Historias de Matemáticas
Hamilton y el Descubrimiento de los Cuaterniones

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo pretende ofrecer una visión general del descubrimiento de los llamados *cuaterniones* por parte del matemático irlandés William Rowan Hamilton. Se pretende dar al lector algunos detalles del nacimiento de los números imaginarios en el siglo XVI, su interpretación geométrica a principios del siglo XIX, y la extensión del plano complejo a las tres dimensiones a través de los cuaterniones, que abrirían el paso al estudio y el desarrollo de las nuevas álgebras no conmutativas y a una nueva interpretación tridimensional de la realidad física.

Palabras Clave: Sir William Rowan Hamilton, álgebras no conmutativas, números complejos, cuaterniones, análisis vectorial.

1. Introducción

Aunque considerar la paternidad legítima de los números complejos ha resultado históricamente una tarea complicada, tanto la unidad imaginaria i como los números enteros negativos siempre estuvieron rodeados de un halo misterioso y resultaron para los matemáticos una fuente constante en la que beber. El misterio se vio alimentado por dos hechos que sucedieron simultáneamente aunque de forma independiente. Por un lado la publicación en Alemania de *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, más conocida como *Ausdehnungslehre*, traducida como *Teoría de La Extensión*, o *Teoría de las magnitudes extensivas* de Hermann Günther Grassmann (1809-1877) en 1844, que describía las geometrías n-dimensionales de un modo algebraico y los sistemas de los números hipercomplejos, y por otro, el descubrimiento de los *cuaterniones* por parte del matemático irlandés William Rowan Hamilton, que resultaron ser unos nuevos números que no obedecían la propiedad conmutativa de la aritmética común. A pesar de que las álgebras vectoriales descritas por Grassmann resultaron ser mucho más generalistas que las de Hamilton, sin embargo su comprensión y el sentido e importancia de sus ideas no fueron asimiladas y reconocidas en su tiempo.

El descubrimiento de estas nuevas estructuras algebraicas constituyó junto a la aparición de las geometrías no euclídeas un punto de inflexión en el desarrollo de la matemática del siglo XIX. Los matemáticos se vieron obligados a enfrentarse con la relación que existía entre los *símbolos* y los *objetos* matemáticos, y comenzaron a distinguir de manera más clara la interconexión que había existido históricamente entre las *ecuaciones algebraicas* y la manipulación de los *números*. La nueva y más flexible concepción del álgebra emergida a mediados del siglo XIX hizo posible avances en las técnicas algebraicas y la lógica simbólica de matemáticos como Boole, Peirce, y Schröder, o el desarrollo de álgebras abstractas de la mano de matemáticos como Cayley, Sylvester, Clifford, Gibbs, o Dedekind entre otros.

2. La Representación de los Números Complejos

La primera vez que se tiene constancia escrita de la aparición de los números complejos la encontramos en el *Ars Magna* de Girolamo Cardano publicado en 1545. Previamente en el año 1539 Cardano había conocido al célebre matemático Tartaglia, lo que resultaría crucial en su vida puesto que comenzaría a interesarse por las ecuaciones cúbicas. Tartaglia era un matemático de reconocida fama y prestigio, entre otras cosas, por haber ganado concursos sobre la resolución de ecuaciones, usando métodos secretos.

Girolamo Cardano

Niccolò Fontana - Tartaglia

Tartaglia le enseñó a Cardano sus trucos y técnicas secretas para el manejo de las ecuaciones, no sin antes hacerle prestar un juramento de no revelar a nadie dichos secretos. En 1545, Cardano publica su obra *Ars Magna*, donde expone los métodos para la resolución de la ecuación cúbica. Tartaglia monta en cólera y acusa a Cardano de traidor y deshonesto, por haber faltado a su juramento. Sin embargo, un joven matemático de apenas 18 de edad, Lodovico Ferrari, quien a la sazón era sirviente de Cardano, sale en defensa de su protector diciendo que él estuvo presente la noche de la reunión entre los dos matemáticos y no hubo ningún juramento.

En realidad, la fórmula para resolver la ecuación cúbica, había sido descubierta mucho antes por el matemático Scipione del Ferro, quien publicó un pequeño libro, que en alguna oportunidad fue consultado por Cardano. Luego Cardano quedaba libre de toda culpa.

En su *Ars Magna*, Cardano reconoce a Al-Khwārizmī como el padre del álgebra. El libro fue un clásico de la matemática y contribuyó de manera decisiva al desarrollo del álgebra. En aquella obra aparecen muchos resultados origina-

ISSN 2174-0410

les, como el método para eliminar la x^2 en una ecuación cúbica, conocido como el método de Cardano. También desarrolló un método para resolver ecuaciones diferenciales, llamado método de las proporcionales.

Cardano hizo uso por vez primera de las raíces cuadradas de números negativos y consideró la posibilidad de usar los números imaginarios aunque con mucha cautela. En una nueva edición de su libro, en 1570, Cardano se adentró un poco más en el misterio de estos números y ofreció algunas reglas para manipularlos. Por ejemplo, la expresión:

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

Podemos afirmar por lo tanto que fueron entre las soluciones a la ecuación cúbica en el libro de Cardano donde se produjo el nacimiento de los números complejos, como algo digno de ser estudiado por los matemáticos. En particular, para la ecuación:

$$x^3 = 3px + 2q$$

Cardano daba la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$$

conocida como *Fórmula de Scipione del Ferro-Tartaglia-Cardano*.

El siguiente hecho importante en el desarrollo de los números complejos sucede en 1637, año en el que Descartes publica su *Géométrie*, acuñando el término "imaginarios" para determinar a estos números. Según Descartes:

> *"Ni las raíces verdaderas, ni las falsas (las negativas) son siempre reales, a veces son imaginarias."*

Pero el establecimiento definitivo en el panorama matemático de los números imaginarios sucede en el siglo XVIII, fundamentalmente emparejado al desarrollo del Análisis, de la mano de uno de los grandes matemáticos de la historia, Leonhard Euler. Euler fue el primero en utilizar la notación i para referirse a la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$. En su memoria, *De Formulis Differentialibus Angularibus*, presentada en la Academia de San Petesburgo en 1777, escribió:

Leonhard Euler

> *"En adelante, denotaré la expresión $\sqrt{-1}$ como i resultando entonces que $ii = -1$."*

Pero desde su nacimiento, los números imaginarios estaban huérfanos de una teoría consistente que interpretase sus propiedades de un modo apropiado. En medio de esta falta de entendimiento completo, surgieron fundamentalmente dos teorías que sentarían las bases de sus fundamentos. Por un lado, la asociación de los números complejos a una interpretación geométrica de los mismos, y por otro la consideración de expandir el concepto de número de la aritmética existente hasta entonces, con el fin de que estos tuvieran cabida.

ISSN 2174-0410

John Wallis

John Wallis parece ser que fue el primero que llevó a cabo el intento, aunque sin éxito, de formalizar una interpretación geométrica de los números complejos. En su *Álgebra* publicada en 1685, sugirió que como $\sqrt{-bc}$ era la media proporcional entre $+b$ y $-c$, la interpretación geométrica de $\sqrt{-bc}$ podría obtenerse aplicando la construcción de media proporcional euclídea de dos segmentos representados por $+b$ y $-c$. Pero tras este intento no consiguió avances.

La interpretación geométrica de los números complejos como un punto del plano es un idea sencilla, pero llevó mucho tiempo llegar a su deducción. Cuando finalmente llegó, lo hizo simultáneamente, y lo que es más sorprendente, sin ninguna conexión, de la mano de varias personas, entre ellos, el topógrafo y cartógrafo noruego Caspar Wessel (1745-1818), el contable franco-suizo Jean Robert Argand (1768-1822), y el matemático alemán Carl Friedich Gauss (1777-1855).

Caspar Wessel

Caspar Wessel publicó un único artículo de matemáticas en su vida, en el cual, consideraba como tema principal la interpretación geométrica de los números complejos. En 1797, presentó sus ideas a la Real Academia de Ciencias de Dinamarca; el artículo, escrito en danés, fue publicado dos años más tarde en el *Philosophical Transactions* de la Academia. Desafortunadamente, este artículo pasó inadvertido, puesto que la publicación no era muy conocida entre la comunidad matemática de la época. Un siglo después, en el centenario de su publicación, la Academia realizó una traducción al francés del artículo de Wessel, con el nombre de *Essai sur la représentation analytique de la direction*, que a la postre serviría para reconocer finalmente la importancia de sus aportaciones. En la introducción, Wessel presenta el objetivo de su estudio:

> *"El presente artículo trata la cuestión de cómo podemos representar una dirección de forma analítica; esto es, cómo expresaremos rectas (segmentos rectos) de tal manera que en una ecuación que arroje como resultado una recta desconocida y otras conocidas, la longitud y la dirección de la recta desconocida puedan ser expresadas."*

Su primer paso consistió en dar una definición para la suma de segmentos rectos (vectores[1]), colocando el punto inicial de un segmento en el punto final del otro, observando que esta suma resultaba ser conmutativa. En el siguiente paso, Wessel consideró la multiplicación de segmentos. Para ello colocó un sistema de ejes coordenados perpendiculares, considerando $+1$ para la unidad en uno de los ejes y $+\epsilon$ para la unidad en el otro eje. Wessel escribió:

> *"Sea $+1$ la unidad rectilínea positiva y $+\epsilon$ otra unidad perpendicular a la unidad positiva tomada antes, teniendo ambas el mismo origen; entonces el ángulo de la dirección de $+1$ resulta igual a $0°$, y por lo tanto para*

[1] Fue William Rowan Hamilton quien se encargó de acuñar este término del verbo en latín *veher*, que significa "dirigir, direccionar". También acuñó el término *escalar*.

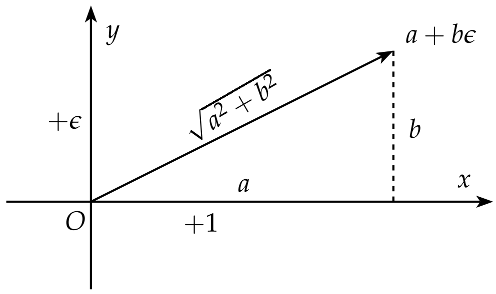
ISSN 2174-0410

> -1 *es* $180°$, *para* $+\epsilon$ *es* $90°$, *y para* $-\epsilon$ *es* $-90°$ *o* $270°$. *Por la regla que establece que el ángulo de la dirección del producto es igual a la suma de los ángulos de los factores, tenemos:*$(+1)(+1) = +1$; $(+1)(-1) = -1$; $(-1)(-1) = +1$; $(+1)(+\epsilon) = +\epsilon$; $(+1)(-\epsilon) = -\epsilon$; $(-1)(-\epsilon) = +\epsilon$; $(+\epsilon)(+\epsilon) = -1$; $(+\epsilon)(-\epsilon) = +1$; $(-\epsilon)(-\epsilon) = -1$. *De este resultado se observa que* ϵ *es igual al* $\sqrt{-1}$, *y que la divergencia del producto se determina de tal forma que ninguna de las reglas operativas comunes son contravenidas."*

Wessel estableció que cualquier segmento recto podía ser representado mediante la expresión $a + b\epsilon$, y que por lo tanto para su multiplicación resultaba que:

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = (ac - bd) + (ad + bc)\epsilon$$

De este modo, hay que considerar que Wessel no sólo se anticipó a la noción de espacio vectorial, además lo hizo previamente a todo el desarrollo de un álgebra en torno a este concepto, aunque desafortunadamente su descubrimiento se mantuvo en el olvido durante un siglo.




Jean Robert Argand

La contribución de Jean Robert Argand *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaire dans les constructions géométriques*, corrió un poco mejor suerte que el artículo de Wessel. Éste fue impreso de manera privada en 1806, en una pequeña edición sin el nombre del autor en la portada. El trabajo se podría haber perdido si no llega a ser por una cadena de acontecimientos ocurridos en 1813 que lo rescataron del olvido. El trabajo de Argand llegó a las manos de Adrien-Marie Legendre antes de su publicación, y éste comentó la importancia de sus descubrimientos en una carta dirigida al hermano de J. F. Français. Français leyó la carta y quedó impresionado de los resultados obtenidos por Argand, por lo que decidió desarrollarlos en una publicación en 1813, donde en el último párrafo puntualizaba que estos conceptos habían sido tomados de la carta de Legrende, y esperaba que el autor de esas ideas fuera identificado y publicara él mismo los resultados. Argand escuchó acerca del artículo de Français, y respondió con un artículo en el siguiente número de la publicación *Annales*, donde especificaba los principales puntos de su trabajo original. Pero a pesar de su gran mérito, esta publicación no tuvo ninguna repercusión relevante.

Carl Friedich Gauss

Tanto Wessel como Argand no eran muy conocidos. Sin embargo, éste no era el caso de Carl F. Gauss, cuya autoridad hizo posible la aceptación general de la interpretación de sus dos anteriores predecesores. Parece ser que Gauss ya había considerado una interpretación geométrica sobre los números complejos a finales del siglo XVIII. En su disertación doctoral de 1799 sobre el Teorema fundamental del álgebra, había empleado la idea aunque no hizo mención explícita sobre ello, sin embargo, sí lo hizo después en una carta a Friedich Bessel, en 1811; finalmente en 1831, en un comentario de su artículo *Theoria Residuorum Biquadraticorum*, la idea era públicamente descrita. La novedad consistía en que Gauss consideró la representación de los números complejos como puntos del plano, en lugar de segmentos del mismo como habían considerado Wessel y Argand. Tal es así, que Gauss consideró el número $a + bi$ como el punto (a, b). Gauss afirmaba:

> *"Este tema (de las magnitudes imaginarias) ha sido tratado hasta ahora desde un punto de vista erróneo, rodeado de una misteriosa oscuridad, y esto es debido a la utilización de una notación inadecuada. Si, por ejemplo,* $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ *hubieran sido denominadas directa, inversa y unidad lateral respectivamente, en lugar de positiva, negativa e imaginaria (o incluso imposible) tal oscuridad hubiera estado fuera de lugar."*

Gauss también consideró que su presentación resultaba la más correcta, haciendo que todas las dificultades sobre estos números desaparecieran. De este modo los números reales representaban una recta, mientras que los complejos representaban el plano. Gauss también acuñó el término técnico de "números complejos" para la cantidad $a + bi$, y se opuso al término "números imaginarios" ya que consideraba que ese término era precisamente uno de los principales causantes del halo de misterio que había rodeado siempre a estos números.

Como resultado de todo esto, si consultamos a matemáticos o las publicaciones francesas, estos hacen referencia al plano complejo como el plano de Argand, mientras que los alemanes lo denotan como el plano de Gauss. Sin embargo, los modestos noruegos nunca tomaron parte en estas disquisiciones patrióticas.

3. William Rowan Hamilton (1805-1865)

Sir William Rowan Hamilton

Desde la muerte de Sir Isaac Newton, hasta la llegada de William Rowan Hamilton, las Islas Británicas no habían dado a la comunidad matemática un personaje de semejante talla intelectual. Éste hizo importantes contribuciones en dinámica y en óptica, inventó los cuaterniones y comercializó algún juego de ingenio que se convertiría después en una especialidad a desarrollar dentro de la teoría de grafos que había visto la luz con Euler y el famoso problema de "Los Siete Puentes de Könnisberg". A lo largo de su vida su popularidad sufrió continuamente curiosos altibajos, siendo aclamado, aunque no comprendido. Más tarde, tras su muerte, su reputación comenzó a declinar hasta el punto de llegar a ser considerado como una figura de segunda categoría. Finalmente el siglo XX, trajo consigo nuevamente una revitalización extraordinaria del interés y la estima por él y sus trabajos.

William Rowan Hamilton nació en Dublín la medianoche del 3 al 4 de Agosto de 1805. Sobre sus ancestros no hay mucho que decir. Su padre Archibald Hamilton, fue un abogado dublinés que defendió al nacionalista irlandés Archibald Hamilton Rowan y obtuvo con éxito una revocación de su sentencia. Fue Rowan quien apadrinó al niño en su bautizo y del que éste adquirió su segundo nombre. El padre era un hombre de negocios con una elocuencia "exuberante", un religioso fanático demasiado jovial en ocasiones por desgracia, rasgos todos que fueron transmitidos a su inteligente hijo. Posiblemente debido a la mala situación financiera de su padre, el niño fue enviado con tan sólo un año junto a su tío, el reverendo James Hamilton, jefe de la escuela diocesana del tranquilo pueblecito de Trim, a unas veinticinco millas al noroeste de Dublín quien se ocupó de su sustento y educación. Su tío también estaba a cargo de la iglesia anglicana local. Su casa estaba a medio camino de unas espectaculares ruinas medievales, junto al río Boyne. Desde el punto de vista político James Hamilton era un Tory, partidario del Acta de Unión que había hecho de Irlanda parte del Reino Unido que reforzó el predominio protestante. El reverendo era un gran lingüista, conocedor del griego, el latín, el hebreo, el sánscrito, el caldeo, el pali, y un largo etcétera. Durante su niñez, William tuvo poco contacto con sus progenitores, limitado solamente a unas cuantas visitas hasta que llegó a la edad universitaria. Sus cuatro hermanas se reunían con el joven William en Trim tan sólo ocasionalmente, pero su familia siempre se preocupó por sus progresos.

Durante la época de tutelaje del reverendo James, William desarrolló una educación exquisita, revelando su gran capacidad. A los tres años leía perfectamente el inglés y tenía grandes conocimientos de Aritmética; a los cuatro era un buen geógrafo, a los cinco leía y traducía el latín, el griego y el hebreo, y le gustaba recitar versos de Dryden, Collins, Milton y Homero, de este último en griego; a los ocho añadió el dominio del italiano y el francés a su colección, y su dominio del latín le permitía expresar su emoción ante la belleza del paisaje irlandés en hexámetros latinos, ya que citar la corriente prosa inglesa para poner de manifiesto sus nobles y exaltados sentimientos, le parecía demasiado "plebeyo"; finalmente, antes de cumplir los 10 años estableció los fundamentos firmes para profundizar el estudio de las lenguas orientales, comenzando por el árabe y el sánscrito.

En 1817 murió su madre, y pocos meses después también lo hizo su padre. A la edad de trece años comenzó su educación seria de la matemática, con el estudio de Euclides. Teniendo 17 años Hamilton había dominado la matemática, siguiendo el Cálculo integral, y pudo conocer la astronomía matemática, necesaria para ser capaz de calcular los eclipses. Leyó a Newton y a Lagrange. Todo esto constituía una diversión, pues los estudios humanistas eran entonces para él los principales. Lo más importante es que había hecho ya "algunos descubrimientos curiosos", que comunicó en carta a su hermana Eliza. Los descubrimientos a los que Hamilton se refiere son probablemente los gérmenes de su primera gran obra, *Los Sistemas de Rayos* en óptica.

El 7 de julio de 1823, el joven Hamilton ocupó el primer puesto entre 100 candidatos en los exámenes del Trinity College. Su fama le precedía, y como se esperaba, fue pronto una celebridad. En efecto, sus conocimientos humanistas y matemáticos cuando todavía no había obtenido su título excitaron la curiosidad de los círculos académicos en Inglaterra y Escocia, así como de Irlanda, llegando a hacer pensar a algunos que había aparecido un segundo Newton. Ya antes había atraído la atención del doctor John Brinkley, profesor de astronomía de Dublín, por el descubrimiento de un error en la demostración del paralelogramo de las fuerzas propuesta por Laplace en su *Mécanique céleste*.

Trinity College junto al Banco de Irlanda por Richard Lovett (siglo XIX)

Siendo aún estudiante, Hamilton escribió la primera parte de lo que más tarde sería su tratado sobre óptica. La intención de Hamilton consistía en renovar la teoría de la luz establecida hasta el momento. Partió de principios ya establecidos, como el de que un rayo de luz siempre marcha por el camino que lleva el tiempo mínimo (según la teoría ondulatoria) o "acción" mínima (según la teoría corpuscular), para llegar de un punto a otro. Esto es cierto, sea el camino recto o curvado por la refracción. Una contribución de Hamilton consistió en considerar la acción (o el tiempo) como una función de las posiciones del punto entre los que la luz pasa, y demostrar que esta cantidad varía cuando las coordenadas de estos puntos varían, según la ley que el llamó la ley de variación de la acción. Demostró que todas las investigaciones sobre cualquier sistema de rayos ópticos pueden ser reducidas al estudio de esta única función. El descubrimiento de Hamilton de esta "función característica", como él la llamó, fue un resultado extraordinario de su genio científico. Su primer artículo sobre el tema fue rechazado, pero al siguiente año en 1827, una versión revisada fue aceptada y publicada por la Academia bajo el título de *Teoría de los Sistemas de Rayos*. Este hecho le hizo ganarse una gran reputación y fue el causante de la dedicación de su actividad científica durante la siguiente década. Había comenzado a idearlo

Biblioteca del Trinity College (interior) por Richard Lovett (siglo XIX)

ISSN 2174-0410

cuando tenía dieciséis años y logró darle una forma más o menos final hacia los veintiuno.

La aparición de este artículo supuso una rápida transformación en la vida de Hamilton. La cátedra de Astronomía en el Trinity College, con un sueldo anual de 250 libras, que concedía a su ocupante el título de Astrónomo Real de Irlanda en el Observatorio de Dunsink, quedó vacante en 1826, cuando quien lo ocupaba, el reverendo John Brinkley, fue nombrado obispo de Cloyne, obispado ocupado anteriormente por el gran filósofo George Berkeley. Hamilton fue elegido como sucesor de Brinkley unos pocos meses más tarde en 1827. La elección de un subgraduado para una cátedra fue un suceso sorprendente y trajo ciertas consecuencias curiosas. Por ejemplo, el Astrónomo Real, en virtud de su oficio, era examinador para el Premio del Obispo Law, una distinción matemática abierta a los candidatos recién graduados como bachilleres, y así vino a ocurrir la situación anómala de que un subgraduado se encontrase examinando a graduados en las ramas más altas de las matemáticas.

Detalle del Observatorio Dunksink en sello irlandés (1985)

Si bien todo el mundo reconocía la grandeza del honor sin precedentes del nombramiento de Hamilton para dicha cátedra, la opinión estaba fuertemente dividida con respecto a su prudencia en aceptarla. George Biddel Airy, a la sazón futuro Astrónomo Real de Inglaterra, estaba mucho más preparado que Hamilton, pero decidió no aceptar la plaza puesto que el sueldo era paupérrimo. Tras un año o dos hubiera sido elegido, sin duda, profesor de Trinity College, con mejores perspectivas económicas y generales. Pero lo que determinó la elección por parte de Hamilton, fue la consideración de que el puesto de Astrónomo Real era prácticamente un nombramiento de investigación, que implicaba muy poco con respecto a tareas fijas, mientras que un profesor en el Trinity College debía convertirse en clérigo y pronto se hubiera transformado en tutor y lector, con deberes fijos que ocuparían la mayor parte de su tiempo. Era cierto que el equipo de investigación del observatorio astronómico era muy pobre; pero lo que realmente estaba en la mente de Hamilton, así como en la de los electores, no era la astronomía, sino un arreglo por el que Hamilton pudiera continuar las investigaciones teóricas de las que el artículo sobre los *Sistemas de Rayos* había sido un glorioso comienzo.

Antes de aceptar sus nuevas responsabilidades, Hamilton realizó su primera visita a Inglaterra en compañía del ingeniero y topógrafo Alexander Nimmo. Su itinerario incluyó Lake District, donde tomó té con el poeta William Wordsworth y compartió parte de los poemas que había escrito, puesto que desde niño había manifestado un gran interés por la poesía. A lo largo de su vida se relacionó con escritores como Maria Edgeworth o Samuel Taylor Coleridge cuyas ideas filosóficas "kantianas" le influyeron en gran medida posteriormente.

De vuelta en su Cátedra de Astronomía, Hamilton impartió un curso de lecciones sobre astronomía. En estas, su costumbre era discutir las relaciones de la astronomía con la ciencia física en general, con la metafísica y con todos los campos relacionados del saber. Sus lecciones eran tan poéticas y tan cultas que pronto atrajeron a audiencias enormes de profesores y visitantes, así como a subgraduados. Cuando en 1831 se empezó a hablar de su traslado a la cátedra de matemáticas, el Consejo insistió en que permaneciera donde estaba. Como incentivo, el Consejo subió su pensión a 580 libras al año y le dio permiso para dedicar su investigación principalmente a las matemáticas.

En 1832, Hamilton anunció a la Academia Real Irlandesa un descubrimiento en óptica notable, que daba continuidad a su teoría de los sistemas de rayos. Se sabía desde hacía algún tiempo que ciertos cristales biaxiales, tales como el topacio y la aragonita, daban lugar a dos rayos refractados, produciendo una doble imagen. Agustin Fresnel había elaborado las leyes de la refracción doble. Ahora Hamilton, investigando por su método general la ley de Fresnel, llegó a concluir que en ciertos casos, un único rayo de luz incidente sobre un cristal biaxial puede dar lugar no solamente a dos, sino a un número infinito de rayos refractados, formando un cono, y que en otros ciertos casos un único rayo dentro de tal cristal emergería de él como un cono diferente. Propuso, por consiguiente, partiendo de consideraciones teóricas, dos nuevas leyes de la luz, que él llamó de refracción cónica interna y externa. Pronto fueron verificadas experimentalmente por su amigo Humphrey Lloyd, un físico de Dublín. El matemático y físico alemán Plücker llegaría a escribirle una carta comentándole:

> *"Ningún experimento de física me había causado nunca tanta impresión ... se trata de algo novedoso y sin parangón."*

En 1834, Hamilton, que entonces contaba con veintinueve años, escribió a su tío:

> *"Es mi propósito y mi esperanza remodelar todo el conjunto de la dinámica, en el sentido más extenso de la palabra, por medio de la idea de mi función característica."*

Procedió entonces a aplicar este principio al movimiento de sistemas de cuerpos, y al año siguiente expresó las ecuaciones del movimiento en una forma que demostraba la dualidad entre las componentes del momento de un sistema dinámico y las coordenadas de su posición. Fue un siglo más tarde cuando el desarrollo de la teoría cuántica permitió a físicos y matemáticos darse perfecta cuenta de la importancia de esta dualidad.

Durante la década de 1830, Hamilton tuvo una vida muy "agitada" tanto científica como personalmente. Estos fueron sus años más productivos, durante los cuales trabajó en óptica, dinámica, y álgebra de manera simultánea. Durante esta década también llevó a cabo un estudio de filosofía, influenciado por las ideas de S. T. Coleridge. Se dice de él que durante esta época su energía parecía inagotable, de forma que en ocasiones se le podía encontrar incluso parapetado en la cubierta del observatorio. Desde el punto de vista personal, Hamilton tuvo varias aventuras románticas, pero hubo una en particular que le marcó enormemente. Se enamoró perdidamente de una mujer llamada Catherine Disney. Aunque la atracción era mutua, la familia de Catherine la obligó a casarse con otra persona y Hamilton estuvo a punto de suicidarse. Podemos imaginar lo enamorado que debía estar y el dolor que debió ocasionarle este hecho como para contemplar el suicidio como una solución siendo una persona tan abnegadamente religiosa como él era. Tras otro desengaño amoroso

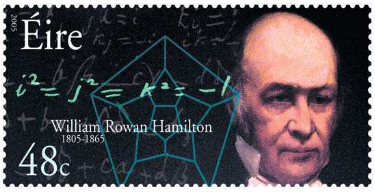
Hamilton comenzó a pensar que el matrimonio le sería esquivo, y en su desesperación le propuso matrimonio a su tercera novia Helen Maria Bayly. Ella provenía de una familia de la pequeña nobleza del Condado de Tipperary, donde había vivido con su viuda madre en una pequeña granja. Al principio ella rehusó aceptar su proposición de matrimonio, pero finalmente, aceptó y la boda tuvo lugar el 9 de abril de 1833. Escribiendo acerca de ella en una carta a un amigo, Hamilton hacía notar su "extraordinaria timidez y delicadeza". Estas características llegaron a agudizarse más plenamente después del matrimonio. Además ella pasaba largas épocas viviendo fuera del hogar junto a miembros de la familia Bayly. En Mayo de 1834, nació el primer hijo del matrimonio Hamilton, bautizado con el nombre de William Edwin. El segundo hijo nació casi un año después, bautizado como Archibald Henry, y finalmente la única hija del matrimonio nacería en agosto de 1840, bautizada como Helen Eliza Amelia.

No se puede decir que el matrimonio de los Hamilton fuera una balsa de aceite. A la ya de por sí "complicada" personalidad de Helen, se unía el hecho de su semi-invalidez debido a una enfermedad que había sufrido en el verano de 1832. Helen no era capaz de encargarse de las obligaciones domésticas y fue poco a poco descuidando la atención de su marido. Además en multitud de ocasiones Helen abandonaba el hogar para pasar una temporada junto a miembros de la familia Bayly, dejando a su marido en la más completa soledad a la suerte de unos incompetentes sirvientes. La personalidad de William fue cambiando paulatinamente. La enérgica jovialidad elocuencia y entusiasmo del pasado se fueron tornando en soledad, y William se fue convirtiendo en una persona introspectiva, a menudo encerrándose en sí mismo. Además William comenzó a descuidar su alimentación y a contar con el alcohol como compañero inseparable.

Retrato de Hamilton con el bastón de mando de la presidencia de la Real Academia Irlandesa

Antes de hablar de lo que Hamilton consideraría su obra maestra, cabe destacar brevemente la cantidad de honores que recibió. A los 30 años desempeñó un cargo importante en la Asociación Británica para el Progreso de la Ciencia. La ceremonia ritual de su investidura se celebró en Dublín en presencia del por entonces Gobernador de Irlanda quien le armó caballero tocándole en ambos hombros con la espada del Estado y le dijo, "Arrodillaos, profesor Hamilton", y luego añadió, "Alzaos, Sir William Rowan Hamilton". Ésta fue una de las pocas ocasiones en la que Hamilton no supo qué decir. A los 30 años fue nombrado presidente de la Real Academia Irlandesa, y a los 38 le fue asignada una pensión vitalicia de 200 libras al año, concedida por el gobierno británico, siendo entonces Primer Ministro del Reino Unido Sir Robert Peel, quien sentía poco afecto por Irlanda. Poco después de esto, Hamilton realizó su descubrimiento capital, los cuaterniones. Un honor que le produjo una de sus mayores satisfacciones ocurrió al final de sus días, cuando ya se hallaba en su lecho de muerte, y se trata de su elección como primer miembro extranjero de la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos, fundada durante la guerra civil. Este honor fue concedido en reconocimiento por su obra sobre los cuaterniones, que por alguna razón desconocida produjo entre los matemáticos americanos de aquel tiempo (sólo había uno o dos, siendo el principal Benjamin Peirce de Harvard) una conmoción más profunda que las restantes matemáticas británicas desde los *Principia* de Newton.

A lo largo de toda su vida, Hamilton se dedicó a investigar en multitud de disciplinas. Cabe destacar que en el año 1857, vendió por 25 libras los derechos de un juego que denominó el "juego icosiano", o el "juego del viajero", que consistía en conectar mediante un camino simple los vértices de una figura formada por tres pentágonos concéntricos encajados unos dentro de los otros. Este juego serviría para desarrollar en mayor medida la denominada Teoría de Grafos. Lo denominó de este modo, porque en el siglo XVII era común en Europa proveer a los pueblos y ciudades de productos diversos de distinta necesidad. El *agente viajero* o *agente de ventas* llevaba un catálogo consigo para realizar una ruta por diferentes lugares y recoger los pedidos además de para realizar la captación de nuevos clientes. Se procuraba que las rutas de estos agentes describieran un camino cuya longitud fuera la mínima posible con el fin de minimizar los gastos de establecimiento y transporte. Esta clase de recorridos se denominan en Teoría de Grafos *ciclos hamiltonianos* en su honor. El 5 de febrero de 1930, en un coloquio en Viena, el matemático Karl Menger planteó por primera vez el problema del agente viajero en lenguaje matemático formal. Menger afirmaba que el problema de determinar rutas de mínima distancia entre dos localidades era una herramienta para encontrar ciclos hamiltonianos de distancia mínima.



Sello Irlandés conmemorativo del 200 aniversario del nacimiento de Hamilton (2005)

En la última parte de su vida, Hamilton se dedicó casi exclusivamente a la elaboración de los cuaterniones (incluyendo sus aplicaciones a la dinámica, a la astronomía, y a la teoría de la luz) y a su voluminosa correspondencia. Durante estos años, Hamilton se entregó a fantasías románticas manteniendo una secreta y prolongada correspondencia con Catherine Disney, objeto a menudo de muchos de sus poemas, de quien nunca dejó de estar enamorado. Los últimos años de su vida sufrió varios ataques de gota, seguramente agudizados por sus pésimos hábitos alimenticios y su cada vez mayor problemática dependencia del alcohol. Además su situación financiera en estos últimos años se fue deteriorando, llegando prácticamente a un estado de ruina absoluta, en gran medida causada según se cuenta por su primogénito William Edwin. En el verano de 1865, Hamilton enfermó seriamente. En vista del empeoramiento de su salud, Hamilton comenzó a trabajar en lo que sería su última obra *Los Elementos de los Cuaterniones*, aunque desafortunadamente a finales de agosto la gravedad de su situación le impidió finalizarla. Murió el 2 de septiembre. Aunque según los doctores, su alcoholismo no fue la causa fundamental de su muerte,


Retrato de W.R. Hamilton

no cabe duda que fue un problema constante a lo largo de sus últimos años de deterioro. Una vez escribió:

> *"Desde hace mucho tiempo he admirado la descripción que hace Ptolomeo de su gran maestro astronómico Hiparco, como un hombre que amó el trabajo y que amó la verdad. Será mi epitafio."*

Como ejemplo de lo que debieron ser sus últimos años de vida, debemos decir que tras su muerte, Hamilton había dejado una enorme montaña de trabajos en indescriptible confusión, y sesenta enormes libros manuscritos de fórmulas matemáticas. El estado en que se hallaban todos estos manuscritos atestiguan las dificultades domésticas con que tropezó en el último tercio de su vida. Entre las montañas de papeles fueron desenterrados platos con restos de comidas. Durante este último período Hamilton vivió como un recluso, sin darse cuenta de los alimentos que le servían mientras trabajaba, obsesionado por la idea de que el último tremendo esfuerzo de su genio magnífico inmortalizaría a él y a su amada Irlanda, y dejaría para siempre inconmovible una contribución matemática a la ciencia como no había tenido lugar desde los *Principia* de Newton.

4. El Álgebra de Hamilton

A finales de la década de 1820-30, Hamilton tenía la atención centrada en sus estudios de óptica; pero su amigo, el matemático John Thomas Graves, comenzó a intercambiar correspondencia con Hamilton sobre ciertos problemas sobre los fundamentos del álgebra. Durante 1826 y 1827, Graves estuvo inmerso en construir una teoría sobre logaritmos de números negativos y complejos, y a menudo se escribía con Hamilton comentándole sus progresos. En 1828, Graves entregó una memoria sobre logaritmos imaginarios en la Royal Society, que fue muy bien recibida por matemáticos de la talla de George Peacock y John Herschel, y publicada poco tiempo después gracias a la intermediación de Hamilton. Este episodio fue el comienzo del interés por parte de Hamilton en los números complejos.

Poco después, fue precisamente Graves quien recomendó a Hamilton la lectura del recién publicado en 1828 *Tratado sobre la representación geométrica de las raíces cuadradas de cantidades negativas* del matemático John Warren. En este trabajo se describía la representación de los números complejos de Argand. Hamilton se sintió inmediatamente cautivado por la idea, de modo que si se consideraban los números complejos como vectores del plano, entonces las operaciones aritméticas elementales adquirían una interpretación geométrica natural, de modo que la suma compleja resultaba equivalente a la suma vectorial, y la multiplicación compleja equivalente al producto de un vector por un escalar más la rotación de dicho vector. Fue entonces cuando en Hamilton surgió de forma natural la idea de intentar generalizar los números complejos con el fin de representar rotaciones y movimientos de vectores en el espacio tridimensional. Si esta generalización funcionaba, sin lugar a dudas los números complejos resultarían una herramienta potentísima para la formulación de las leyes básicas de la física con el fin de describir el movimiento de cuerpos rígidos en el espacio.

En los años inmediatamente posteriores a la lectura del Tratado de Warren, Hamilton intentó por su parte llevar a cabo otras representaciones algebraicas más simples de los números complejos, ya que los matemáticos del siglo XVIII consideraban que la interpretación geométrica de los números complejos de Argand no era demasiado compatible con el paradigma tradicional del álgebra hasta la época. En la década de 1820-30, Hamilton había descubierto (independientemente de Cauchy, que lo haría en 1821), las ecuaciones de Cauchy-Riemann y la representación de una función de variables complejas compuesta por dos funciones de variables reales. Hamilton llamaría a las actuales Ecuaciones de Cauchy-Riemann, *Ecuaciones de Conjugación*, y a las dos funciones reales, *Funciones Conjugadas*. Este descubrimiento le hizo considerar que los números complejos podían verse como pares ordenados, o "parejas" de números reales, y utilizó este concepto para investigar el problema de los logaritmos imaginarios de Graves. Pero Hamilton tenía ahora que explicar cómo estaban relacionadas estas parejas de números con los números reales.

A principios de la década de 1830-40, Hamilton comenzó a interesarse por la filosofía de la mano fundamentalmente de Coleridge y Kant. Este interés se tradujo en un cambio de perspectiva de la actividad científica de Hamilton. En 1830 estudió concienzudamente los trabajos de George Berkeley y el filósofo croata Rudjer Bošković. El siguiente año leyó *Ayudas a la reflexión* de S. T. Coleridge. En octubre de 1831, Hamiltón leyó la *Crítica de la razón pura* de Inmmanuel Kant, que aún no había sido traducida al inglés y que era una obra bastante desconocida para los científicos británicos de la época, y quedó tan profundamente impresionado, que a partir de entonces su actividad científica sufrió un punto de inflexión influenciada directamente por la obra del filósofo alemán.

El 4 de noviembre de 1833, Hamilton presentó un artículo a la Real Academia Irlandesa con el nombre de *Teoría de funciones conjugadas, o parejas algebraicas*. En él, Hamilton definía operaciones de suma y multiplicación para las parejas, y demostraba que el cuadrado de la pareja $(0,1)$ es la pareja $(-1,0)$, de modo que $(0,1)$ debe considerarse como $\sqrt{-1}$; definió las propiedades aritméticas básicas para estas parejas, verificando que formaban un cuerpo[2]. Dos años después, el 1 de junio de 1835, Hamilton presentó un segundo artículo a la Real Academia Irlandesa, titulado *Ensayo preliminar y elemental de álgebra como ciencia del tiempo puro*[3]. En éste, Hamilton consideraba la noción de tiempo como principio y fundamento de la unidad numérica, y comentaba:

> *"La idea de continuidad en la progresión de un momento de tiempo a otro engloba la idea de una progresión continua, de manera semejante, en las cantidades...la existencia de un número o de una razón a que es la raíz*

[2] En una carta fechada en 1837 dirigida a Wolfgang Bolyai, Gauss describía que ya en 1831, el año en el que publicó su teoría sobre residuos bicuadráticos, había tenido la idea de la representación de los números complejos como parejas ordenadas de números reales. Hamilton, independientemente por su parte, fue el primero que publicó la idea.

[3] Este título tiene su origen en Kant pues los números reales como tiempo son definidos como la razón de la longitud de un segmento de recta sobre un segmento unidad. Kant pensaba que la geometría pertenecía al espacio y la aritmética al tiempo.

cuadrada exacta de todo número positivo propuesto o razón b."

Siguiendo por este camino, y partiendo de la media proporcional de dos números positivos, establece que:

$$\text{si } a > \frac{n'}{m'} \text{ para } \frac{n'^2}{m'^2} < b \text{ y si } a < \frac{n''^2}{m''^2} > b, \text{ entonces } a = \sqrt{b}$$

Llega así a la introducción de $a = \sqrt{b}$, esto es, de los números irracionales, como una partición definida por dos sucesiones, p_i^2 y p_j^2, tales que:

$$p_i^2 < b < b_l^2, \text{ con } i,j = 1,2,3\ldots$$

Y no continúa desarrollando su teoría de los irracionales. Sólo le interesa definirlos mediante los racionales. Ambos artículos fueron fundidos en uno más general publicado más tarde en 1837.

Hamilton fue el primer matemático en tratar los números complejos como pares ordenados (sin obviar a Gauss puesto que no publicó sus avances), sin embargo es importante comentar que el espíritu de su análisis difiere tanto desde el punto de vista de los textos modernos, como de sus contemporáneos en Cambridge. La visión de los números complejos de los algebristas de Cambridge consistía en reducir todo planteamiento a un mero sistema de reglas para la manipulación simbólica carente de significado. Pero este enfoque era ajeno al pensamiento de Hamilton. Él consideraba el álgebra fuertemente interconectada con la física, donde la interpretación geométrica de los números complejos cobraba sentido como realidad material del mundo que nos rodea. Hamilton deseaba un enfoque del álgebra como ciencia (un conjunto de verdades que explicaran nuestra realidad física). Su ambición en este sentido consistió en establecer una referencia objetiva para las ecuaciones del análisis complejo. En su esencia, Hamilton influenciado por Kant, reclama que la geometría debe considerarse la ciencia del espacio, y de este modo, el álgebra es la ciencia del tiempo. Pero el desarrollo y avance de las investigaciones de Hamilton caminaban en contracorriente a la tendencia histórica establecida por los algebristas británicos de la época.

El punto de vista de Hamilton conllevaba grandes ventajas, la principal desmarcarse de la tendencia establecida, lo que le llevó al tratamiento de los números complejos desde un punto de vista puramente sintáctico y algebraico, hecho que le llevaría descubrir los cuaterniones más adelante. Si se está interesado en resolver ecuaciones algebraicas, entonces los números complejos satisfarán nuestras necesidades. Sin embargo si se tiene un sentido desarrollado de la geometría y de la interpretación física del plano complejo, es natural plantearse la analogía con el espacio tridimensional. Por otro lado, su concepción del álgebra como "ciencia del tiempo puro" (aparte de sus incuestionables repercusiones filosóficas), resultaban ser un fundamento inadecuado para el álgebra del siglo XIX. Hamilton tenía la creencia de que la naturaleza del tiempo requería que todas las operaciones fueran asociativas, y que la inversa del producto siempre existiera. Pero estos requerimientos habían encorsetado el desarrollo del álgebra británica. Desde un punto de vista retrospectivo, la exploración de las nuevas estructuras algebraicas, necesitaban de una concepción mucho más flexible.

5. Los Cuaterniones

Teoría de las funciones conjugadas, o parejas algebraicas: con un ensayo preliminar sobre el álgebra como ciencia del tiempo puro, puede ser considerada como el primer intento de Hamilton de encontrar un álgebra que englobara un conjunto de axiomas basados en el "orden y progresión continua, o, del tiempo puro". Algunos puntos de este trabajo ya habían sido presentados a la Real Academia Irlandesa en 1833, pero el tratado completo no fue publicado hasta 1837. El trabajo se divide en tres partes, 5 páginas de *Observaciones Generales Introductorias*, 95 páginas de *Ensayo de álgebra como ciencia del tiempo puro*, y 29 páginas de *Teoría de funciones conjugadas, o parejas algebraicas*. Hamilton finaliza su trabajo con la afirmación:

> *"...el autor espera publicar más adelante muchas aplicaciones sobre este aspecto; especialmente sobre Ecuaciones e Integrales, y sobre la Teoría de Tripletas..."*

Las tripletas a las que hacía referencia eran números hipercomplejos referidos al espacio tridimensional del mismo modo que los números complejos se referían al espacio de dos dimensiones. Su deseo fue finalmente satisfecho en 1843, con la aparición de los cuaterniones como números hipercomplejos de cuatro números, tras una larga e infructuosa búsqueda de las tripletas.

Por analogía con los números complejos, al principio Hamilton consideró sus tripletas con la expresión $a + bi + cj$, donde a, b, y c eran números reales, y $i^2 = j^2 = -1$. La suma de estas expresiones no presentaba ninguna dificultad; estas eran sumadas, sumando cada uno de los coeficientes "escalares" de cada una de las unidades i y j del siguiente modo:

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j$$

Pero Hamilton, se topó con una dificultad seria al intentar definir el producto de tripletas, ya que estas no guardaban las propiedades comunes de los números complejos. El módulo de un número complejo $a + bi$ resulta $a^2 + b^2$, de manera que el producto del módulo de dos números complejos resulta ser el módulo del producto de los dos números (lo que Hamilton denominó *ley de los módulos*). Pero al considerar el cuadrado de una tripleta, Hamilton se encontraba con lo siguiente:

$$(a + bi + cj)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2abi + 2acj + 2bcij$$

cuyo cuadrado del módulo resultaba:

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + (2bc)^2$$

La ley de módulos no se satisfacía a menos que los términos ij fueran simplificados de la expansión de $(a^2 + b^2 + c^2)^2$. El término debe o bien suprimirse estableciendo $ij = 0$, o incluyéndolo en alguno de los otros tres términos. Hamilton consideraba que establecer $ij = 0$ no resultaba "suficientemente" correcto:

ISSN 2174-0410

> *"Por momentos me he visto tentado en considerar $ij = 0$. Pero me resulta extraño e incómodo, y me percaté de que la misma supresión del término no deseado, podría obtenerse asumiendo algo que me parecía menos violento, es decir que $ji = -ij$. De este modo consideré que $ij = k$, $ji = -k$, reservándome la consideración de si k era nulo o no."*

Su pensamiento aquí es que, si el orden del producto es escrupulosamente respetado, hay en realidad dos términos involucrados en el producto de i y j, es decir, que $2bcij$ debería ser escrito como $bc(ij + ji)$. La ley de módulos podría satisfacerse fácilmente asumiendo que $ij + ji = 0$, sin considerar separadamente ni ij ni ji nulos.

El siguiente paso a dar era el de generalizar el producto de tripletas. Bajo la consideración de que $ij = -ji = k$, Hamilton calculo el producto:

$$(a + bi + cj)(x + yi + zj) = (ax - by - cz) + (ay + bx)i + (az + cx)j + (bz - cy)k$$

Considerando $k = 0$, Hamilton nuevamente se preguntaba si la ley de módulos era satisfecha. Es decir si la ecuación:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2$$

era satisfecha. La respuesta es claramente que no; el lado izquierdo de la igualdad es superior al derecho en el término $(bz - cy)^2$, que es el cuadrado del coeficiente de k en la expansión del producto. Por lo tanto, la asunción de que $k = 0$ no era sostenible. Sin embargo, si se consideraba $k \neq 0$, no se satisfacía enteramente porque el producto de dos tripletas debiera ser otra tripleta, y el producto indicado contenía cuatro términos en lugar de tres. Durante prácticamente diez años Hamilton fue incapaz de avanzar en este sentido. Cada mañana en el desayuno, sus hijos que en cierto modo participaban con afecto en las esperanzas y los desengaños de su padre a medida que las investigaciones tenían lugar, le preguntaban:

> *"Bueno Papá, ¿puedes ya multiplicar las tripletas?."*

a lo que Hamilton respondía sacudiendo tristemente la cabeza:

> *"No. Por ahora sólo puedo sumarlas y restarlas."*

Sin embargo, algo extraordinario iba a suceder mientras paseaba como de costumbre con su mujer por el Canal Real en Dublín el 16 de octubre de 1843. De pronto en un acto de revelación, Hamilton se dio cuenta de que todas sus dificultades podían verse superadas simplemente con la consideración de tomar cuatro términos en lugar de tres, es decir, si tomaba k como una tercera unidad imaginaria añadida a i y j. Hamilton describe este hecho quince años después en una carta a uno de sus hijos:

> *"Mañana será el decimoquinto cumpleaños de los cuaterniones. Surgieron a la vida, o a la luz, ya crecidos, el 16 de octubre de 1843, cuando me encontraba caminando con la Sra. Hamilton hacia Dublín, y llegamos*

> *al Puente de Broughman. Es decir, entonces y ahí, cerré el circuito galvánico del pensamiento y las chispas que cayeron fueron las ecuaciones fundamentales entre i, j, k; exactamente como las he usado desde entonces. Saqué, en ese momento, una libreta de bolsillo, que todavía existe, e hice una anotación, sobre la cual, en ese mismo preciso momento, sentí que posiblemente sería valioso el extender mi labor por al menos los diez (o podían ser quince) años por venir. Es justo decir que esto sucedía porque sentí, en ese momento, que un problema había sido resuelto, un deseo intelectual aliviado, deseo que me había perseguido por lo menos los quince años anteriores. No pude resistir el impulso de coger mi navaja y grabar en una piedra del Puente Brougham la fórmula fundamental con los símbolos i, j, k:*
>
> $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
>
> *que contenían la solución del Problema, que desde entonces sobrevive como inscripción."*

Hamilton denominó a estas nuevas expresiones *cuaterniones*, o *números cuaternios*. Son números hipercomplejos de la forma $q = a + bi + cj + dk$, donde a, b, c y d son números reales, e i, j y k satisfacen la relación $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Habiendo asumido que $i^2 = j^2 = -1$ y que $k = ij = -ji$, parecía claro para Hamilton que:

$$k^2 = (ij)(ij) = -(ji)(ij) = -ji^2j = j^2 = -1$$

Para comprobar la ley de módulos, todavía necesitaba valores para ik y kj. No estando seguro aún de que la propiedad asociativa se cumpliera en los cuaterniones, Hamilton concluyó:

> *"...tenemos probablemente que $ik = -j$, porque $ik = iij$, y $i^2 = -1$; de este modo podemos esperar encontrar que $kj = ijj = -i$."*

La propiedad asociativa le habría proporcionado el valor para ki, de modo $ki = (-ji)i = -ji^2 = (-j)(-1) = j$. Pero Hamiltón prefirió argumentarlo del siguiente modo:

> *"...de ella consideré que resultaba que $ki = j$, $jk = i$, porque parecía evidente que si $ji = -ij$, deberíamos tener también que $kj = -jk$, $ik = -ki$. "*

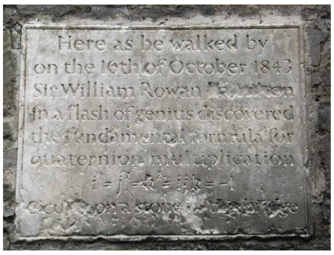
Resumiendo las "asunciones" del producto (como Hamilton las llamaba) para los cuaterniones resulta:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

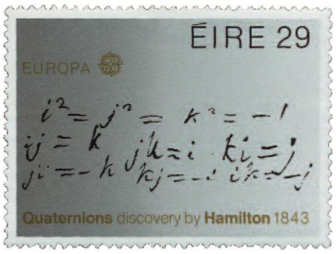
Obsérvese, que para dos cuaterniones q y q', en general no es igual el producto qq' que el de $q'q$. El nuevo álgebra de los cuaterniones obedece las propiedades fundamentales de la aritmética tradicional a excepción de la propiedad conmutativa. La aceptación del álgebra no conmutativa puede ser considerado

ISSN 2174-0410

un destello de su genialidad. Para Hamilton debió resultar bastante complicado ir en contra de la tendencia establecida por los algebristas de su época, muy similar al que debieron sufrir los fundadores de las geometrías no euclídeas (Bolyai y Lobachevsky fundamentalmente) al considerar abstraerse del conservadurismo geométrico reinante durante más de dos milenios, y romper con el quinto postulado de las paralelas. Hamilton debió realizar el sacrificio de renunciar a la propiedad conmutativa, lo que daría lugar a la eclosión de las nuevas álgebras donde esta propiedad no era necesaria. De hecho, durante los tres meses siguientes a la aparición de los cuaterniones de Hamilton, John Thomas Graves realizó en 1843 un estudio (aunque no lo publicó) sobre los *octoniones*[4], que formaban un álgebra 8-dimensional, donde el producto no satisfacía ni la propiedad conmutativa ni la propiedad asociativa.



Placa en el Puente de Brougham



Sello irlandés conmemorativo de la Serie Europa (1983)

Hamilton estaba absolutamente convencido de que los cuaterniones se convertirían en la herramienta precisa con la que poder describir la realidad de espacio físico y el tiempo. De modo que el tiempo es un escalar, y los puntos de espacio están definidos por las tres coordenadas reales. A fin de especificar la operación necesaria para convertir un vector en otro en el espacio, era necesario conocer cuatro números, la relación entre la longitud de un vector y otro, el ángulo entre ellos, el nodo, y la inclinación del plano en el que estos vectores se encuentran.

Sellos irlandeses conmemorativos del centenario del descubrimiento de los Cuaterniones (1943)

Durante los últimos 22 años de su vida, la carrera científica de Hamilton se centró casi de manera exclusiva en el desarrollo de los cuaterniones, aplicándolos a la dinámica, astronomía y la teoría de la luz. Fueron años preponderadamente tristes y solitarios, debido a enfermedades frecuentes y a las ausencias de su esposa. A finales del año 1865, se habían publicado casi 150 artículos sobre el asunto, 109 de ellos de la mano de Hamilton. Diez años después de su descubrimiento, Hamilton publicó sus *Lecciones sobre Cuaterniones*, un trabajo de 736 páginas con un Prefacio adicional de 64 páginas. El libro en cierto modo resultó difícil de entender por los matemáticos de la época, hasta el punto de que un colega escribió a Hamilton:

[4] Cabe destacar que el matemático Arthur Cayley fue el primero en publicar sobre ellos en 1845, por lo que también son denominados *números de Cayley*.

ISSN 2174-0410

"Lleva más de un año leerlo, y casi una vida comprenderlo."

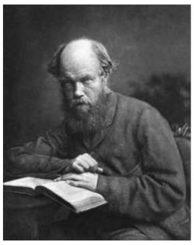
A petición de algunos amigos, Hamilton comenzó a escribir una introducción a los cuaterniones con ejemplos y problemas; pero una vez más su excesiva verborrea le llevó a escribir *Los Elementos de los Cuaterniones*, editado de manera póstuma por el primogénito de Hamilton, que resultaría incluso más extenso que *Lecciones* (762 páginas impresas).

6. Vectores y Cuaterniones

Hermann G. Grassmann

Ya comentamos en nuestra introducción la importancia de los trabajos del alemán Hermann G. Grassmann en el desarrollo de las nuevas álgebras que estaban por venir en la segunda mitad del siglo XIX. Después de proponer en su *Ausdehnungslehre* nuevas bases para todas las matemáticas, comenzando con definiciones de naturaleza más bien filosófica, Grassmann demostró que si la geometría se hubiese expresado en forma algebraica como él proponía, el número tres no hubiese desempeñado el papel preponderante que hoy día tiene como número que expresa el espacio que nos rodea; de hecho, el número de posibles dimensiones de interés para la geometría es ilimitado. Grassmann no pudo formalizar su trabajo ya que en aquel momento no existía un lenguaje algebraico adecuado donde sus ideas pudieran ser plasmadas. Sin embargo, su álgebra lineal fue comprendida y reconocida finalmente alrededor de 1920, cuando Hermann Weyl y otros publicaron su definición formal que ya había sido estudiada y formulada 30 años atrás por el matemático italiano Giusseppe Peano (1858-1932). Grassmann desarrolló la teoría de la independencia lineal de modo extraordinariamente similar a la presentación que hoy día podemos encontrar en los textos modernos de álgebra lineal. Definió la noción de subespacio, independencia, longitud, desdoblamiento, dimensión, unión e intersección de subespacios, y proyección de elementos en los subespacios. Fue a principios del siglo XX cuando los trabajos de Grassmann comenzaron a ser considerados y valorados. Sin embargo a pesar de ello tuvo algunos incondicionales como su compatriota Hermann Hankel (1839-1873), que escribió *Theorie der complexen Zahlensysteme und ihre Functionen* en 1867, donde llevó a cabo una clara y concisa comparación desde el punto de la notación del cálculo cuaterniónico con el grassmaniano. De hecho, previamente el propio Grassmann encontró una forma de reducir su cálculo al formalismo de los cuaterniones.

El trabajo de Grassmann consistió fundamentalmente en una generalización del actual *producto vectorial*, de ahí su valor. Grassmann se guió de su intuición geométrica, definiendo un nuevo producto que en la actualidad se denomina *producto exterior* ($ab = a \wedge b$) que él denominaba producto *escalón*, relacionado íntimamente con el actual producto vectorial, pero sin la restricción de una dimensionalidad fija de éste. Debido a un actual abuso de la notación, algunos docentes y profesores expresan erróneamente el producto vectorial con el símbolo $\wedge$, a pesar de que conceptualmente son diferentes en origen y formulación, ya que el producto exterior es asociativo, mientras que el producto vectorial o producto *cruz* no lo es al ser un álgebra de Lie.




Peter Guthrie Tait *James Clerk Maxwell*

El descubrimiento de los cuaterniones nunca colmaron las expectativas que Hamilton había depositado en ellos con el fin de crear un lenguaje matemático aplicable a la realidad física. Sin embargo, Hamilton contó con un ingente número de defensores a ultranza en favor de la utilización de los cuaterniones en el desarrollo de la física. Entre ellos caben destacar a los físicos escoceses Peter Guthrie Tait (1831-1901) y James Clerk Maxwell (1831-1879), aunque este último, más que defender el uso de los cuaterniones, defendió su metodología como acercamiento de la realidad física. De hecho, Tait escribió *Tratado Elemental sobre Cuaterniones* en 1867, en el que reclamaba la importancia de los cuaterniones en la física. El tratado de Tait, contenía equivalencias con las operaciones modernas del producto escalar y vectorial de vectores, aunque desarrolladas en notación cuaterniona. En particular, especificaba que $S.\alpha\beta = -T\alpha T\beta \cos\theta$, donde T es la longitud del vector y θ es el ángulo entre α y β, y entonces $V.\alpha\beta = T\alpha T\beta \operatorname{sen}\theta \cdot \eta$ donde η es el vector unitario perpendicular a ambos α y β.

Por su parte Maxwell, en su *Tratado sobre Electricidad y Magnetismo*, también defendió en cierto modo las ideas de Hamilton. Su principal propósito era evitar explícitamente las coordenadas cartesianas, y fijar su estudio desde un punto del espacio en lugar de en tres coordenadas, y considerar la magnitud y dirección de una fuerza en lugar de sus tres componentes. Maxwell expresó sus resultados tanto en la forma de coordenadas como en la forma cuaterniona. En los preliminares de la segunda edición de su tratado comentaba:

> *"Pero aún por muchos propósitos del razonamiento físico, para diferenciarlo del cálculo, es deseable evitar explícitamente el uso de las Coordenadas Cartesianas y fijar la atención en un punto del espacio en lugar de en sus coordenadas, y en la magnitud y dirección (de la fuerza) en lugar de en sus tres componentes. Esta forma de comprender geométrica y físicamente magnitudes es más primaria y natural que la otra, aunque las ideas conectadas a ésta no encontraron su completo desarrollo hasta que Hamilton dio un gran salto en el tratamiento del espacio, mediante el invento del Cálculo de los Cuaterniones. (...) Ya que los métodos de Descartes son todavía aquellos con los que los estudiantes de ciencias están más familiarizados, además de ser los más útiles para realizar cálculos, por lo que expresamos todos nuestros resultados en la forma cartesiana. Estoy convencido, sin embargo, que la introducción de las ideas y métodos de los Cuaterniones, será de un gran uso para el estudio de todas las partes de nuestra materia, y especialmente de la electrodinámica, donde tenemos que tratar con un gran número de magnitudes físicas, y las relaciones entre ellas pueden ser expresadas de forma muy simple haciendo uso del método de Hamilton, en lugar de las ecuaciones de costumbre. (...) 11. Una de las características más importantes del método de Hamilton, es la división de las magnitudes en Escalares y Vectores."*

Pero Maxwell no estaba de acuerdo con el Cálculo desarrollado por Hamilton, y llevó a cabo una crítica directa de la existencia en la constitución de los cuaterniones de dos partes no homogéneas, una parte escalar y una parte vectorial (geométrica). De ahí su aceptación de las ideas vinculadas con esta teoría pero su rechazo de sus métodos de cálculo.

William K. Clifford

El primer intento por llevar a cabo una transición desde el método de los cuaterniones hacia lo que actualmente denominamos *análisis vectorial*, fue llevado a cabo por el matemático William Kingdom Clifford (1845-1879). Hoy día es ampliamente conocido por sus *álgebras de Clifford*, un tipo de álgebra asociativa que generaliza al cuerpo de los números complejos y a los cuaterniones de Hamilton. Un resultado posterior, los octoniones (bicuaterniones), es ahora conocido como espacio de Clifford-Klein y es empleado para el estudio de movimientos en espacios no euclidianos y en ciertas superficies. En su *Elementos de Dinámica* publicado en 1878, introdujo el producto vectorial, prácticamente tal y como hoy lo conocemos, aunque sólo un refinamiento posterior de la teoría de determinantes acabó de darle la forma, esto es:

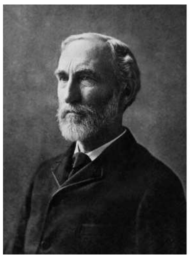
$$C = A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

También introdujo la noción de *producto geométrico*, que funde los productos escalar y exterior en un solo objeto mediante las álgebras que hoy se nombran en su honor. Dicho producto es muy similar al producto de cuaterniones pero no está restringido a 4 dimensiones. Vale:

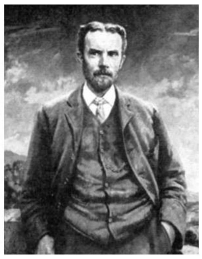
$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

Clifford, reveló la importancia del uso de métodos vectoriales en detrimento de los cuaterniones cuyo uso era demasiado limitado. De este modo sus consideraciones para establecer un nuevo producto son fundamentalmente geométricas. Clifford interpretó el área de un paralelogramo como generada por el movimiento de un vector ab sobre un vector ac, definiendo así el producto vectorial, cuyo resultado es un vector de longitud $(ab \cdot ac) \operatorname{sen} \widehat{bac}$ y cuya dirección depende del sentido de recorrido. Por otro lado el examen de un volumen construido en torno a la transición de ab (el cual representa ahora un área) a lo largo de ac, determina el segundo producto, el producto escalar, como la magnitud $(ab \cdot ac) \cos \widehat{bac}$. Esas dos multiplicaciones son evidentemente equivalentes a las que se obtienen con los cuaterniones (de hecho, no es totalmente un azar si las notaciones empleadas son similares), pero, y es la gran diferencia con Maxwell, Clifford se deshace del poco atrayente manejo de los cuaterniones para considerar productos de dos vectores de manera separada, lo que no hacían los científicos anteriores quienes veían en ellos las dos partes de un mismo y único producto.

ISSN 2174-0410



Josiah Williard Gibbs



Oliver Heaviside

A finales del siglo XIX se realizaron algunos descubrimientos físicos debido a la aparición de los cuaterniones. Pero una pequeña revolución matemática estaba a punto de hacer aparición de la mano (de forma independiente) del matemático americano Josiah Williard Gibbs (1839-1925) de la Universidad de Yale, y del matemático inglés Oliver Heaviside (1850-1925). Ambos publicaron sus trabajos en los años 1881 y 1882 respectivamente. Heaviside participó de forma activa en la extensión de las ecuaciones de campo de Maxwell y proporcionó algunas de las primeras soluciones completas. En el estudio del electromagnetismo, Maxwell había utilizado los cuaterniones, pero de un modo muy simplificado. Para los propósitos pedagógicos y sistematizadores de Heaviside esto no era suficiente, por lo que elaboró el análisis vectorial como un álgebra independiente, formulada en el capítulo III de *Teoría del Electromagnetismo* del mismo modo que hoy día sigue siendo la forma actual, donde se encuentran las razones de su rechazo a la teoría cuaterniona, razón por la que en multitud de ocasiones mantuvo polémicos enfrentamientos con P. G. Tait. Paralelamente al trabajo de Heaviside, Gibbs desarrolló un cálculo simbólico separando las partes vectorial y escalar de los cuaterniones. A diferencia de Heaviside, su claridad y rigor matemático llevó a dar un impulso a los métodos de éste. En particular, por ejemplo, desarrolló la teoría del operador *nabla*, en su expresión actual, con todas sus matrices, esto es, rotacional, divergencia, gradiente e identidades. Utilizando sólo la porción vectorial de un cuaternión para representar cantidades físicas, es decir, $u = bi + cj + dk$, desarrolló un nuevo sistema tridimensional denominado *análisis vectorial*. En lugar de hacer uso del producto de los cuaterniones de Hamilton, introdujo dos nuevos tipos de multiplicación; por un lado, el producto escalar de $v = bi + cj + dk$ y $v' = b'i + c'j + d'k$, definido por:

$$v \cdot v' = bb' + cc' + dd'$$

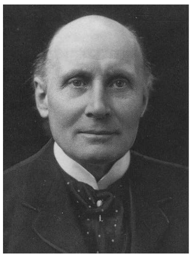
y el producto vectorial dado por:

$$v \times v' = (cd' - c'd)i + (db' - b'd)j + (bc' - b'c)k.$$

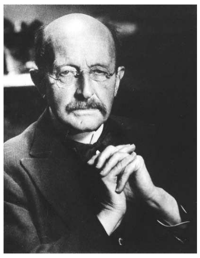
A pesar de la defensa a ultranza de los cuaterniones por parte de los seguidores de Hamilton, finalmente las teorías vectoriales de Gibbs y Heaviside se impusieron, gracias sobre todo a los desarrollos refinados del álgebra y la teoría de determinantes, que hizo que el análisis vectorial fuera tomando cuerpo como entidad independiente, no sin antes dejar algún enfrentamiento dramático con los cuaternionistas liderados fundamentalmente por Tait, que se negaban a reconocer la utilidad práctica de la nueva estructura creada. Sin embargo, tras la publicación de *Análisis Vectorial* de Gibbs en 1901 (su publicación de 1881 se realizó de forma privada a modo de libro de texto para sus estudiantes), y la publicación de los nuevos tratados sobre electromagnetismo en lenguaje vectorial, los cuaterniones fueron progresivamente reemplazados. En cierto modo, el origen del mismo análisis vectorial quedó envuelto en un poderoso lenguaje matemático autoconsistente del que quedaron las unidades imaginarias, sino

¿quién jamás sintió curiosidad por saber de donde salían las letras i, j, k del determinante formal que permite calcular el producto vectorial?.

7. La semilla de Hamilton

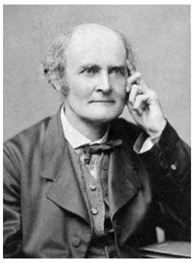


Alfred N. Whitehead



Max Planck

En el año 1900, el matemático Alfred North Whitehead (1861-1947) consideró que si bien toda la física hasta entonces conocida podía ser tratada por los métodos del álgebra ordinaria, era posible que pudieran aparecer algún día nuevos campos en la física para los cuales el álgebra no conmutativa sería la única representación natural. En aquel mismo año comenzó el camino hacia la realización de esta conjetura. Max Planck (1858-1947) introdujo el cuanto h, el comienzo de la teoría cuántica. Ahora bien, h es un cuanto de acción, y la acción era un concepto central en el sistema de la dinámica de Hamilton. Así, las ideas de Hamilton sobre dinámica comenzaron a aparecer en primer plano, aunque muy lentamente.



Arthur Cayley

La buena semilla siguió creciendo, sin embargo. El descubrimiento de la relatividad especial trajo los cuaterniones al primer plano, porque Arthur Cayley (1821-1895), de la Universidad de Cambridge, había demostrado en 1854 que los cuaterniones podían ser aplicados a la representación de rotaciones en un espacio de cuatro dimensiones. Su resultado produjo una expresión particularmente elegante de la transformación más general de Lorentz. Por otra parte los nuevos descubrimientos subrayaron de nuevo la importancia de la acción, que preserva su forma en diferentes sistemas de referencia y es, por tanto, fundamental en la física de la relatividad.

Werner Heisemberg

Max Born

Pascual Jordan

Mientras tanto, las investigaciones en la teoría cuántica ponían de manifiesto las concepciones dinámicas que Hamilton tenía. Y en 1925 el otro aspecto de su trabajo, su álgebra no conmutativa, fue introducida en la teoría cuántica por Werner Heisenberg (1901-1976), Max Born (1882-1970) y Pascual Jordan (1902-1980), demostrando que las ecuaciones hamiltonianas de la dinámica eran también válidas en teoría cuántica, de modo que los símbolos que representaban las coordenadas y los momentos en la dinámica clásica fueron interpretados como operadores cuyos productos no conmutaban.

El tiempo dio la razón a la intuición que Hamilton tenía sobre la dualidad entre las coordenadas generalizadas y los momentos generalizados. Esto vino a ser demostrado de una forma sorprendente en 1927, cuando Heisenberg descubrió el *Principio de Indeterminación*, que se enuncia comúnmente de esta forma:

> *"Cuanto más exactamente son determinadas las coordenadas de una partícula, menos exactamente puede ser conocido su momento, y recíprocamente, siendo el producto de las dos indeterminaciones del orden de la constante de Plank h."*

Wolfgang E. Pauli

Arthur Conway

Paul A.M. Dirac

Las investigaciones en mecánica cuántica tuvieron la tendencia general de considerar las matrices en lugar de los cuaternios como el tipo de álgebra no conmutativa que mejor se adaptaba a sus problemas; pero las fórmulas originales de Hamilton continuaban apareciendo. Así, "las matrices de spin", de Wolfgang Erns Pauli (1900-1958), de las que depende la teoría de las refracciones y momentos angulares de la mecánica cuántica, son simplemente las tres unidades de los cuaterniones de Hamilton, i, j, k. Arthur Conway (1875-1950) demostró que los métodos de los cuaterniones podían ser utilizados para explicar la teoría del giro del electrón propuesta por Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984).

Referencias

[1] BELL, Eric Temple. *Men of Mathematics*, pp. 340–361, Simon & Schuster, Inc, New York, 1986.

[2] BURTON, David M. *The History of Mathematics: An Introduction*, 6th. Ed., pp. 626–635, The McGraw-Hill Company, USA, 2007.

[3] EWALD, William. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics Vol.I*, pp. 362–369, 375–444, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[4] GONZÁLEZ HERNÁNDEZ, Juan Francisco. *El Producto Vectorial*, Trabajo tomado de la página del Profesor Fernando Chamizo Llorente del Departamento Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Madrid. http://web.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/

[5] GRAVES, Robert Perceval. *Life of Sir William Rowan Hamilton, Vols.I* (1882), *II* (1885), *III* (1889), University Press, Dublin.

[6] GUTIÉRREZ, Santiago. *Hamilton: La Liberación del Álgebra*, pp. 95–99, Revista *Suma*, Nº 49, Junio, Valencia, 2005.

[7] HAMILTON, William Rowan. *Lectures on Quaternions*, Hodges and Smith, Dublín, 1853.

[8] HAMILTON, William Rowan. *Elements of Quaternions*, Longmans Grenn & Co., Londres, 1866.

[9] JAMES, Ioan. *Remarkable Mathematicians*, pp. 109–116, Cambridge University Press, The Mathematical Association of America, Cambridge, 2002.

[10] KATZ, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd. Ed., pp. 682–686, Adisson Wessley Educational Publishers, Inc., USA, 1998.

[11] LOVETT, Richard. *Ireland illustrated with Pen and Pencil*, pp. 22, 31, Hurst & Company, Nueva York, 1891.

[12] MARTÍNEZ-SIERRA, Gustavo y POIRIER, Pierre François Benöit. *Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial*, pp. 205–206, Revista *Latin American Journal Physics Education* Vol. 2, Nº 2, Mayo, México, 2008.

[13] SMITH, David Eugene. *A Source Book in Mathematics*, pp. 677–683, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1929.

[14] WHITTAKER, Edmund. *William Rowan Hamilton*, Revista *Scientific American*, Mayo, 1954, reimpresa en *Mathematics in the Modern World*, pp. 49–52, Freeman, San Francisco, 1968.

[15] EN LA RED,
http://es.wikipedia.org/wiki/John_Wallis
http://es.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton
http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem
http://colnect.com/en/stamps/stamp/9359-Dunsink-observatory-Ireland
http://whatever123.glogster.com/william-rowan-hamilton/
http://es.wikipedia.org/wiki/Hermann_Grassmann
http://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Guthrie_Tait
http://es.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell
http://es.wikipedia.org/wiki/William_Kingdon_Clifford
http://es.wikipedia.org/wiki/Josiah_Willard_Gibbs
http://es.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside
http://plato.stanford.edu/entries/whitehead/
http://www.fis.usb.ve/rcastell/fismod/problemarios/crono.html
http://www.ugr.es/~eaznar/fotos_cayley.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg
http://es.wikipedia.org/wiki/Max_Born
http://www.nndb.com/people/144/000099844/
http://es.wikipedia.org/wiki/Wolfgang_Ernst_Pauli
http://ens.math.univ-montp2.fr/SPIP/-Arthur-Conway-
http://ca.wikipedia.org/wiki/Paul_Adrien_Maurice_Dirac