x-\sqrt{-1}\right)$, expresión imaginaria de que se pueden deducir otras reales [CISCAR, 1793, p. 114].

El asunto de los números imaginarios y de los números en general está en esta época todavía muy abierto, ni siquiera los números negativos estaban plenamente asumidos, ni mucho menos comprendidos. En el caso de Ciscar, cabe citar como ejemplo sus reflexiones sobre los negativos, con alguna afirmación sorprendente pero muy enraizada en el pensamiento de una buena parte de la matemática de su tiempo. Afirma:

Las cantidades negativas no son ménos reales que las positivas, y unas y otras mayores que cero, aunque el cero es el paso de unas á otras [CISCAR, 1793, p. 5].

Su negativa a aceptar el orden correcto de los números negativos se basa en su idea de número como medida (de distancia). Si, efectivamente, todo número sirve de medida, todo número debe ser mayor que cero, asignándole el signo menos una situación espacial o temporal en cuanto a que si, por ejemplo, colocamos los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda, el valor negativo sólo indicará que está a determinada distancia del cero, pero en tanto que distancia mayor que cero. Sustenta su tesis en el siguiente razonamiento que cita de Sauri, seguramente referido a su *Cours complet de mathématiques*, publicado en 5 tomos en Paris (1774): como $\frac{6}{0}=\infty$ y $\frac{6}{-1}=-6$, si fuera cierto que $-1<0$ resultaría que $-6=\infty$, lo que es claramente un absurdo. Su erróneo razonamiento deriva de las carencias en el concepto de límite, que impiden entender la fracción como un límite por ambos lados, idea que no se contemplaba en esa época. De hecho L'Huilier fue el primero en advertirlo en su Memoria sobre el infinito premiada por la Academia de Ciencias de Berlín [L'HUILIER, 1786].

En lo que respecta al cálculo infinitesimal, la evidencia de la obtención de resultados verdaderos independientemente del método elegido –diferencial o fluxional– es un tema que en algún momento se plantean todos los matemáticos involucrados en el desarrollo del cálculo. Cabe citar, como ejemplo, que el premio convocado en 1784 por la Academia de Ciencias de Berlín para encontrar una teoría clara y precisa del infinito decía en su convocatoria:

La Academia, en consecuencia, desea una explicación de cómo es posible que se hayan conseguido deducir tantos teoremas correctos a partir de unos presupuestos contradictorios [GRATTAN-GUINNESS, 1990, p. 138].

El mismo Leibniz intentó salvar la situación en algún momento poniendo el acento en el aspecto algorítmico del cálculo y empleando la misma alusión a los números imaginarios que hace Ciscar, y esto en un momento en el que ya estaba probada su utilidad y en el que todavía no había perdido ese aire misterioso que tendrá durante varios años. Otro autor español muy posterior a Ciscar hará uso de los números imaginarios para intentar dar una fundamentación sólida al cálculo. Se trata de Fernando García San Pedro, quien en 1828 utilizará los números complejos en su teoría de los incrementos ideales [VELAMAZÁN & AUSEJO, 1993].

Pero ¿cómo justifica Ciscar el hecho evidente de que se obtienen resultados correctos con unos principios falsos? La respuesta que da a este problema es más bien confusa y recuerda algo la idea de compensación de errores, aplicada no tanto a los cálculos como a los razonamientos. Ciscar afirma:

> En efecto, sentado un principio falso de tal naturaleza, que procediendo según dicho principio, de cada expresión exâcta solo se puede deducir otra falsa, y al contrario, de cada expresión absurda solo se pueda deducir otra verdadera, si según dicho principio, de la igualdad entre dos expresiones verdaderas se sigue el deberse suponer iguales las falsas que de ellas se deduzcan: nos parece que siempre que procediendo según reglas geométricas deducidas de aquel principio falso se halle la igualdad entre dos expresiones absurdas, la habrá realmente entre las verdaderas de donde dimanan [CISCAR, 1793, p. 54].

Esta curiosa explicación deja absolutamente sin resolver el verdadero problema que trata de explicar. Pero, en cualquier caso, no deja de ser llamativa la insistencia en la falsedad y lo absurdo que encierran las ecuaciones tratadas con cantidades infinitamente pequeñas.

El planteamiento de Ciscar está, como ya se ha comentado, cercano al de Cousin en cuanto al uso del límite para explicar el cálculo. En esta misma línea va a insistir en el concepto de que las cantidades infinitamente pequeñas sólo tienen sentido considerando el cero como límite de alguna cantidad variable:

> Y así aunque las expresiones generales $0/0$; ∞/∞; $0\times\infty$; $\infty-\infty$; […] son vagas é indeterminadas, y aun podiamos añadir absurdas; dichas expresiones pueden representar alguna cosa determinada quando el 0 é ∞ se consideran como resultados de haber aumentado ó disminuido sin límite ciertas cantidades baxo tales y tales condiciones; ó lo que es lo mismo, quando el 0 é ∞ se consideran como límites de dichas cantidades [CISCAR, 1793, p. 56].

El hecho de admitir los infinitamente pequeños como ceros bajo este punto de vista le llevará a la necesidad de admitir la notación diferencial:

> Para poder hacer uso de dichas expresiones es menester que los ceros lleven algunas notas que manifiesten las cantidades de que son límites, y para evitar equivocaciones se ha establecido el colocar en lugar de 0 la cantidad de donde el 0 ha provenido con el coeficiente d […]; y en general dx, dy, &c., representan unas porciones de las cantidades x é y reducidas á sus límites cero, y se llaman comunmente las diferenciales de x é y [CISCAR, 1793, p. 56].

El planteamiento de las diferenciales de orden superior no es en absoluto claro y refleja su incomodidad al verse obligado a usarlas, lo que bien pudiera ser indicativo de ciertas dificultades de comprensión. Así, las introduce a través de las diferencias segundas de la función:

> y como las diferenciales primeras son cero respecto de las cantidades finitas, las diferenciales segundas, que son las diferenciales de las primeras, serán también cero respecto de las primeras; y así sucesivamente [CISCAR, 1793, p. 62].

No deja de ser llamativo cómo ha insistido una y otra vez en que las diferenciales son ceros, y ahora añade una relativización –*cero respecto a las cantidades finitas*– que no encaja con su propuesta inicial, que incluía la suposición de que la única diferencia entre los ceros y los infinitésimos era que éstos venían de un límite. La incapacidad para ir más allá es producto de la falta de herramientas adecuadas de desarrollo: la respuesta vendrá dada en términos del concepto de diferencial como función que puede ser sometida a las mismas operaciones que la función primitiva. Esta idea ya está presente en Lagrange, con su teoría de asociar derivadas con desarrollos en serie de potencias. El mismo Ciscar lo ha apuntado antes, cuando hace la precisa distinción entre unos ceros y otros, pero no profundiza más en esta línea y pierde las posibilidades que le ofrece un adecuado uso del concepto de función, quedando su trabajo limitado por el mucho más confuso de *cantida*d. El tratamiento correcto empezará a ser expuesto por Cauchy, quien a la idea de Lagrange de reforzar la idea de función derivada como función en sí misma unirá el tratamiento de Euler de los coeficientes diferenciales arropado en una acertada teoría de infinitésimos de diferentes órdenes, ahora sí como variables o funciones que tienden a cero.

En cuanto al tratamiento del cálculo integral, Ciscar sigue la corriente de considerarlo como el inverso del cálculo diferencial:

> En el cálculo integral, dada la relación de los límites de las diferencias se trata de averiguar la que hay entre las cantidades [CISCAR, 1793, p. 79].

Esta definición repugna sin duda a sus propios planteamientos. La expresión *relación de los límites de las diferencias* representa todo lo que le disgusta y que tanto se ha empeñado con anterioridad en demostrar como absurdo. Su definición de integral no es sino otro exponente de la obligación que se ha impuesto al principio de hacer uso del cálculo diferencial muy a su pesar. Efectivamente, los límites de las diferencias no son sino ceros, como ha insistido una y otra vez; además, el cociente entre ceros no existe, y son expresiones *absurdas* [CISCAR, 1793, p. 56]. Usar esta definición no tuvo que ser precisamente de su agrado.

Termina la parte dedicada al cálculo resumiendo los tres modos –métodos, dice Ciscar– en los que se aplica el cálculo infinitesimal bien a la geometría, bien a otras ciencias aplicadas. El primer método, dice, es el simple uso del cálculo infinitesimal en el que se desprecian directamente las cantidades infinitamente pequeñas. El segundo método en el que se hace uso del cálculo diferencial es para el cálculo de subtangentes, tangentes, normales, subnormales, etc., un método que Ciscar descompone en cuatro pasos que consisten en el manejo de expresiones diferenciales que –insiste de nuevo– tratamos de absurdas [CISCAR, 1793, p. 109]. Por último, el tercer método tiene que ver con el cálculo integral, en el que de nuevo vuelve a reducir las diferencias a diferenciales.

Así, después de tratar buena parte del tema sobre la base de unos principios que ha calificado de absurdos, no es extraño que en varios momentos se vea obligado a acabar con la ya mencionada referencia a los números imaginarios.

Conclusión: la posición matemática de Gabriel Ciscar

A modo de recapitulación cabe destacar que, en el terreno de cálculo infinitesimal, la rama más candente de las matemáticas de su época, Ciscar hace uso de unos métodos que le son absolutamente reprobables, lo que le lleva a una permanente justificación y a la notoria y continua contradicción con sus propios pensamientos. Si en todos los autores de la época se aprecia cierta perpleja mezcla de estilos y conceptos antagónicos, en Ciscar ésta se ve aumentada por el hecho de tener que defender una posición en la que no cree en absoluto. Su pensamiento está más cercano a una teoría de los límites al estilo de Cousin, que rechaza de manera explícita los infinitesimales y las cantidades infinitamente pequeñas, postura que en este momento está empezando a contar con adeptos, con diferentes matices y características personales.

Ahora bien, esto no significa en modo alguno que la posición de Ciscar esté desfasada ni sea obsoleta. Su postura emana de un conocimiento del problema de la fundamentación del cálculo infinitesimal mucho más profundo que el de la inmensa mayoría de sus coetáneos españoles, de una mayor consciencia de la dificultad de las cuestiones que se están dirimiendo allende nuestras fronteras.

Por otra parte, cabe destacar que para Ciscar el cálculo diferencial era parte inexcusable de la formación matemática de los marinos al menos desde 1785, cuando aparece como parte de la mecánica en el Plan de Estudios para el Curso de Estudios Mayores. También aparece en los certámenes de 1789 del Curso de Matemáticas Sublimes, donde se cita como bibliografía la edición de 1784 de los Elementos del Abate Marie completada con adiciones, entre otras las relativas a triángulos diferenciales y al cálculo de variaciones de Lagrange. Con posterioridad a la reedición ampliada del *Examen Marítimo* de Jorge Juan reaparecen los triángulos diferenciales en su *Tratado de Trigonometría Esférica* de 1796. En el *Curso de Estudios Elementales de Marina* (1803) incorpora los números complejos y los logaritmos a la Aritmética e incluye en la geometría cantidades infinitesimales y cálculo de superficies planas y sólidos irregulares por aproximación. Por último, las matemáticas constituyen el núcleo formativo del Proyecto de Plan de Estudios para el Curso de Estudios Mayores de 1807, con álgebra finita, secciones cónicas, cálculo diferencial e integral y mecánica de sólidos y fluidos. Las recomendaciones bibliográficas para este Curso incorporan dos importantes novedades, una extranjera y otra nacional. Se trata del *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* (2 vols., París, 1797-1800) de Lacroix y del Curso de Bails, además de Jorge Juan. Si bien resulta imposible determinar si Ciscar se refiere a los *Elementos de Matemática* (10 vols., Madrid, 1772-1783) o a los *Principios de Matemática* (3 vols., Madrid, 1776, 3ª ed. 1795, 4ª ed. 1805) de Bails, el conjunto de autores recomendados dejan clara la evolución de su posición, al menos docente, en lo que a la aceptación del cálculo diferencial continental de matriz francesa se refiere.

NOTAS

1 Una versión preliminar de este trabajo fue presentada en las *Jornadas de Historia sobre el Almirante D. Gabriel Ciscar y Ciscar*, celebradas del 18 al 21 de noviembre de 2010 en Oliva (Valencia) y organizadas por el Ayuntamiento de Oliva, la Asociación Centelles-Riusech de Oliva y la Universidad de Valencia.

BIBLIOGRAFÍA

CHAIX, J. (1801) *Instituciones de cálculo diferencial e integral con sus aplicaciones principales á las matemáticas puras y mixtas*. Madrid, Imprenta Real.

CISCAR, G. (1793): «Principios generales que facilitan la inteligencia de la obra». En: Jorge Juan, *Exâmen Marítimo teórico práctico, ó Tratado de Mecánica aplicado á la construcción, conocimiento y manejo de los navíos y demás embarcaciones. Edicion segunda. Aumentada con una exposicion de los principios del cálculo, notas al texto y adiciones*. Madrid, Imprenta Real.

COUSIN, J.A.J. (1777) *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris, Jombert.

COUSIN, J.A.J. (1796) *Traité du calcul différentiel et de calcul integral*. Paris, Régent & Bernard.

D'ALEMBERT, J. le R. *et al.* (1784-1785-1789) *Encyclopédie méthodique ou par ordre de matieres: Mathematiques*. Paris, Chez Panckocke / Lieja, Chez Plomteux, 3 vols.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1990) *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*. Basel-Boston-Berlín, Birkhäuser Verlag.

HORMIGÓN, M. (1995) «Les mathématiciens dans la vie politique espagnole pendant la première moitié du XIXe siècle». *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, *XV(1),* 27-47.

L'HUILIER, S. (1786) *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs.* Berlin, Chez George Jacques Decker.

LÓPEZ SÁNCHEZ, J.F. (1995) «La Academia de Guardias Marinas de Cartagena (1776-1824)». *Antilia, Revista Española de Historia de las Ciencias de la Naturaleza y de la Tecnología, 1,* Artículo 3. http://www.ucm.es/info/antilia/revista/vol1-sp/artsp1-3.htm [Consultado el 28 de febrero de 2012].

SUBIRÁS Y BARRA, F. (1776) *Certamen Público de los Tratados de Matemáticas, Geometría sublime, y Mecánica que en el Real Seminario de Nobles tendrá el caballero seminarista D. Felipe Ward, Subteniente del Regimiento de Infantería de Irlanda, baxo la dirección del primer profesor D. Francisco Subirás y Barra, el día 4 de Enero de 1776 á las 3 1/2 de la tarde*. Madrid, Joachin Ibarra.

VALLEJO, J.M. (1813) *Tratado Elemental de Matemáticas*. Tomo II, parte II. Mallorca, Imprenta de Felipe Guasp.

VELAMAZÁN, M.A. y AUSEJO, E. (1993) «De Lagrange a Cauchy: el Cálculo Diferencial en las Academias militares en España en el siglo XIX». *LLULL*, *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 16(30),* 327-370.