Historias de Matemáticas
Las Escuelas Jónica y Pitagórica

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo pretende dar una visión general de las que hoy día son consideradas las dos primeras escuelas matemáticas griegas modernas. Se hace un repaso de ambas escuelas, la Escuela Jónica personificada en Tales de Mileto y la Escuela Pitagórica personificada en Pitágoras de Samos. Ambos personajes fueron un referente para otros filósofos y matemáticos posteriores.

Palabras Clave: Escuela Jónica, Escuela Pitagórica, Tales de Mileto, Escuela de Mileto, Pitágoras de Samos, pitagóricos, Aritmética, Geometría, Números.

1. Introducción

Podemos considerar que con la aparición de las Escuelas Jónica y Pitagórica, se dejó atrás la historia matemática antigua y comenzó la era científica moderna. Desafortunadamente la mayoría del legado de ambas escuelas no ha sobrevivido al tiempo y es escaso el material que ha llegado a nuestros días. Afortunadamente hacia el 450 a.C. tenemos constancia de los primeros comentarios históricos que realizó el historiador Proclo acerca de los *Elementos de Euclides*, que estaba familiarizado con la obra de Eudemo de Rodas, discípulo éste a su vez de Aristóteles.

También podemos encontrar extractos de la obra *Doctrina (o Teoría) de las Matemáticas* de Gémino de Rodas sobre el año 50 a.C. conservados a través de autores como Proclo, Eutocio, Al Nayrizi y otros. En él, divide a las matemáticas en dos partes: *Mental* y *Observable*, o en términos actuales *Pura* y *Aplicada*, donde se realiza una comparativa de los métodos de demostración usados por los primeros geómetras griegos con los métodos actuales.

También han llegado a nuestros días las biografías de algunos de los matemáticos más relevantes de esa época, así como de la vida y obra de otros más modestos.

2. La Escuela Jónica

2.1. Tales de Mileto

Es considerado por muchos (por ejemplo Aristóteles) el fundador de la primera escuela de matemáticas y filosofía griegas y uno de los Siete Sabios de Grecia. Nació en torno al año 640 a.C.[1] en la ciudad jónica de Mileto, una antigua ciudad en la costa occidental de Asia Menor (en lo que actualmente es la provincia de Aydin en Turquía), cerca de la desembocadura del río Menderes.

Tales de Mileto

Durante la primera etapa de su vida, Tales se dedicó parcialmente al comercio y a asuntos de carácter público. Y a juzgar por las anécdotas sobre su persona que han sobrevivido hasta nuestros días, se destacó por su astucia en los negocios. Se cuenta que una vez transportando una mercancía de sal sobre unas mulas, uno de los animales aprendió a sumergir parte de su carga al cruzar el cauce de un río, ya que de este modo la misma se aligeraba debido a que la sal se disolvía con el agua. Los encargados de la mula estaban muy molestos al perder sus preciados cargamentos de sal y consideraron que el animal ya no servía para el trabajo, por lo que decidieron sacrificarlo. Tales intervino para tratar de dar una explicación del comportamiento de la mula, por lo que la observó cuidadosamente sumergiéndose en el río un par de ocasiones y propuso una solución para que la mula siguiera siendo útil y no echara a perder más los cargamentos de sal. En lugar de cargar a la mula con los usuales sacos de sal, Tales la cargó de esponjas. Así, cada vez que la mula se sumergía en el río queriendo aligerar su carga, las esponjas absorbían el agua y su carga se hacía más pesada. De esta forma, después de varios días de repetir la lección de las esponjas, la mula aprendió a no sumergirse más en el río. De este modo, gracias al ingenio de Tales, la mula siguió siendo útil y conservó su vida.

Siendo aún comerciante, Tales visitó la Gran Pirámide de Egipto. En aquella visita uno de los allí presentes formuló la pregunta de cuál era la altura de la misma. Ninguno de los egipcios que allí estaban pudieron dar respuesta ya que la pirámide era muy alta y si se soltaba una cuerda desde la punta hasta el suelo, esta acción no mediría la altura. Pero Tales ante tal reto geométrico se puso manos a la obra para resolver este problema. Primero midió la longitud de la sombra de la pirámide, luego la longitud de su propia sombra y, como ya conocía su estatura, hizo algunos cálculos y sorprendió a los egipcios con la medida de la altura de la pirámide. Los egipcios desconocían el Teorema que

[1] Algunas fuentes consideran la fecha de 624 a.C. como el año de su nacimiento.

Tales estaba usando: si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes. Este resultado corresponde a una de las versiones del llamado *Teorema de Tales*.

Durante su periodo en Egipto, Tales estudió Astronomía y Geometría. Regresó a Mileto para abandonar su profesión como comerciante y su vida pública, centrándose única y exclusivamente en el estudio de la filosofía y la ciencia (disciplinas que en las Escuelas Jónica, Pitagórica y quizás Ateniense estaban íntimamente interconectadas), donde vivió hasta su muerte alrededor del 550 a.C.

Desgraciadamente no nos podemos hacer una idea exacta de su labor docente. Según Proclo, sus enseñanzas consistían en un número de proposiciones aisladas que no seguían ninguna secuencia lógica, pero cuyas demostraciones eran deducidas, por lo tanto los teoremas no eran meras afirmaciones resultado de la inducción de un gran número de casos especiales, como probablemente era la manera de actuar de los geómetras egipcios. Este carácter deductivo es precisamente su principal sello de distinción. Proclo declaraba en el *Sumario de Eudemo*[2]

> *"...primero fue a Egipto y después introdujo este estudio en Grecia. Descubrió muchas de las proposiciones por sí mismo e instruyó a sus seguidores en los principios que subyacen en muchas otras, siendo un método de ataque más general en algunos casos, más empírico en otros."*

Podemos atribuirle con razonable probabilidad ciertas proposiciones relacionadas con la geometría de los ángulos, las rectas, y las superficies que las determinan, transformando la geometría al cambiar el enfoque de la misma desde un punto de vista empírico a un punto de vista deductivo.

En su *Comentario*[3] y citando a Eudemo, Proclo afirma que Tales estableció cuatro teoremas:

1. *"El círculo se bisecta por su diámetro."*
2. *"Los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales."* (Euc. I, 5). Proclo parece dar a entender que esta afirmación fue demostrada considerando otro triángulo isósceles idéntico, dándole la vuelta y superponiéndolo al primero, una especie de demostración empírica.
3. *"Los ángulos opuestos de líneas rectas que se intersectan, son iguales."* (Euc. I, 15). Tales podía haber considerado ésto como obvio, para Proclo fue Euclides el primero que dio una demostración correcta de esta afirmación.
4. *"Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los triángulos son congruentes."* (Euc. VI,

[2] Eudemo de Rodas discípulo de Aristóteles que disputó con Teofrasto el puesto de director del Liceo. En el año 320 a.C. hace referencia a Tales en su *Historia de las Matemáticas*. Este documento, que fue una historia completa de la geometría griega que cubría el período anterior a 335 a.C., se perdió y antes de que esto ocurriera, llegó a existir un resumen del mismo que posteriormente desapareció también.

[3] En el *Sumario de Eudemo* escrito por Proclo en el siglo V a.C., aparece un resumen con un *Comentario* sobre el Libro I de *Los Elementos de Euclides*.

4, o Euc. VI, 2). Diógenes Laertes, junto con Plinio y Plutarco apuntan que Tales hizo uso de esta propiedad cuando estaba en Egipto para encontrar la altura de la Gran Pirámide. Parece ser que el teorema era desconocido para los egipcios.

Algunos de estos resultados debían ser conocidos desde bastante antes; de algunos, solamente se dice que fueron enunciados por él; lo importante aquí es la creencia de que Tales usaba razonamientos lógicos para hacer ver que eran ciertos y no lo hacía por medio de la intuición, la experimentación y la comprobación repetida, como en esas épocas se había hecho. Lo hiciera Tales o no, lo que sí es cierto es que los Pitagóricos desarrollaban la matemática de una manera deductiva. Hay un quinto teorema que tradicionalmente se incorpora a la lista anterior y que dice:

5. *"El ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto."* (Euc. III, 31)

Actualmente se piensa que este teorema pudo tener su verdadero origen en Babilonia y posteriormente ser introducido por Tales en Grecia. Esta afirmación es considerada como uno de los mayores logros geométricos de Tales. Parece ser que pudo llegar a esta conclusión observando que las diagonales de un rectángulo son iguales, se bisecan, y que además éste siempre puede ser inscrito en una circunferencia. Por lo tanto aplicando el teorema 2, descubrió que la suma de ángulos, de un triángulo rectángulo es igual a dos ángulos rectos.

Parece improbable que Tales supiera trazar la perpendicular a una recta desde un punto, pero si así fuera, es posible que fuera consciente del siguiente teorema, como muchos investigadores modernos sugieren:

6. *"La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos."*

Pero también es posible demostrar el teorema 5, conociendo el 6. Tenemos aquí un caso de equivalencias de dos resultados. Si conocemos 5, podemos probar 6. Si sabemos 6, podemos probar 5. Si Tales demostró 5, ¿cómo lo hizo?, ¿habría usado 6?. Hay referencias de Eudemo a través de Proclo, que indican que 6 no sólo fue demostrado por los Pitagóricos, sino que incluso fue descubierto por ellos. Y por tanto se cree que Tales quizá demostró 5, a partir del conocimiento de 6, pero que no daba una demostración general; sólo aceptándolo como cierto a través de demostraciones de orden particular y de carácter más experimental e intuitivo, que las que ya aparecen en *Los Elementos de Euclides*.

Con respecto a los triángulos equiláteros y rectángulos, sabemos a través de Eudemo de Rodas, que los primeros geómetras demostraron la propiedad general de forma independiente para tres familias de triángulos. El área en torno a un punto puede ser completada mediante la unión de seis triángulos equiláteros, por lo tanto la proposición es verdadera para un triángulo equilátero. Nuevamente, tomados dos triángulos rectángulos cualesquiera, éstos pueden yuxtaponerse para formar un rectángulo, la suma de aquellos ángulos resulta cuatro ángulos rectos; por lo tanto la proposición es verdadera para un triángulo rectángulo. Por último cualquier triángulo puede dividirse en la suma de dos triángulos rectángulos trazando una perpendicular desde al ángulo mayor al lado opuesto a éste, y nuevamente se cumple la veracidad de la proposición.

Tales gozó de una gran fama entre sus contemporáneos como astrónomo y geómetra. Fue un enamorado de la astronomía, sobre la que escribió varios tratados. Una anécdota cuenta que durante un paseo nocturno, observaba con tal intensidad las estrellas que no se percató de que en el camino había una zanja y cayó en ella, a lo que una mujer mayor que pasaba por allí le espetó, *"¿Cómo puedes hablar sobre lo que ocurre en el cielo, cuando ni siquiera puedes ver lo que hay bajo tus pies?"* - anécdota comentada a menudo para ilustrar el carácter distraído de los filósofos.

Tales, detalle de sello griego (1994)

Sin entrar en demasiados detalles astronómicos, algunas historias cuentan también que Tales consideraba en su enseñanza que un año contenía sobre 365 días, y no doce meses de treinta días cada uno. Se cuenta que sus predecesores intercalaban ocasionalmente un mes para mantener a las estaciones sin desfase, así debieron darse cuenta de que el año contenía de media más de 360 días. Hay razones para considerar que Tales creía que la tierra era un cuerpo con forma de disco que flotaba en el agua. Tales conocía muy bien los métodos astronómicos babilónicos, por lo que según el historiador Herodoto, pudo haber sido capaz de predecir un eclipse de sol en el año 585 a.C, que impidió la guerra entre los pueblos *medo* y *lidio* en Asia Menor. Se cuenta que, cuando los ejércitos de ambos pueblos vieron el eclipse, atemorizados, lo interpretaron como un mal presagio e inmediatamente firmaron la paz. No se sabe si Tales en verdad predijo o no el eclipse, lo impresionante de la historia es que efectivamente el eclipse ocurrió el 28 de mayo del año 585 a.C[4], siendo éste uno de los primeros eventos históricos del cual se sabe la fecha exacta. Sus predicciones le proporcionaron un extraordinario prestigio como profesor y le reservaron un lugar entre los Siete Sabios de Grecia.

Tales murió en el año 547 a.C a la edad de 90 años. Según cuentan algunas fuentes, le gustaba asistir a eventos deportivos de toda clase, y ya anciano asistió como público a una competición gimnástica. Parece ser que aquel día

[4] Sobre este fenómeno, Herodoto de Halicarnaso (485-420 a.C.) escribió en *Historias*, I, 74:

"Tuvo lugar una guerra entre los lidios y los medos durante cinco años, en los que muchas veces los medos vencieron a los lidios y muchas los lidios a los medos. Dentro de ella incluso llevaron a cabo una batalla de noche: a ellos, que proseguían en condiciones de igualdad la guerra, en el sexto año, iniciado el combate, les aconteció que, trabada la batalla, el día de repente se hizo noche. Tales de Mileto había predicho a los jonios que sucedería esta mutación del día, habiendo propuesto como término el año ese en el que ciertamente tuvo lugar el cambio. Y los lidios y los medos, cuando vieron que se hacía de noche en lugar de día, pusieron fin a la batalla y de manera especial se apresuraron también ambos a que se hiciera la paz entre ellos. Y quienes los reconciliaron fueron estos: Siénesis, cilicio, y Labineto, babilonio. Estos fueron los que se esforzaron por que se produjera la alianza entre ellos, e hicieron un intercambio matrimonial: en efecto, decidieron que Alyattes entregara a su hija Aryenis a Astiages, el hijo de Ciaxares; pues sin un lazo fuerte unos tratados firmes no pueden mantenerse. Y, en cuanto a los pactos, hacen esos pueblos lo que los helenos y, además de esto, una vez que se cortan los brazos a nivel de la piel, chupan mutuamente la sangre."

el calor era insoportable y la muchedumbre se agolpaba para colocarse en un sitio óptimo para ver el evento. El anciano Tales no lo pudo soportar y murió de asfixia aplastado por el público.

No podemos cerrar esta pequeña biografía sobre Tales sin mostrar uno de sus resultados más conocido, que no es otro que el teorema que lleva su nombre, relativo a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.

2.2. El Teorema de Tales

El Teorema de Tales es una consecuencia importante de los Axiomas de incidencia, ordenación y métricos del plano[5]. Su importancia estriba en que es la base para definir las razones trigonométricas. Se basa en la idea de las proyecciones oblicuas. Para su enunciado y demostración necesitamos presentar previamente un resultado sobre proyecciones oblicuas.

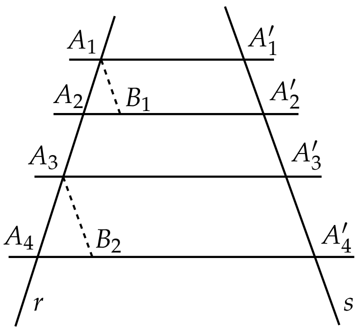
Teorema sobre proyecciones oblicuas.

"Sean dos rectas r y s y una dirección δ a la cual no pertenecen r y s. Si $A_1, A_2, A_3, A_4 \in r$ cumpliendo que $d(A_1, A_2) = d(A_3, A_4)$ y formamos $A_i' = P_{\delta,s}(A_i)$ las proyecciones de dichos puntos paralelamente a δ sobre la recta s entonces $d(A_1', A_2') = d(A_3', A_4')$."

Demostración. Distinguiremos dos casos en la demostración:

- r y s son paralelas.
  Entonces $A_1A_2A_2'A_1'$ forman un paralelogramo y entonces de este modo $d(A_1, A_2) = d(A_1', A_2')$. Análogamente $d(A_3, A_4) = d(A_3', A_4')$ y así se obtiene la igualdad.

- r y s no son paralelas.



Entonces la paralela a s desde A_1 corta A_2A_2' en B_1 y la paralela a s desde A_3 corta a A_4A_4' en B_2. Los triángulos $\triangle A_1A_2B_1$ y $\triangle A_3A_4B_2$ son iguales por tener un lado igual y los ángulos adyacentes comprendidos entre paralelas con lo que $d(A_1, B_1) = d(A_3, B_2)$. Pero ahora $A_1B_1A_2'A_1'$ y $A_3B_2A_4'A_3'$ son paralelogramos y razonando igual que antes se obtiene la identidad.

[5] Cabe destacar que los axiomas de geometría que hoy día se utilizan no son los originales que aparecen en *Los Elementos de Euclides*, sino unos más sofisticados que el matemático David Hilbert publicó en 1899 en su famosa obra *Los Fundamentos de la Geometría* y que trata la axiomatización y el tratamiento formal riguroso y desde una perspectiva moderna, de la geometría euclídea. La diferencia fundamental de estos Axiomas con los de Euclides estriba en que Hilbert no define los conceptos de punto y recta sino que estos se suponen existentes.

ISSN 2174-0410

La idea de este Teorema es que la igualdad de longitudes se mantiene mediante proyecciones oblicuas. Teniendo en cuenta esta propiedad se puede enunciar entonces el Teorema de Tales.

Teorema de Tales.

"Sean dos rectas r y s y una dirección δ a la cual no pertenecen r y s. Tomamos tres puntos distintos A, B, $C \in r$ y llamamos A', B', C' a sus proyecciones paralelamente a δ sobre la recta s. Entonces se tiene que:

$$\frac{d(A,B)}{d(B,C)} = \frac{d(A',B')}{d(B',C')}\text{''}$$

Demostración. Distinguiremos dos casos en la demostración:

- $\dfrac{d(A,B)}{d(B,C)} = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$.

  En este caso dividimos el segmento $[A,B]$ en n partes iguales de longitud l, $[A,A_1], \ldots, [A_{n-1},B]$ y el segmento $[B,C]$ en m partes iguales de longitud l, $[B,B_1], \ldots, [B_{m-1},C]$. Calculamos ahora las proyecciones de los puntos de división sobre la recta s y los denotamos por $A'_1, \ldots, A'_{n-1}, B'_1, \ldots, B'_{m-1}$. Por el Teorema sobre proyecciones oblicuas se tiene que los segmentos que definen estos puntos tienen la misma longitud, l', y de aquí se obtiene la igualdad pedida.

- $\dfrac{d(A,B)}{d(B,C)} = \notin \mathbb{Q}$.

  Supongamos que $\dfrac{d(A,B)}{d(B,C)} \neq \dfrac{d(A',B')}{d(B',C')}$ con lo cual existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

  $$\left| \frac{d(A,B)}{d(B,C)} - \frac{d(A',B')}{d(B',C')} \right| > \frac{1}{m}$$

  Como $\dfrac{d(A,B)}{d(B,C)} \notin \mathbb{Q}$ se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ cumpliendo que:

  $$\frac{n}{m} < \frac{d(A,B)}{d(B,C)} < \frac{n+1}{m}$$

  y además existirán $A_1, A_2 \in r$ cumpliendo que $A \in [A_1, A_2]$ y

  $$\frac{n}{m} = \frac{d(A_1,B)}{d(B,C)}; \qquad \frac{n+1}{m} = \frac{d(A_2,B)}{d(B,C)}$$

  Si denotamos por A'_1, A'_2 a las proyecciones de A_1, A_2 sobre la recta s, por el caso anterior se tiene que

  $$\frac{n}{m} = \frac{d(A'_1,B')}{d(B',C')}; \qquad \frac{n+1}{m} = \frac{d(A'_2,B)}{d(B',C')}$$

ISSN 2174-0410

y aplicando el Axioma IIb[6] de orden, obtenemos que $A' \in [A'_1, A'_2]$ con lo que

$$\frac{n}{m} < \frac{d(A',B')}{d(B',C')} < \frac{n+1}{m}$$

de donde se deduce que

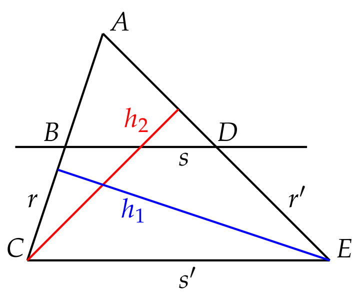
$$\left|\frac{d(A,B)}{d(B,C)} - \frac{d(A',B')}{d(B',C')}\right| < \frac{1}{m}$$

Lo que resulta absurdo o contradictorio, por lo que se debe cumplir la igualdad

$$\frac{d(A,B)}{d(B,C)} = \frac{d(A',B')}{d(B',C')}$$

Una versión reducida de este Teorema se utiliza para establecer relaciones de semejanza en triángulos, tal y como muestra la siguiente demostración del mismo.

Demostración. Sean dos rectas cualesquiera r y r' que se cortan en un punto A, y que son cortadas a su vez por dos rectas paralelas s y s' en los puntos B, C, D y E, según muestra la figura. Los triángulos $\triangle CDE$ y $\triangle CBE$ tienen el mismo área, ya que ambos tienen la misma base y altura. Por lo tanto el área del triángulo $\triangle ABE$ es igual al área del triángulo $\triangle ACD$. Se cumple entonces:



$$\text{Área } \ ABE = AB \cdot \frac{h_1}{2} = AD \cdot \frac{h_2}{2} = \text{Área } \ ACD \qquad (1)$$

$$\text{Área } \ BCE = BC \cdot \frac{h_1}{2} = DE \cdot \frac{h_2}{2} = \text{Área } \ DCE \qquad (2)$$

y dividiendo (1) entre (2) resulta:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

2.3. Anaximandro de Mileto

Anaximandro nació en el año 611 a.C. y murió en el 545 a.C., sucediendo a Tales como principal representante de la Escuela de Mileto. Según Suidas, escribió un tratado de geometría, donde prestó especial interés por las propiedades de las esferas, y las ideas filosóficas de la concepción del espacio infinito y el tiempo. Se le atribuye la escritura de un único libro sobre la naturaleza, pero su palabra llega a la actualidad mediante comentarios doxográficos de otros autores. Construyó mapas terrestres y cartas celestes.

[6] *"Sean dos rectas paralelas $R||S$ y dos pares de puntos r, r' pertenecientes a la recta R y s, s' pertenecientes a S. Si T es una recta paralela a R y S que corta a la recta $[r,s]$, entonces también corta a la recta $[r',s']$".* Este axioma permite trasladar las nociones de orden de una recta a otra.

Se le atribuye la introducción del uso del *gnomon* o *estilo* en Grecia, y la medición de los solsticios y equinoccios, trabajos para determinar la distancia y tamaño de las estrellas y la afirmación de que la Tierra es cilíndrica y ocupa el centro del Universo. El *gnomon* o *estilo* se define como el objeto alargado que arroja sombra, independientemente del ángulo que forme con el cuadrante; estará inclinado respecto al plano horizontal con un ángulo igual a la latitud del lugar donde se sitúe el reloj de sol, y varía según los distintos tipos de relojes (ecuatoriales, declinantes, etc.) En el hemisferio norte, el caso más sencillo, la arista que proyecta la sombra está orientada hacia el norte, quedando paralela al eje de rotación de la Tierra.

Anaximandro detalle de "La Escuela de Atenas" de Rafael Sanzio (1512-1514)

2.4. El "ocaso" de la Escuela Jónica

Entre los principales discípulos de Tales cabe destacar a Anaximandro y Anaxímenes, que estudiaron fundamentalmente astronomía y filosofía física, o Anaxágoras (discípulo de Anaxímenes), Mamerco y Mandriato (de estos dos últimos poco se conoce).

De *Anaxágoras de Clazomene* (500-428 a.C.) se sabe que fue el último filósofo de la Escuela Jónica, aunque se dedicó a estudiar también problemas de matemática. Nació en Clazomene (en la actual Turquía) y se trasladó a Atenas (hacia 483 a.C.), debido a la destrucción y reubicación de Clazomene tras el fracaso de la revuelta jónica contra el dominio de Persia. Fue el primer pensador extranjero en establecerse en Atenas. Entre sus alumnos se encontraban el estadista griego Pericles, Arquelao, Protágoras de Abdera, Tucídides, el dramaturgo griego Eurípides, y se dice que también Demócrito y Sócrates, y fue conocedor de las doctrinas de Anaxímenes, Parménides, Zenón y Empédocles. Anaxágoras representaba la motivación típica griega, el deseo de conocer. Plutarco cuenta que Anaxágoras fue encarcelado en Atenas por impiedad, al afirmar que el sol no era una deidad, sino una gigantesca piedra al rojo, tan grande por lo menos como el Peloponeso, y que la luna no era más que una tierra deshabitada que recibía y reflejaba la luz del sol. Este último razonamiento muestra sin duda alguna el espíritu de investigación racional heredado de la antigua tradición jónica fundada por Tales. Mientras se encontraba en prisión, se ocupó del problema de la cuadratura del círculo[7], sin embargo no dio solución alguna al

Anaxágoras, detalle de fresco de Eduard Lebiedzki en la Universidad de Atenas (1888)

[7] La primera referencia histórica que se tiene de este problema apareció en la obra *Pájaros* del poeta Aristófanes, en el año 414 a.C.

ISSN 2174-0410

problema. Es la primera vez que se tiene constancia del estudio de este famoso problema que se encargaría de fascinar a los matemáticos más de 2000 años. Tras este suceso, marchó exiliado a Jonia y se estableció en Lámpsaco (una colonia de Mileto), donde, según dicen, se dejó morir de hambre.

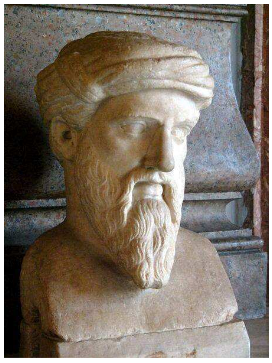
Poco más puede comentarse sobre los sucesores de Tales. La escuela continuó en plena actividad aproximadamente hasta el año 400 a.C., debido a que multitud de sus miembros centraron su interés fundamentalmente hacia temas filosóficos en detrimento de asuntos matemáticos. Se sabe muy poco acerca de los matemáticos que formaron esta escuela, pero según parece eran fervientes devotos de la astronomía. Los Jónicos ejercieron una gran influencia en el desarrollo ulterior de las matemáticas, que llegaron a su apogeo con los Pitagóricos, quienes no sólo desarrollaron en gran medida la geometría, sino que sentarían las bases de la ciencia de los números, o lo que actualmente se denomina Teoría de Números. Si Tales fue el primero que centró su atención en la geometría, citando a Eudemo, Proclo comenta:

> *"Pitágoras, que vino después de él (Tales), transformó esta ciencia en una forma de enseñanza liberal, examinando sus principios desde el comienzo y demostrando los teoremas de una manera inmaterial e intelectual. Así descubrió la teoría de proporciones y la construcción de las figuras cósmicas."*

3. La Escuela Pitagórica

3.1. Pitágoras de Samos

Pitágoras nació en Samos, una de las islas del Dodecaneso próxima a Mileto, sobre el 569 a.C., donde su padre Mnesarco, un rico comerciante fenicio, parece ser que joyero de profesión, obtuvo la ciudadanía por los servicios prestados a sus habitantes durante la época de carestía que Samos había padecido años antes. Acompañado de su mujer griega Pitia, Mnesarco viajaba frecuentemente por motivos comerciales y llegaron a Tiro[8] sobre el 569 a.C., donde nació Pitágoras.



Pitágoras de Samos

Se sabe que a la edad de 18 años, participó en los juegos olímpicos y ganó todas las competiciones del pugilato. Al parecer, a esa edad, Pitágoras abandonó secretamente Samos rumbo a la isla de Lesbos donde su tío le recibió con gran hospitalidad. La razón de este abandono fue debido a que no podía soportar por más tiempo la brutalidad de su gobernante Polícrates *"El Tirano"*, conocido tanto por su astucia como por su crueldad que había consolidado su poder a través de un golpe de estado. En Lesbos, Pitágoras recibió durante dos años una extraordinaria enseñanza del maestro filósofo griego presocrático Ferécides de Siria, de Tales de Mileto (que ya contaba en el año

[8] Ciudad situada al sur del Líbano, a 21 kilómetros de Israel. Se llama hoy Sur (o Sour)

549 a.C., con noventa años de edad), y de Anaximandro de Mileto, con quienes estudió fundamentalmente astronomía, física y matemáticas.

De Tales se sabe que tomó prestados varios de los resultados obtenidos por su maestro, como el año solar egipcio; Pitágoras sabía como predecir eclipses solares y lunares, y determinar la altura de una pirámide a partir de la sombra arrojada por ésta. De Anaximandro se sabe que Pitágoras aprendió como determinar la altitud solar.

Tales recomendó al joven aprendiz que se dirigiera a Tebas, en Egipto, donde podría satisfacer su sed de conocimiento. Previamente Pitágoras se pasó un año preparándose para este viaje en el colegio sacerdotal fenicio de Sidón. Tras ese año de preparación, llegó a Egipto en el 547 a.C.

Tras un tiempo de preparación en Tebas se dirigió a Menfis donde pasó 21 años. Durante estos años dedicados enteramente al estudio, Pitágoras absorbió todos los conocimientos posibles, llegando a finalizar sus estudios con los más altos honores en la escuela sacerdotal.

En el 526 a.C. el rey egipcio Amasis murió; al siguiente año durante el reinado de Psammenit, hijo de Amasis, el rey persa Kambis invadió Egipto y descargó toda su furia contra la escuela sacerdotal en particular. Una gran cantidad de sus miembros fueron hechos presos, entre ellos el propio Pitágoras, y llevados a Babilonia, el centro comercial del mundo conocido, en el Asia Menor. Pero este aparentemente desafortunado acontecimiento sirvió a Pitágoras para entrar en contacto con diferentes culturas como los Bactrianos (pobladores de Bactria, hoy Afganistán), Chinos, Indios o Judíos, y adquirir gran cantidad de los conocimientos de estos, durante 12 años.

Pitágoras fue liberado y regresó a su ciudad natal con la edad de 56 años. Tras una breve estancia en la isla de Delos, donde se encontró con su maestro Ferécides aún vivo, pasó allí un año con el propósito de familiarizarse de nuevo con la religión, la ciencia y las costumbres sociales de entonces.

Ya en Samos comenzó a impartir clases sin mucho éxito, lo que le obligó a emigrar a Sicilia con su madre y con un único discípulo Eratocles. De allí fueron a Tarento, de donde se mudaron a Crotona, una colonia dórica del sur de Italia, en una época bastante turbulenta, debido a continuas revueltas sociales, como la insurrección que estalló en la ciudad vecina de Síbari. En Crotona llevó a cabo con gran éxito la apertura de varias escuelas, a las que asistía público muy entusiasta, ciudadanos de todos los estratos sociales, pero sobre todo de las clases más privilegiadas, e incluso mujeres rompiendo la ley que establecía la prohibición de que pudieran asistir a reuniones en público.

Pitágoras detalle de "La Escuela de Atenas" de Rafael Sanzio (1512-1514)

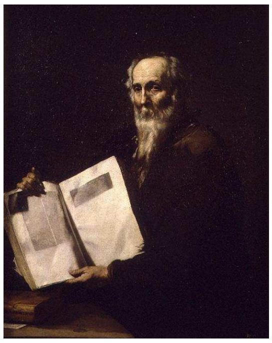
La orden pitagórica se regía por un estricto código de conducta pero era igualitaria e incluía a varias mujeres. Entre el público femenino ha de destacarse a Teano, la joven y bella hija de Milón, hombre rico y famoso puesto que había ganado doce veces los juegos olímpicos. Milón estaba interesado en la filosofía y las matemáticas, y

ISSN 2174-0410

cedió parte de su casa a Pitágoras con el fin de que crease su propia escuela. Pitágoras se casó con Teano a pesar de la disparidad de sus edades. Teano escribió una biografía de su marido, pero desafortunadamente se perdió y no tenemos constancia alguna de esta obra.

Cuando la escuela pitagórica se encontraba en su mayor esplendor, Hipaso, quien había sido expulsado de la orden por revelar algunos de los conocimientos de la misma, y que lideraba el partido democrático de Crotona que representaba una corriente en contra de la ortodoxia y los valores conservadores que caracterizaban la orden pitagórica, llevó a cabo acusaciones infundadas contra sus antiguos compañeros. La escuela fue disuelta, y las propiedades de la orden fueron confiscadas y Pitágoras mandado al exilio.

Pitágoras vivió en Tarento, pero también allí el partido democrático se alzó con el poder, y Pitágoras fue expulsado a Metaponto donde alargó su pobre existencia y murió hacia el 500 a.C. Allí se produjo una revuelta liderada por miembros del recién llegado al poder partido democrático. Estos rodearon la casa donde se reunían los pitagóricos, taparon las salidas y le prendieron fuego. Muchos de los discípulos murieron. Los supervivientes huyeron y este triste hecho sirvió para que algunos de ellos como Filolao de Tarento les fuera encargada la tarea de divulgar los conocimientos de la hermandad, constituyendo entre otros el germen de la Academia de Platón.



Pitágoras de José Ribera "el Españoleto" (1640)

3.2. Los Pitagóricos

Pitágoras diferenció a aquellos que asistían a sus enseñanzas en dos clases, los que podríamos clasificar como principiantes, llamados *acusmáticos* (auditores) a los que sólo se les trasmitían los resultados y cuyos temas principales de estudio eran la ética, la inmortalidad del alma y la transmigración de la misma o mentempsicosis, y los *matemáticos* (conocedores) a los que se les trasmitían los resultados y las demostraciones. El hecho de que tan pocos datos acerca de la vida y obra de Pitágoras hayan llegado hasta nosotros, se debe fundamentalmente a la pérdida de documentos sobre él que se ha producido a lo largo de la historia, porque aunque se sabe que se escribieron varias biografías, incluida una del propio Aristóteles, todas ellas se perdieron. Además a este hecho se le une la dificultad que tenemos para identificar claramente la figura de Pitágoras, ya que la orden fundada por él tenía un carácter fundamentalmente comunal y secreto; tanto los conocimientos como las propiedades eran mantenidos en un régimen de comunidad, y por lo tanto no se podía atribuir un descubrimiento a ningún miembro en concreto de la escuela. Todos los miembros mantenían las mismas creencias políticas conservadoras y filosóficas, compartían los mismos propósitos, con un código de conducta muy estricto, y tenían el compromiso de no revelar los secretos de la escuela bajo pena de muerte; a los miembros de la secta se les imponía un estricto régimen vegetariano, parece ser porque los pitagóricos aceptaban la doctrina de la metempsicosis o de la transmigración de las almas, con el resultado de que no debería ser sacrificado

ISSN 2174-0410

ningún animal ante el temor de que pudiera ser la nueva morada del alma de un amigo muerto; entre otros tabús de la escuela estaba la prohibición de comer judías (o quizás más exactamente, lentejas); su disciplina era severa, y su modo de vida estaba gobernado por el autocontrol, la abstinencia, la pureza y la obediencia. Esta estricta disciplina y el secretismo de su organización le otorgaron a la secta de los pitagóricos una supremacía, que hizo que otras clases privilegiadas se sintieran amenazadas; y finalmente, instigados por los rivales políticos de Pitágoras, la mayoría de sus seguidores fueron asesinados.

Aunque la influencia de los Pitagóricos sobre la política fue destruida con el asesinato de la mayoría de sus miembros, parece que los pocos que quedaron se reagruparon en torno a una sociedad filosófica y matemática, considerando Tarento como su centro de operaciones y continuaron aún con sus actividades durante más de cien años.

Probablemente la característica más notable de la orden pitagórica era su enorme dedicación al estudio de la filosofía y las matemáticas, hasta el punto de asumir a estas como base moral para la dirección de su vida. Parece ser que las propias palabras "filosofía" (o "amor a la sabiduría") y "matemáticas" (o "aquello que se aprende") fueron términos acuñados por el propio Pitágoras para describir actividades intelectuales.

Pitágoras no publicó libro alguno; es asumido que todo el conocimiento y los logros a los que llegó esta escuela fueron desarrollados de forma común por los integrantes de la sociedad y vetados al mundo exterior. Era tal la devoción que los pitagóricos sentían por sus principios que casi rozaban el fundamentalismo religioso. Como ejemplo de este hecho, parece ser que en torno al año 470 a.C., Hipaso de Metaponto, miembro de la orden, rompió el voto de silencio que los pitagóricos habían impuesto a sus miembros, revelando al mundo parte de los conocimientos de la orden, como la existencia del dodecaedro[9] como uno de los sólidos regulares enunciado por Pitágoras, o los llamados *inconmesurables* (irracionales). Este hecho hizo que fuera expulsado de manera inmediata y que los pitagóricos erigieran metafóricamente una tumba con su nombre, mostrando así que para ellos, él estaba muerto. La sociedad pitagórica fue perdiendo adeptos y los estrictos compromisos fueron abandonados gradualmente, y los logros y sus doctrinas fueron plasmados en libros. El primer libro (que se conozca) que recoge parte de la naturaleza de los conocimientos pitagóricos se escribió por Filolao de Crotona en torno al año 370 a.C., y se dice que Platón mantuvo en su poder una copia del mismo. Podemos decir sin lugar a equívocos que durante la primera mitad del siglo V a.C., los Pitagóricos fueron la punta de lanza en cuanto avances científicos con respecto a sus contemporáneos, pero al final todos sus descubrimientos, y sus conocimientos fueron revelados al mundo, lo que hizo que Atenas adquiriera el privilegio de erigirse como el centro de la nueva actividad intelectual.

Aunque es imposible separar de forma precisa a quien correspondió cada uno de los logros intelectuales de los Pitagóricos debido fundamentalmente al carácter comunitario e impermeable de la orden, sabemos según Proclo que fue Pitágoras quien le dio a la geometría un carácter deductivo riguroso que se ha

[9] En el Libro XIII de *Los Elementos de Euclides* aparece un comentario que dice que los pitagóricos sólo conocían tres de los poliedros regulares: el tetraedro, el cubo y el dodecaedro.

ISSN 2174-0410

mantenido hasta nuestros días y ha servido de cimiento de una enseñanza liberal. Por esta razón debemos considerar que Pitágoras fue el primer matemático capaz de elaborar un pensamiento deductivo presentando las principales proposiciones de una disciplina con un orden lógico. De acuerdo a Aristóxeno de Tarento, la gloria de la escuela pitagórica reside en el hecho de que fueron capaces de elevar a la aritmética por encima de las necesidades de los mercaderes.

Los Pitagóricos dividieron las matemáticas en cuatro grandes ramas, los números absolutos o aritmética, números aplicados o música, estática o geometría y dinámica o astronomía. Este *"cuadrivium"* fue considerado durante mucho tiempo la base de sus doctrinas de una enseñanza liberal.

3.3. La Aritmética Pitagórica

A diferencia de lo que ocurría en otras culturas, en Grecia la palabra *número* se usaba sólo para los números enteros positivos. En Egipto el dominio numérico incluía los números naturales y las fracciones unitarias, y entre los babilonios había incluido el campo de todas las fracciones racionales. En Grecia, las fracciones no eran consideradas un ente propio, sino una razón o relación entre dos números enteros, y así la matemática griega de los primeros tiempos, se aproximaba en cuanto a su concepción más a la matemática "moderna" de hoy, que a la aritmética tradicional.

Los Pitagóricos otorgaron a los números un papel fundamental, hasta el punto de que su lema era *"Todo es número"*. Se les debe la distinción entre la *aritmética* como ciencia o teoría de números y la *logística* como arte o práctica de cálculo, separando netamente los números abstractos, esencia de las cosas, de las cantidades concretas, que el hombre maneja en sus transacciones comerciales y en los menesteres ordinarios de la vida. Llevaron a cabo una clasificación de los números en vista de sus propiedades aritméticas, en pares e impares, perfectos, amigos, primos, etc. Según Aristóxeno:

> *"Pitágoras honró a la Aritmética más que ningún otro. Hizo grandes avances en ella, sacándola de los cálculos prácticos de los comerciantes y tratando todas las cosas como números."*

La definición de *números pares e impares* aparecen en las Proposiciones 6 y 7 del Libro VII de *Los Elementos de Euclides*. Los números pares e impares se subdividen en cuatro clases (Proposiciones 8 a 10 del Libro VII de *Los Elementos de Euclides*):

1. Parmente par (*Paritèr par*): cuando su mitad es también par (son de la forma $2^n \cdot [2k+1]$, $n > 1$).
2. Impartemente par (*Imparitèr par*): cuando su mitad es impar (son de la forma $2 \cdot [2k+1]$, $k > 1$).
3. Parmente impar (*Paritèr impar*): cuando al ser dividido por un número impar da uno par (son de la forma $2^n \cdot [2k+1]$, $n \geq 1$).

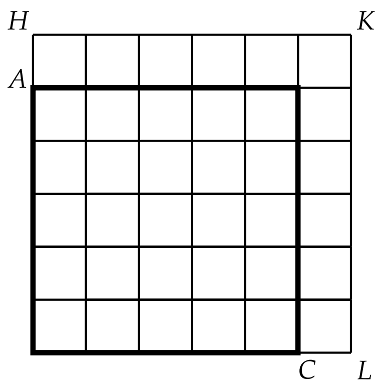
4. Imparmente impar (*Imparitèr impar*): cuando no tiene más que divisores impares.

Los conceptos *"es divisor de"* y *"es múltipo de"* aparecen en el Libro VII de *Los Elementos de Euclides*, Proposiciones 3 y 5 respectivamente.

La definición de *"números primos"* y *"números compuestos"* aparecen en el Libro VII de *Los Elementos de Euclides*, Proposiciones 11 y 13 respectivamente.

Un *número lineal*, es el que no tiene divisores (es decir, los primos). Un *número plano*, es el producto de dos números que son sus lados (*Euclides*, D.VII.16). Un *número sólido* es el producto de tres números que son sus lados (*Euclides*, D.VII.17). Un *número cuadrado* es el producto de un número por sí mismo (*Euclides*, D.VII.18). Un *número cúbico* es el producto de un número por sí mismo dos veces (*Euclides*, D.VII.19). Un *número deficiente* es un número que es menor que la suma de sus partes alícuotas[10]. Un *número abundante* es un número que es mayor que la suma de sus partes alícuotas. Un *número perfecto* es un número que es igual que la suma de sus partes alícuotas. Los *números amigos* son números en los cuales cada uno es igual a la suma de los divisores del otro.

Parece ser que Pitágoras comenzaba su enseñanza de aritmética clasificando a los números en pares e impares, estos últimos denominados *gnomones*. Un número impar (de la forma $2n+1$) era resultado de la diferencia dos números cuadrados $(n+1)^2$ y n^2; y la suma de los gnomones desde 1 a $2n+1$ resulta ser un *número cuadrado*, cuya raíz cuadrada se denominó *lado*. El producto de dos números se denominó *plano*, y si un producto no tenía una raíz cuadrada exacta se le denominaba *oblongo*. El producto de tres números se le denominó *número sólido*, y si los tres números eran iguales se le llamó *cubo*. Se puede observar la fuerte interconexión con la geometría. En la figura siguiente se considera que n es igual a 5, el gnomón AKC (que contiene 11 pequeños cuadrados) colocado alrededor del cuadrado AC (que contiene 5^2 pequeños cuadrados) hace un cuadrado HL (que contiene 6^2 pequeños cuadrados). Es posible que varios de los teoremas de números de matemáticos griegos fueran descubiertos y demostrados mediante un método análogo: el ábaco puede ser utilizado en muchas de estas demostraciones.

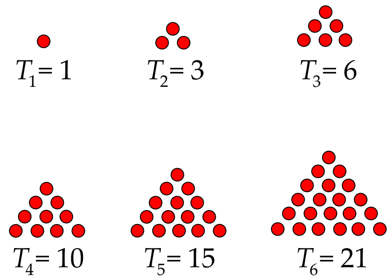


Los números de la forma $(2n^2+2n+1)$, $(2n^2+2n)$, y $(2n+1)$ poseían una

[10] proporcionales.

importancia especial ya que representaban la hipotenusa y dos lados (o catetos) de un triángulo rectángulo: Cantor consideró que Pitágoras conocía este hecho antes incluso de que Euclides descubriera la proposición geométrica de la Proposición 47 del Libro I de *Los Elementos de Euclides*. Una expresión más general para tales números es (m^2+n^2), $2mn$, y (m^2-n^2), o sus múltiplos, que resultan ser terna solución de la ecuación[11] pitagórica $x^2+y^2=z^2$. Debe observarse que el resultado obtenido por Pitágoras puede ser deducido de estas expresiones asumiendo que $m=n+1$; más tarde Arquitas de Tarento y Platón dieron reglas equivalentes a tomar $n=1$; Diofanto conocía las expresiones generales.

A Pitágoras se le conoce también por los *números triangulares*. Los números figurados o de mayor orden fueron introducidos por miembros posteriores de la sociedad pitagórica. Un número triangular es aquel que puede recomponerse en la forma de un triángulo equilátero (por convención, el primer número triangular es el 1). De este modo el segundo número triangular es el 3, el tercero el 6, el cuarto corresponde al



Números Triangulares

[11] Se llama *terna pitagórica* a toda terna de números (x, y, z) que satisface la ecuación pitagórica $x^2+y^2=z^2$; si además, $mcd(x, y, z)=1$, es decir son primos entre sí, dicha terna se denomina *primitiva*.

Proposición. Las soluciones de la ecuación $x^2+y^2=z^2$, con $x, y, z>0$, x par, $mcd(x, y, z)=1$ son $x=2st$, $y=s^2-t^2$, $z=s^2+t^2$, donde $s>t$, s y t tienen distinta paridad y $mcd(s, t)=1$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea (x, y, z) una terna pitagórica primitiva; entonces x e y tienen distinta paridad pues

- Si $x=2p$, $y=2q$, resulta
$$z^2=4p^2+4q^2=(2s')^2$$
luego $mcd(x, y, z)\neq 1$.
- Si $x=2p+1$, $y=2q+1$, resulta
$$z^2=(2p+1)^2+(2q+1)^2=4s'+2$$
lo cual no es posible porque todo cuadrado es de la forma $4k$ o $4k+1$.

Por consiguiente, supongamos x par e y impar, en consecuencia, z es impar. De aquí $z-y$ y $z+y$ son pares, esto es, $z-y=2p$ y $z+y=2q$. Así
$$x^2=z^2-y^2=4pq\Rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^2=pq$$

Además, $mcd(p, q)=1$; de lo contrario, existe $d\neq 1$ tal que $d|p$ y $d|q$ (d es divisor de p y q), lo que conlleva que $d|(q-p)=y$, $d|(p+q)=z$, y también $d|x^2$. Por otro lado, o bien d es primo, luego $d|x$ y esto no es posible ya que $mcd(x, y, z)=1$, o bien d contiene un factor primo, lo que conduce a la misma conclusión.

En definitiva, pq es un cuadrado y $mcd(p, q)=1$, luego necesariamente $p=t^2$ y $q=s^2$; por consiguiente, resulta $x=2st$, $y=q-p=s^2-t^2$, $z=q+p=s^2+t^2$.

Además $mcd(s, t)=1$, ya que $mcd(p, q)=1$; $s>t$, según se deduce de $z=2q>2p=y$; s y t tienen distinta paridad, pues de lo contrario sería par y también x, lo que no es posible.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, en las condiciones dadas, se verifica
$$z^2=(s^2+t^2)^2=s^4+t^4+2s^2t^2+(s^2-t^2)^2=x^2+y^2$$

Además, la terna pitagórica es primitiva, ya que $mcd(x, y, z)=d=1$; de lo contrario, si d contiene un factor primo p, entonces $p|z$, siendo z impar, $p\neq 2$.

Por lo tanto, $p|(z+y)=2s^2$ y $p|(z-y)=2t^2$ y como $p\neq 2$, entonces $p|t^2$ y $p|s^2$, y al ser p primo, también $p|t$ y $p|s$ lo que contradice el hecho de que $mcd(s, t)=1$.

ISSN 2174-0410

10....Si observamos en la figura de la derecha, la fila más inferior contiene n elementos, y cada una de las filas superiores tienen un elemento menos a medida que vamos subiendo de fila. De este modo los números triangulares resultarán ser la suma de la serie

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

y por lo tanto tendrán la expresión general de la forma:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Con respecto a los números triangulares existe un teorema que dice que la suma de un numero triangular y su inmediatamente anterior es un cuadrado perfecto, o haciendo uso de la terminología pitagórica es un número cuadrado. La demostración es sencilla. Dados

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

sumando:

$$T_n + T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \;\; q.e.d$$

La suma de dos números triangulares iguales nos da un *número oblongo*[12];

$$T_n + T_n = 2T_n = 2\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 2T_n = n(n+1)$$

Por lo tanto el número triangular correspondiente a 4 es 10. Sobre este hecho existe una anécdota que comenta que en cierta ocasión un mercader le preguntó a Pitágoras qué le podía enseñar. Pitágoras le replicó *"Te enseñaré a contar"* y el mercader le contestó *"Ya sé contar"*; Pitágoras le preguntó *"¿Cómo cuentas?"*, y el mercader le respondió *"Uno, dos, tres, cuatro"* entonces Pitágoras le interrumpió y le dijo *"Para. Lo que consideras cuatro es diez, un triángulo perfecto, y uno de nuestros símbolos"*.

También se atribuye a los pitagóricos el conocimiento de las tres medias: aritmética, geométrica y armónica. Esta última designación es una reminiscencia pitagórica que ha llegado hasta nuestros días, proviene de que las razones que caracterizan la octava, la quinta y la cuarta musicales pueden formarse con la terna 6, 8, 12 que constituye una terna en progresión armónica. Si consideramos que c y h son las medias aritmética y armónica de los números a y b respectivamente, entonces:

$$c - a = b - c$$

$$\frac{(h-a)}{a} = \frac{(b-h)}{b} \Rightarrow c = \frac{1}{2}(a+b)\;;\;\; h = \frac{2ab}{(a+b)}$$

[12] Resultan de la suma de una sucesión de números pares de la forma $2+4+6+8+\ldots+2n = n(n+1)$, cada uno de los cuales es el doble de un número triangular.

ISSN 2174-0410

Por otra parte, se atribuye a los pitagóricos la llamada *proporción musical* que parece ser que pudiera haber sido introducida desde Babilonia por Pitágoras, que expresa

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{b}$$

es decir que la media geométrica de dos números es la media geométrica de sus medias aritmética y armónica. Parece ser que Pitágoras quedó impresionado al descubrir ciertas relaciones numéricas que ocurrían en fenómenos naturales. De hecho se le atribuye por ejemplo el haberse dado cuenta por primera vez de que si las longitudes de las cuerdas vibrantes se pueden expresar como razones de números enteros sencillos, tales como la de dos a tres (para la quinta) o como la de tres a cuatro (para la cuarta), entonces los tonos producidos serán armoniosos. Dicho de otro modo, si una cuerda emite la nota C al ser tañida, entonces una cuerda análoga de longitud doble emitirá la nota C una octava más baja, y los tonos entre estas dos notas los emitirán cuerdas cuyas longitudes vengan dadas por razones intermedias: 16:9 para la D, 8:5 para la E, 3:2 para la F, 4:3 para la G, 6:5 para la A y 16:15 para la B, en orden ascendente.

Parece ser también que Pitágoras consideró que las distancias de los planetas a la tierra se encontraban en progresión musical, y que los cuerpos celestes y su movimiento por el espacio producían sonidos armónicos, de ahí la célebre frase *"la armonía de las esferas"*. Todas estas conclusiones parece que le sugirieron que una explicación al orden y la armonía del universo debía ser encontrada en los números, de ahí que los Pitagóricos les dieran tal importancia.

Tras la muerte de Pitágoras varios miembros de la sociedad pitagórica se encargaron de continuar con sus enseñanzas, entre ellos Epicarmo de Metaponto, y más tarde Filolao de Crotona, Arquipo y Lysis. Un siglo después de la muerte de Pitágoras, Arquitas de Tarento tomó el testigo como principal líder de la sociedad pitagórica.

3.4. El Teorema de Pitágoras y la Ecuación Pitagórica

Es reconocido que varias culturas antiguas como los babilonios ya conocían el "Teorema de Pitágoras", que aplicaron a multitud de problemas de carácter práctico, y tenían conocimiento de las "Ternas Pitagóricas", es decir, la solución en números enteros de la llamada "Ecuación Pitagórica" $x^2 + y^2 = z^2$, y que ya habían utilizado por ejemplo los egipcios para resolver el problema que suponía volver a replantear las parcelas de los agricultores después de las crecidas del Nilo[13].

Parece ser que el "Teorema de Pitágoras" y su interpretación geométrica tal y como actualmente lo conocemos no fue desarrollado por ningún miembro de la orden. Sin embargo, la aplicación y demostración del teorema y su recíproco, aparecen en el Libro I de *Los Elementos de Euclides* (Proposiciones 47 y 48). En

[13] 1500 años antes a la época de Pitágoras, los egipcios ya sabían que si con una cuerda hacían 3, 4, y 5 nudos equidistantes unos de otros, formaban un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 e hipotenusa 5, lo que les era tremendamente útil a la hora de realizar sus replanteos topográficos y reparcelar los terrenos que habían sido inundados tras las crecidas del Nilo.

cuanto a la ecuación pitagórica se atribuye a la escuela la solución particular:

$$x = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)$$

$$y = n$$

$$z = \tfrac{1}{2}(n^2 + 1)$$

con n impar, solución que probablemente dedujeron de la propiedad conocida de que todo número impar es diferencia de dos números cuadrados, de manera que si, a su vez, ese impar es un cuadrado, queda satisfecha la ecuación. Posteriormente otros autores obtuvieron otros métodos para resolver con "números"[14] la ecuación pitagórica.

1. *Método de Platón*. Sea m cualquier número par divisible por 4; entonces m, $\frac{m^2}{4} - 1$, y $\frac{m^2}{4} + 1$ son las tres soluciones para obtener los números que cumplen la ecuación pitagórica. Basta demostrar que:

$$m^2 + \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)^2 = m^2 + \frac{m^4}{16} - \frac{m^2}{2} + 1 = \frac{m^4}{16} + \frac{m^2}{2} + 1 = \left(\frac{m^2}{4} + 1\right)^2$$

2. *Método de Euclides*. Sean x e y dos números pares o impares cualesquiera, tales que x e y no tienen factores comunes mayores que 2, y xy es un cuadrado. Entonces $\sqrt{xy}$, $\frac{x-y}{2}$, y $\frac{x+y}{2}$ son las soluciones para obtener los números que cumplen la ecuación pitagórica. Basta demostrar que:

$$(\sqrt{xy})^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

3. *Método de Maseres* (1721-1824). Sean m y n dos números pares o impares cualesquiera, tales que $m > n$, y $\frac{m^2+n^2}{2n}$ sea un número entero. Entonces m^2, $\frac{m^2-n^2}{2n}$ y $\frac{m^2+n^2}{2n}$ son las soluciones para obtener los números que cumplen la ecuación pitagórica. Basta demostrar que:

$$m^2 + \frac{m^2-n^2}{2n} = \frac{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2 + n^2 + n^4}{4n^2} = \left(\frac{m^2+n^2}{2n}\right)^2$$

4. *Método de Dickson*. Sean m y n dos números primos entre sí cualesquiera, uno par y otro impar, $m > n$ y $2mn$ es un cuadrado. Entonces $m + \sqrt{2mn}$, $n + \sqrt{2mn}$, y $m + n + \sqrt{2mn}$ son las soluciones para obtener los números que cumplen la ecuación pitagórica. Basta demostrar que:

$$(m + \sqrt{2mn})^2 + (n + \sqrt{2mn})^2 + m^2 + n^2 + 4mn + 2m\sqrt{2mn} + 2n\sqrt{2mn} =$$
$$= (m + n + \sqrt{2mn})^2$$

[14] Los griegos utilizaban este término para referirse a los números enteros positivos. Puede considerarse a *Diofanto de Alejandría* (s.III d.C.) como el principal impulsor de la resolución de ecuaciones en números enteros, que constituyen una de las principales semillas de lo que hoy conocemos como *Teoría de Números*.

ISSN 2174-0410

3.5. Filolao y Arquitas de Tarento

Tras la masacre de Metaponto, algunos de los refugiados supervivientes como Filolao de Tarento fueron los encargados de divulgar la doctrinas pitagóricas a otras regiones del mundo griego. A Filolao se le atribuye el haber escrito la primera exposición del pitagorismo, para lo cual, al igual que otros, había conseguido el permiso para tal fin, con el objetivo de que la orden pudiera recuperar parte de los bienes que habían perdido durante la última masacre. Según parece esta obra fue la primera que sirvió para que Platón adquiriera parte de los conocimientos sobre la escuela pitagórica. Filolao compartió parte del misticismo numérico que era tan característico de la hermandad, y de esta obra suya se derivó en gran parte la tradición mística relativa a la *tetractis*[15], así como el conocimiento de la cosmología pitagórica. Más tarde Ecfanto e Hicetas fueron los pitagóricos encargados de alterar el esquema cósmico filolaico, abandonando el fuego central y la contratierra, y explicando el día y la noche situando a la tierra en rotación en el centro del universo.

Arquitas nació en Tarento en la Magna Grecia, hoy Italia, entre los años 435 y 410 a.C. Hijo de Hestieo, según Aristógenes, o de Mneságoras, según Diógenes Laercio. Condujo una reforma política en Tarento de forma que ésta llegó a ser la ciudad más rica y poblada de la Magna Grecia. A través de la construcción de memoriales, templos y otros edificios le dio lustre a la ciudad. Ayudó a dar nuevos impulsos al comercio al buscar asociaciones con Istria, Grecia y África. Fue uno de los ciudadanos de Tarento más influyentes, llegando a ser elegido gobernador de la ciudad más de siete años (indicativo de su prestigio social ya que la ley prohibía la reelección más de una vez).

Arquitas de Tarento

Alumno de la escuela de Filolao de Crotona, fue amigo de Platón, al que conoció durante el primer viaje que éste realizó al sur de Italia y a Sicilia en 388/7 a. C., tras la muerte de Sócrates. En su Carta Séptima, Platón asegura que Arquitas trató de rescatarlo en sus dificultades con Dionisio II de Siracusa, mediante una carta de recomendación y enviando un barco a Sicilia en 361 a. C.. Para algunos autores fue el maestro pitagórico de Platón.

Arquitas creía firmemente en la eficacia del número; parece ser que durante sus días de gobernante de la ciudad que le había concedido poderes autocráticos, llevó a cabo una labor justa y mesurada, ya que consideraba la razón como una fuerza dirigida al mejoramiento social. Se cuenta de él que a pesar de ser un firme gobernante, era bondadoso y amante de los niños, para los que parece ser que inventó incluso un juguete denominado *carraca de Arquitas*, y probablemente una paloma mecánica hecha de madera, para diversión de estos.

Continuando con la más pura tradición pitagórica, Arquitas situó la aritmética por encima de la geometría, pero su entusiasmo por lo números tenía ya menos de la componente religiosa y mística que caracterizaban a los seguidores de Filolao.

[15] hacía referencia a la escala armónica musical.

ISSN 2174-0410

Entre sus discípulos se encuentran varios de los líderes de la Escuela de Atenas. Enseñó matemáticas a Eudoxo de Cnido, que sería a su vez maestro de Menecmo. Fue uno de los primeros que, tras Pitágoras, trabajó en el conocimiento conjunto de la aritmética, que estudiaba los números en reposo, la geometría, que estudiaba las magnitudes en reposo, la astronomía, que estudiaba las magnitudes en movimiento, y la música, que estudiaba los números en movimiento, las cuatro disciplinas que constituían el *cuadrivium*, junto con la gramática, retórica y dialéctica o *trivium*, acotando las matemáticas a disciplinas técnicas, con la cuales se cree inventó la polea, el tornillo y una especie de mecanismo articulado con alas con el que, aunque sin éxito, intentó volar. Influenció a Euclides. Inventó varios artilugios mecánicos para la construcción de curvas y resolución de problemas. También se interesó por la astronomía, presentando en sus enseñanzas a la tierra como una esfera dando una vuelta en torno a su eje de rotación cada veinticuatro horas y con los cuerpos celestes moviéndose a su alrededor.

Arquitas escribió sobre las aplicaciones de las medias aritmética, geométrica y subcontraria a la música, y probablemente fue él o Filolao el responsable de cambiar el nombre de esta última por la de *media armónica*; entre sus afirmaciones en este contexto estaba la observación de que entre dos números enteros que estén en la razón $n : (n+1)$ no puede haber ningún entero que sea su media geométrica. Arquitas prestó mucha más atención que sus predecesores a la música, considerando que esta materia debería jugar en la educación un papel más importante que el de la literatura.

Fue la primera persona en lograr una buena aproximación al problema de la *duplicación del cubo*, uno de los tres problemas clásicos más famosos junto a la *trisección del ángulo* y la *cuadratura del círculo*. Su construcción si duda resulta aún hoy día cuanto menos sorprendente, puesto que utilizó una solución tridimensional. La construcción dada por Arquitas es similar a la siguiente:

1. Por un diámetro OA de la base de un cilindro circular recto trazamos un semicírculo por un plano perpendicular a la base del cilindro.

2. Rotamos este plano que contiene el semicírculo en torno a la generatriz que pasa por O, entonces la superficie trazada por el semicírculo intersecta el cilindro en una curva.

3. Esta curva será cortada por un cono recto cuyo eje es OA y semiángulo cónico $60°$, con vértice en P, tal que la proyección de OP sobre la base del cilindro será proporcional al radio del cilindro, e igual a la relación entre el lado del cubo buscado y el lado del cubo original.

La demostración de Arquitas se trata por lo tanto de una demostración geométrica llevada a cabo con éxito de manera sintética, sin ayuda de coordenadas. Parece ser que Arquitas tuvo conocimiento de los resultados de las Proposiciones 18, 35 del Libro III, y 19 del Libro XI de *Los Elementos de Euclides*. Para mostrar analíticamente que la construcción es correcta, tomemos OA como el eje x, y la generatriz que pasa por O como eje z, entonces, haciendo uso de las coordenadas polares generales, si a es el radio del cilindro, tenemos que la superficie que describe el semicírculo se expresa:

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta$$

el cilindro tendrá la expresión:

$$r \operatorname{sen} \theta = 2a \cos \phi$$

y el cono:

$$\operatorname{sen} \theta \cos \phi = \frac{1}{2}$$

Estas tres superficies se cortan en un punto de tal modo que

$$\operatorname{sen}^3 \theta = \frac{1}{2}$$

y por lo tanto, si ρ es la proyección de OP sobre la base del cilindro, entonces se cumple que:

$$\rho^3 = (r \operatorname{sen} \theta)^3 = 2a^3$$

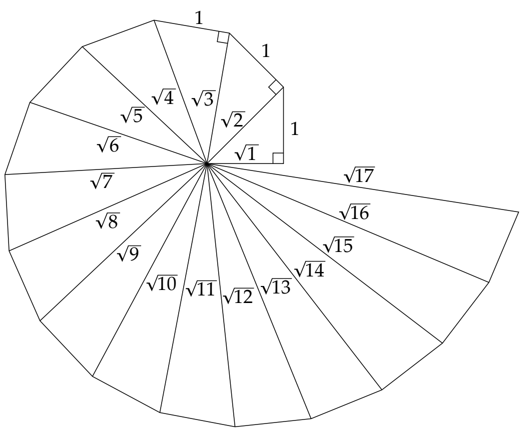
Por lo tanto el volumen del cubo cuyo lado es ρ es dos veces el del cubo cuyo lado es a.

Según cuenta Horacio en una de sus odas, Arquitas falleció en un naufragio en las costas de Apulia, cerca de Tarento entre los años 360 y 350 a. C. Horacio escribió que su cuerpo permaneció sin sepultura en la orilla hasta que un navegante le echó arena encima, pues de otra forma habría vagado en este lado del Lago Estige durante cien años.

3.6. Otros Pitagóricos

Es bien conocido el sentido comunal de los desarrollos científicos que los Pitagóricos consideraron como principio, lo que dificultó históricamente la identificación de discípulos pitagóricos. Con el paso del tiempo y debido fundamentalmente a la persecución que la orden sufrió y provocó su desaparición final, su secretismo pasó a un segundo plano, lo que permitió que algunos representantes de la orden les fuera encargada la tarea de destapar parte de los conocimientos a los que estos llegaron y que constituirían como hemos dicho anteriormente, los fundamentos ideológicos de la Escuela de Platón. Cabe destacar entre otros la figura de Teodoro de Cirene.

Teodoro de Cirene fue un pitagórico contemporáneo de Arquitas, alumno de Protágoras y uno de los profesores y maestros de Teeteto, Platón y Sócrates; vivió la mayor parte de su vida en Atenas. Trabajó en campos tan diversos como la filosofía, la astronomía, la aritmética, la música y la educación. Creía que la alegría y el juicio eran la base para llegar a la felicidad. Es conocido sobre todo por su trabajo matemático, donde probó la irracionalidad de las raíces



Desarrollo de la Espiral de Teodoro de Cirene de los números enteros no cuadrados $(2, 3, 5 \ldots)$ al menos hasta 17[16] a base del método tradicional pitagórico de usar la reducción al absurdo y llegar a una inconsistencia relacionada con pares e impares. También desarrolló la espiral que lleva su nombre usando el Teorema de Pitágoras y añadiendo perpendicularmente a un segmento una unidad lo que forma gráficamente triángulos cuyas hipotenusas son las sucesivas raíces de los números naturales.

Referencias

[1] BABINI, José y REY PASTOR, Julio. *Historia de la Matemática (vol. 1)*, pp. 39–50, Editorial Gedisa, Barcelona, 1985.

[2] BOYER, Carl Benjamin. *Historia de la Matemática*, pp. 71–94, 96, 103–104 Alianza Editorial, Madrid, 2010.

[3] CAJORI, Florian. *A History of Mathematics*, p. 17, The MacMillan Company, 2nd Edition, New York, 1929.

[4] HILBERT, David. *The Foundations of Geometry*, pp. 2–16, The Open Court Publishing Company Co., Reprint Edition. Guttemberg's Project (http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf), Illinois, 1950.

[5] LOMBARDO RADICE, Lucio. *La matemática de Pitágoras a Newton*, pp. 15–17, 22–29, Editorial Laia, Barcelona, 1983.

[6] LOOMIS, Elisha Scott. *The Pythagorean Proposition*, pp. 1–11, 19–20, Classics in Mathematics Education, Council of Teachers of Mathematics, 2nd. Edition , Michigan, 1940.

[7] ROUSE BALL, Walter William. *A Short Account of the History of Mathematics*, pp. 13–30, MacMillan and Co., Limited, Londres, 1919.

[8] WIKIPEDIA,
Anaxágoras de Clazomene, http://es.wikipedia.org/wiki/Anaxágoras
Anaximandro de Mileto, http://es.wikipedia.org/wiki/Anaximandro_de_Mileto
Arquitas de Tarento, http://es.wikipedia.org/wiki/Arquitas
Escuela de Mileto, http://es.wikipedia.org/wiki/Escuela_jonica
Gnomon, http://es.wikipedia.org/wiki/Gnomon
Hipaso de Metapongo, http://es.wikipedia.org/wiki/Hipaso_de_metaponto
La Escuela de Atenas, http://es.wikipedia.org/wiki/La_escuela_de_Atenas
Los Pitagóricos, http://es.wikipedia.org/wiki/Pitagóricos
Pitágoras de Samos, http://es.wikipedia.org/wiki/Pitagoras_de_Samos
Tales de Mileto, http://es.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto
Teodoro de Cirene, http://es.wikipedia.org/wiki/Teodoro_de_cirene

[16] Demostró geométricamente que los números actualmente representados como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, y $\sqrt{17}$ eran inconmensurables o como hoy día los definimos, eran irracionales.Previamente Pitágoras ya había demostrado esta condición para $\sqrt{2}$.