Las competiciones tipo olimpiada como motivación para el aprendizaje de las matemáticas: una experiencia internacional

Javier Rodrigo Hitos

Revista de Investigación

ISSN 2174-0410

1 de abril de 2011

Resumen

Este artículo presenta el trabajo realizado por el GIE "Pensamiento Matemático" para preparar la participación de un grupo de alumnos universitarios en la competición matemática IMC.

Palabras Clave: Innovación educativa, olimpiadas matemáticas, trabajo grupal.

1. Introducción

El grupo de Innovación educativa "Pensamiento Matemático", perteneciente a la Universidad Politécnica de Madrid, ha venido realizando en los últimos años labores de organización de competiciones con contenido matemático para motivar el aprendizaje de esta disciplina en los estudiantes universitarios y de Secundaria. Además de estas actividades de organización de eventos matemáticos, el grupo ha tenido una experiencia de participación indirecta en una competición internacional, que se comenta en esta introducción.

La competición a la que se alude es un concurso matemático tipo olimpiada, que se desarrolló en Julio del 2010 en su 17 edición en Blagoevgrad (Bulgaria): se trata de la IMC (Internacional Mathematics Competition), una competición universitaria en la que participaron 328 estudiantes de 90 Universidades de todo el mundo.

A lo largo de las últimas ediciones han participado estudiantes de Universidades españolas en esta competición, acudiendo este año por primera vez estudiantes de la Universidad Politécnica de Madrid, centro al que está adscrito el GIE "Pensamiento Matemático".

La participación del GIE en la competición ha consistido precisamente en preparar a este grupo de estudiantes, así como a los que fueron por la Universidad Pontificia Comillas de Madrid, para que pudieran afrontar los dos exámenes de 5 horas con 5 problemas cada uno que conformaban la competición.

En este artículo se explica en qué consistió la preparación: en la sección 2 se comenta el trabajo previo de realización de un manual, en la sección 3 se detalla cómo se utilizó este manual para el adiestramiento "on-line" de los estudiantes, en la sección 4 se analiza el resultado obtenido por dichos estudiantes en la competición y en la sección 5 se abordan posibles líneas de mejora en la preparación para el futuro.

2. El trabajo previo: un manual de preparación

La participación en una olimpiada matemática internacional requiere de un nivel de conocimientos teóricos muy elevado, así como de mucha práctica en la resolución de problemas matemáticos, por lo que el trabajo de entrenamiento con los estudiantes que van a participar es muy importante. Por este motivo, se consideró necesaria la elaboración de un manual de preparación que contuviera los desarrollos teóricos necesarios para la realización de "problemas tipo" de competiciones matemáticas y una colección de problemas resueltos seleccionados de exámenes de diversas Olimpiadas matemáticas.

Los contenidos teóricos del manual se dividieron en los siguientes apartados: Estrategias básicas, Desigualdades, Ecuaciones Funcionales, Interpretaciones Geométricas, Principios de conteo, Algunos resultados de Teoría de Números y Números complejos.

Los problemas, con las soluciones desarrolladas por los autores del manual, se extrajeron de las siguientes competiciones: IMC (Internacional Mathematics Competition), OIMU (Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria), OCU (Olimpiada Colombiana Universitaria).

Se incluyó además una sección de "otros problemas" donde se recogían problemas tomados de otras páginas de preparación entre las que cabe destacar la de José Luis Díaz Barrero, profesor de la Universidad Politécnica de Catalunya que también ha preparado a estudiantes para participar en la

IMC (ver [1]), ó problemas interesantes derivados de algunos problemas de competiciones matemáticas, propuestos por los autores del manual.

Para implicar en este estadio inicial a los alumnos de Comillas que iban a participar en la IMC, se propuso a los que tenían beca de excelencia que dedicaran el trabajo de dicha beca a colaborar en la elaboración del manual (agradecemos en este sentido de forma especial a Maite Peña y Pedro Ciller por el gran trabajo realizado).

La versión actual de este manual está colgada en el aula virtual de pensamiento matemático que ha llevado a cabo el GIE (ver [6])

Hay que destacar que el manual nunca se considera finalizado: se va actualizando periódicamente con la inclusión de soluciones a nuevos problemas. Existe además un foro para que los estudiantes puedan hacer sus sugerencias, presentar soluciones alternativas a los problemas propuestos en el manual…

3. El trabajo con los estudiantes

Como la preparación tuvo lugar principalmente a principios de Julio (después de exámenes) fue eminentemente on-line, utilizándose el aula virtual de pensamiento matemático comentada en la anterior sección, principalmente el apartado "Olimpiadas matemáticas" de la misma, donde se encuentra el manual. Este tipo de preparación generó unos foros de discusión muy interesantes desde el punto de vista didáctico, ya que los profesores iban corrigiendo los problemas resueltos que enviaban los estudiantes, lo que llevaba a nuevas versiones que se iban acercando de forma sucesiva a la resolución correcta de los problemas, fomentándose así el trabajo en grupo (todos aportaban comentarios e ideas sobre las soluciones propuestas por los demás) y enriqueciéndose el conocimiento de cada estudiante con nuevos puntos de vista para atacar los problemas.

4. Resultados y soluciones

Los alumnos que participaron en la IMC, después de pasar por el proceso de preparación, fueron, por la Universidad Pontificia Comillas, Pedro Ciller, Isabel Garro, Manuel Peña y Alberto Orgaz y por la UPM Borja Morán y Miguel Delgado. Cabe destacar que Pedro Ciller obtuvo una mención especial y que Borja Morán se quedó a un solo punto de la misma, resultados de gran merito teniendo en cuenta la dificultad de los problemas planteados en esta competición.

Para finalizar esta sección, presentamos una solución al problema 3 del primer día de competición, distinta a la solución oficial (ver [5]). Como los problemas están ordenados por orden de dificultad, éste se puede considerar de nivel intermedio, lo que da una idea del alto nivel que suele tener esta Olimpiada matemática. El enunciado del problema es:

Define la sucesión x_n inductivamente por

$$x_1 = \sqrt{5}\ ,\ x_{n+1} = x_n^2 - 2\ .$$

Halla

$$\lim_{n\to\infty} x_1 \ldots x_n / x_{n+1}$$

Solución

Vamos a expresar:

$$y_n = x_1 \ldots x_n / x_{n+1}$$

de forma explícita. Para ello expresamos primero x_n de forma explícita:

Las funciones cosh, cos cumplen que multiplicar por 2 su argumento hace el efecto de elevar la función al cuadrado, que es lo que hace la ecuación de recurrencia que define x_n. Buscamos entonces una expresión del tipo

$$x_n = A\cosh\left(B\, 2^n\right)$$

y la sustituimos en la ecuación de recurrencia (tomamos cosh y no cos porque cosh tiende a infinito para argumentos grandes, como parece que hace x_n):

$$x_{n+1} = A\cosh\left(B\, 2^{n+1}\right) = A\left(2\cosh^2\left(B\, 2^n\right) - 1\right) = x_n^2 - 2 = A^2\cosh^2\left(B\, 2^n\right) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A = A^2, -A = -2 \Leftrightarrow A = 2$$

Por tanto $x_n = 2\cosh\left(B\, 2^n\right)$, con:

$$x_1 = 2\cosh(2\,B) = \sqrt{5} \Rightarrow B = \frac{1}{2}\operatorname{arg}\cosh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{2}\,log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

Entonces

$$x_n = e^{B\,2^n} + e^{-B\,2^n} = \left(e^{B\,2^{n+1}} + 1\right) \Big/ e^{B\,2^n}$$

Que con el valor de B hallado da:

$$x_n = \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^n} + 1 \right) \Big/ \left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^{n-1}}$$

por lo que:

$$y_n = \left(\left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^2 + 1 \right) \dots \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^n} + 1 \right) \Big/ \left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{1+2+\dots+2^{n-1}} \right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^{n+1}} + 1 \right) \Big/ \left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^n}$$

Que simplificando da:

$$y_n = \left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^2 + 1 \right) \dots \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^n} + 1 \right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^{n+1}} + 1 \right)$$

Desarrollando el numerador de y_n, vemos que se puede expresar como:

$$\sum \left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^{i_1}+\dots+2^{i_k}} + 1$$

Donde el sumatorio se realiza sobre los vectores $(i_1, \dots, i_k)$ con $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, $1 \le k \le n$

Los exponentes de los términos que se suman están entre 2 y 2^{n+1} -2 y son todos los números pares entre estos dos (es como poner un número par en base 2), por lo que:

$$\sum \left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^{i_1}+\dots+2^{i_k}} + 1 = \sum^{0 \le i \le 2^n - 1} \left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2i} = \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^{n+1}} - 1 \right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^2 - 1 \right)$$

(en la última igualdad hemos aplicado la fórmula para la suma de una progresión geométrica de razón $\left(\sqrt{5}+1 \right)/2$)

Tenemos entonces que:

$$y_n = \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^{n+1}} - 1 \right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1 \right)/2 \right)^{2^{n+1}} + 1 \right)$$

(donde hemos tenido en cuenta que $\phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ cumple que $\phi^2 = \phi + 1$). Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n+1}} - 1\right) \Big/ \left(\left(\left(\sqrt{5}+1\right)/2\right)^{2^{n+1}} + 1\right) = 1$$

(ya que los términos ± 1 son despreciables)

Observación

El programa Mathematica da la forma explícita de x_n, con una simplificación distinta a la aquí dada. No da la forma explícita de y_n

5. Líneas de mejora futura

Aunque los estudiantes que participaron en la preparación y en la Olimpiada se declararon en general satisfechos con la experiencia (quizás en mayor medida con la semana de competición, por la oportunidad de conocer a estudiantes de otros países), dieron algunas sugerencias que pueden ser útiles para la mejora del proceso preparatorio en años venideros. La principal es la que se comenta a continuación:

Como se comentó en la sección 3, la preparación tuvo una duración de alrededor de tres semanas, después de los exámenes de Junio. Esto hizo que los estudiantes la afrontaran cansados por el esfuerzo de todo el curso, y que no tuvieran demasiado tiempo de asimilación de los difíciles contenidos que debían dominar.

Por ello pudiera ser útil el acomodar la preparación al curso académico, bien ofertándola en una asignatura optativa dentro de los nuevos planes, ó bien llevando a cabo un curso on-line de preparación de al menos un cuatrimestre. En cualquiera de las dos modalidades, el manual de preparación se utilizaría como libro de referencia.

Referencias

[1] DÍAZ, José Luís. *Página web personal,*
http://www-ma3.upc.es/users/diaz/

[2] GUZMÁN, Miguel. *Enseñanza de la matemática a través de la resolución de*

problemas. Esquema de un curso inicial de preparación, pp. 52-75, Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, España, 1987.

[3] LANTARÓN, Sagrario, LÓPEZ, María Dolores, SALVADOR, Adela. *Actividades de apoyo al desarrollo de la competencia "pensamiento matemático"*, pp. 82-89, Actas de las III Jornadas Internacionales UPM sobre Innovación Educativa y Convergencia Europea (INECE'09), Madrid, 2009.

[4] LANTARÓN, Sagrario, LÓPEZ, María Dolores, RODRIGO, Javier. *Lecture room web for the improvement of mathematic knowledge*, pp. 3263-3269, Actas de la International Conference on Education and New Learning Technologies (EDULEARN10), Barcelona, 2010.

[5] *Página web de la IMC,*
http://www.imc-math.org/

[6] *Página web del aula virtual Pensamiento Matemático,*
http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/