Historias de Matemáticas
Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic

ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

Este artículo muestra una evolución histórica del Cálculo Fraccional, desde su nacimiento meramente teórico e intuitivo a finales del siglo XVII, pasando por los formalistas del siglo XIX donde se produjo una carrera vertiginosa por establecer y definir una teoría consistente de forma definitiva, hasta la actualidad, dando cuenta de los avances científicos logrados por distintas disciplinas debido a su aplicación durante el siglo XX.

Palabras Clave: Cálculo Fraccional, derivada, integral, orden fraccional, operador generalizado.

1. Nacimiento y primeros intentos por definirlo

En cuanto al nacimiento del Cálculo Fraccional, todos los historiadores matemáticos están de acuerdo en la datación de la fecha y la forma en la que se produjo. Este hecho tuvo lugar tras una publicación de Leibniz en donde introducía la notación del Cálculo Diferencial, en particular de la expresión conocida hoy día como $\frac{d^n y}{dx^n}$ que hace referencia a la derivada de orden n de la función y, con $n \in \mathbb{N}$. ¿Pero tenía sentido hacer extensible los valores de n al conjunto de los números racionales, irracionales, o complejos en dicha expresión?.

Gottfried Leibniz

Marqués de L'Hôpital

La primera persona de la que se tiene certeza que se planteó este problema fue Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital, que el 30 de Septiembre de 1695 escribiría una carta a Gottfried Wilhelm Leibniz argumentando una cuestión con respecto a la notación para la n-ésima derivada de la función:

> *"¿Qué sucedería si n fuera $\frac{1}{2}$?"*

a lo que Leibniz replicó:

> *"Usted puede ver por eso, señor que uno puede expresar por una serie infinita una cantidad como $d^{1/2}xy$ o $d^{1:2}xy$. Aunque las series infinitas y geométricas son relaciones distantes, las series infinitas admiten sólo el uso de exponentes que son enteros, no hace, todavía, el uso de exponentes fraccionarios... esto conduciría a una paradoja, de la que algún día se extraerán consecuencias útiles."*

En 1697, el mismo Leibniz, hacía referencia al producto infinito de Wallis para π[1] afirmando que podría haber hecho uso del Cálculo Diferencial para obtener el mismo resultado, utilizando la notación $d^{1/2}$ para expresar una derivada de orden $\frac{1}{2}$.

En 1730, Leonhard P. Euler hizo referencia a interpolaciones entre órdenes enteros de una derivada, y escribiría:

> *"Cuando n es un entero positivo, y si p está en función de x, el radio $d^n p$ a dx^n puede siempre ser expresada algebraicamente, para $n = 2$ y $p = x^3$ es $6x$ a 1. Ahora se pregunta: ¿qué tipo de radio puede hacerse entonces si n es una fracción?. La dificultad puede ser fácilmente entendida en este caso. Si n es un entero positivo d^n puede ser encontrada con derivación continuada. De tal manera, sin embargo no es evidente si n es una fracción. Pero con la ayuda de la interpolación uno puede expedir el asunto".*

En 1812, Pierre-Simon Laplace definió una derivada fraccional, pero la primera discusión de una derivada de este tipo apareció en 1819 en dos páginas de las 700 que constituyen el texto de Cálculo de Sylvestre François Lacroix, quien aparentemente consideró este tema como un mero ejercicio matemático.

Lacroix partió de $y = x^m$ con $m \in \mathbb{N}^+$, y calculó la n-ésima derivada:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n$$

usando Γ[2], el símbolo de Legendre para factorial generalizado (función gamma), obteniendo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

[1] En 1655 el matemático inglés John Wallis expresaba π como un producto infinito denominado actualmente *Producto de Wallis*:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

[2] Adrien-Marie Legendre ideó la notación de la Función Gamma, denotada como $\Gamma(z)$, como extensión del concepto de factorial para los números complejos. Si la parte real del número complejo

y reemplazando n por $\frac{1}{2}$, y m por cualquier real positivo a, de la manera tradicional en la que los formalistas clásicos de este periodo lo hacían, Lacroix obtuvo:

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}x^{a-\frac{1}{2}}$$

que expresa la $\frac{1}{2}$ derivada de $y = x^a$. También expresó este último resultado para $y = x$:

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1!x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$$

El resultado obtenido por Lacroix, en la manera típica de los formalistas de esa época, es el mismo mostrado hoy en día por la definición de una derivada de orden arbitrario de Riemann-Liouville. El método de Lacroix no ofrece ninguna pista para la aplicación de una derivada de orden arbitrario.

En 1822, Jean-Baptiste Joseph Fourier sería el siguiente en hacer mención a las derivadas fraccionales, pero de la misma forma que hicieron anteriormente Euler, Laplace y Lacroix, no aportó ninguna aplicación. De este modo:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-\alpha) dp$$

Ahora:

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos p(x-\alpha) = p^n \cos\left(p(x-\alpha) + \frac{1}{2}n\pi\right)$$

para n entero. Reemplazando n por ν (siendo ν cualquier número arbitrario), se obtiene la generalización:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^\nu \cos\left(p(x-\alpha) + \frac{1}{2}\nu\pi\right) dp$$

La primera aplicación surgió de la mano del matemático noruego Niels Henrik Abel, en 1823, cuando aplicó el Cálculo Fraccional en la solución de una integral que surgió en la formulación del problema de la tautócrona. Este problema llamado a veces el problema de la isocrona, que no debe ser confundido con el problema de la braquistocrona[3], consiste en encontrar la forma de la curva sobre un plano vertical, de tal forma que un objeto, al deslizarse por ella sin rozamiento alguno, llegue al final de su recorrido en un tiempo que es

z es positiva, entonces la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$$

converge absolutamente, esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo, exceptuando a los enteros negativos y al cero. Si n es un entero positivo, entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

lo que nos muestra una relación de esta función con el factorial. De hecho, la función Gamma generaliza el factorial para cualquier valor complejo de n.

[3] El problema de la braquistocrona, es un problema de cálculo de variaciones, que consiste en encontrar la forma de la curva de tal modo que un objeto realice su trayecto en el menor tiempo posible. Este problema empezó siendo estudiado por Galileo Galilei, y formulado en 1696 por Johann Bernoulli, quien estableció que la forma de la curva era similar al de una cicloide invertida.

independiente del lugar en que comience el movimiento, es decir dos objetos situados en la curva, uno situado a más altura que el otro, recorren la curva en el mismo tiempo. Si el tiempo de caída es una constante conocida, la ecuación integral de Abel tenía la forma

$$k = \int_0^x (x-t)^{1/2} f(t)\, dt \tag{1}$$

Abel estudió de forma más general la ecuaciones integrales con núcleos de la forma $(x-t)^\alpha$. La integral (1) es un caso particular de una integral definida que define la integración fraccional de orden $\frac{1}{2}$, excepto por el factor multiplicador $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}$. En las ecuaciones integrales como la (1), la función f del integrando es desconocida y tiene que ser determinada. Abel escribió la parte de derecha de la igualdad de (1) como

Niels Henrik Abel[4]

$$\sqrt{\pi}\, \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\, f(x)$$

Entonces operó en ambos lados de la ecuación con $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ para obtener

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\, k = \sqrt{\pi} f(x) \tag{2}$$

ya que estos operadores fraccionales (en condiciones idóneas para f) tienen la propiedad de que $D^{1/2} D^{-1/2} f = D^0 f = f$. Por lo tanto cuando la derivada fraccional de orden $\frac{1}{2}$ de la constante k en (2) se computa, entonces se determina $f(x)$. Este resultado se trata de un gran logro alcanzado por Abel para el posterior desarrollo del Cálculo Fraccional. Es importante poner de manifiesto que no siempre la derivada fraccional de una constante tiene que ser siempre igual a cero, hecho que creó una pequeña controversia en aquella época entre la comunidad matemática.

A buen seguro, tanto la "elegancia" de la solución de Abel al problema de la isocrona, como la fórmula integral de Fourier, llamaron la atención de Joseph Liouville, a quien con seguridad le debemos históricamente la primera definición formal lógica del concepto de derivada fraccional, desarrollado en la publicación de sus tres largas memorias en 1832 y alguna más en 1855.

Joseph Liouville

El punto de partida de Liouville fue un resultado conocido para derivadas de orden entero positivo, que extendió en forma natural para órdenes arbitrarios:

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{ax} = a^m e^{ax}$$

[4] Este es el único retrato de Abel que se hizo en vida. Se trata de un grabado realizado por Johan Gørbitz en otoño de 1826 durante su estancia en París. © Matematisk Institutt, Universidad de Oslo.

haciéndola extensible para $\nu > 0$:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}e^{ax} = a^\nu e^{ax}$$

desarrolló $f(x)$ como expresión de la serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad Re(a_n) > 0$$

y manejó la ν-ésima derivada de $f(x)$ como:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^\nu e^{a_n x}$$

conocida esta última expresión como *Primera fórmula de Liouville para la derivación fraccional*, que generaliza de un modo natural la derivada arbitraria de orden ν, siendo ν un número cualquier racional, irracional e incluso complejo.

Esta *Primera fórmula de Liouville para la derivación fraccional*, tiene la principal desventaja de que ν está restringida por la convergencia de la serie.

Liouville, obtuvo una segunda definición para la derivada fraccional, haciendo uso de un segundo método aplicado a funciones de la forma x^{-a} con $x > 0$, $a > 0$, del siguiente modo:

$$\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}\,du$$

aplicó en cambio $xu = t$ obteniendo

$$\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}\,du = \frac{1}{x^a}\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(a)}{x^a}$$

de donde

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}\,du$$

y tomando la ν-ésima derivada en ambos miembros de la anterior igualdad

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}x^{-a} = \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}e^{-xu}\,du\right) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(e^{-xu}\right)\,du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a-1}(-1)^\nu u^\nu e^{-xu}\,du = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{a+\nu-1}e^{-xu}\,du =$$

$$= \frac{(-1)^\nu\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)x^{a+\nu}}$$

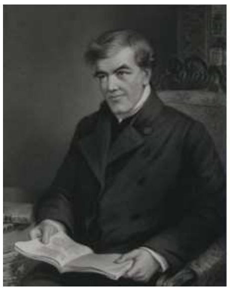
que le llevó a la siguiente expresión

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}x^{-a} = \frac{(-1)^\nu\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}x^{-a-\nu}$$

conocida como la *Segunda fórmula de Liouville para la derivación fraccional*.

El término $(-1)^{\nu}$ de esta segunda definición, sugiere la necesidad de incluir número complejos, y de hecho Liouville consideró estos valores, aplicando con éxito el Cálculo Fraccional en problemas de Teoría del Potencial, e incluso trató de resolver ecuaciones diferenciales mediante el uso de esta herramienta.

Entre 1835 y 1850 algunos investigadores como George Peacock, tomando partido por Lacroix, cuya definición era útil para las funciones de la forma x^{a} con $a > 0$, o Philip Kelland, tomando partido por Liouville, cuya definición era útil para las funciones de la forma x^{-a} con $a > 0$, fundamentaron ciertas controversias respecto a las definiciones de derivada fraccional argumentadas de forma independiente por uno y otro. Sin embargo otros como Augustus de Morgan consideraron que ni una ni otra corriente tenían por qué entrar en conflicto, ya que ambas formas de considerar las derivadas fraccionales podían ser parte de una definición mucho más general.


George Peacock


Philip Kelland

En 1850, William Center observó que la discrepancia entre ambas corrientes se centraba fundamentalmente en el concepto de derivada fraccional de una constante. De acuerdo con la versión de Peacock-Lacroix, la derivada fraccional de una constante da un resultado distinto de cero, a menos que la constante sea precisamente cero, mientras que en la versión de Kelland-Liouville, la derivada fraccional de una constante da como resultado cero, puesto que $\Gamma(0) = \infty$, y por lo tanto $\frac{1}{\Gamma(0)}$ puede considerarse cero. Center encontró la derivada fraccional de la unidad de orden $\frac{1}{2}$, así:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x^{0} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

Pero Center no coincidía con Liouville en su segunda definición, citándole textualmente:

> *"La pregunta se reduce a qué es $\frac{d^{\nu}x^{0}}{dx^{\nu}}$. Para cuando esto sea determinado nosotros determinaremos al mismo tiempo cual es el sistema correcto."*


Bernhard Riemann

En 1847, durante sus días de estudiante, Bernhard Riemann desarrolló una teoría de operaciones fraccionales, que fue publicada de forma póstuma en *Gesammelte Werke* en 1892. Riemann usó una generalización de una serie de Taylor para deducir su fórmula para integración de orden arbitrario

$$\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{c}^{x}(x-t)^{\nu-1}f(t)\,dt + \psi(x)$$

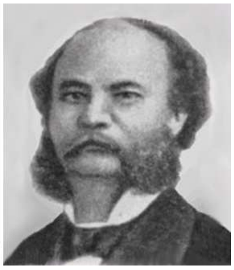
expresión esta última sobre la que Arthur Cayley comentó en 1880 que la función complementaria $\psi(x)$ es

ISSN 2174-0410

de naturaleza indeterminada pues contiene una infinidad de constantes arbitrarias.

La cuestión de la existencia de una función complementaria, causó una enorme confusión. Liouville tuvo un error cuando en su interpretación de la valoración de la función complementaria. No consideró el caso especial para $x = 0$, lo cual le condujo a una contradicción. Peacock tuvo dos errores en su argumentación del cálculo fraccional. Estos dos errores le llevaron a una mala aplicación de lo que él denominaba principio de permanencia de formas equivalentes. Aunque este principio es indicado, Peacock asume su validez para todos los operadores simbólicos. Consideró la existencia de una función complementaria y desarrolló una extensión para $D^{-m}x$, siendo m un entero positivo. Se equivocó al considerar ingenuamente que podría reemplazar formalmente m por una fracción. Peacock cometió un segundo error similar cuando desarrolló la extensión para la derivada de orden entero $D^m(ax+b)^n$ y entonces buscó extender su resultado al caso general.

Nikolay Yakovlevich Sonin



Alekséi Vasílievich Létnikov

En 1869 Nikolay Yakovlevich Sonin trabajó inicialmente en la definición llamada Riemann-Liouville, en un escrito llamado *"En la diferenciación con índice arbitrario"*, empezando con la fórmula integral de Cauchy. Alekséi Vasílievich Létnikov escribió cuatro escritos referentes al tema los cuales tituló *"Una explicación de los principales conceptos de la teoría de diferenciación de índices arbitrarios"* en los cuales dio una extensión de los escritos de Sonin, estableciendo que la n-ésima derivada de la fórmula integral de Cauchy está dada por

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

No se plantea conflicto alguno generalizando $n!$ a valores arbitrarios desde $\nu! = \Gamma(\nu+1)$, pero sí para cuando n no es entero, aunque este hecho no fue incluido en los trabajos de Sonin y Létnikov.

Los matemáticos de la primera mitad del siglo XIX no habían podido precisar una definición apropiada al no analizar en el plano complejo las consecuencias de sus definiciones.

2. Primera definición formal

Fue el matemático Matthieu Paul Hermann Laurent quien en 1884 publicó sus escritos de la teoría de generalización de operadores de logro contribuyendo de manera clara en el cálculo de derivadas de orden arbitrario. Su teoría, analizada en el plano complejo, fue la primera en ser aceptable para el gusto de los matemáticos modernos.

Harold T. Davis

De acuerdo con la notación utilizada en 1936 por el matemático Harold T. Davis en su obra*Teoría de Operadores Lineales*,

$${}_cD_x^{-\nu} f(x), \;\; \nu \geq 0$$

denota la integral de orden ν de la función $f(x)$ a lo largo del eje real, y c y x son límites de integración.

$${}_cD_x^{\nu} f(x), \;\; \nu \geq 0$$

significa diferenciación de orden ν para $f(x)$.

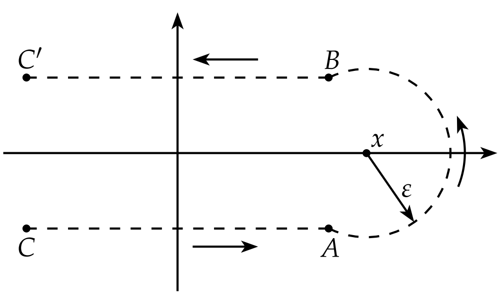
A finales del siglo XIX, los matemáticos dedicados al tema necesitaban encarecidamente encontrar una definición apropiada de orden arbitrario y formalizar una teoría que consistía en que para toda función $f(z)$ de variable compleja de una clase suficientemente amplia y a cualquier número ν, irracional, fraccional o complejo, la función ${}_cD_z^{\nu} f(z) = g(z)$ debería definirse de modo que satisficiera lo siguiente:

1. Si $f(z)$ es analítica, la derivada ${}_cD_z^{\nu} f(z)$ es analítica en ν y z.
2. La operación ${}_cD_x^{\nu} f(x)$ produce el mismo resultado que la diferenciación ordinaria cuando ν es entero positivo.
   Si $\nu = -n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces ${}_cD_x^{-n} f(x)$ produce el mismo resultado que integrar ordinariamente n veces la función $f(x)$ y ${}_cD_x^{-n} f(x)$ debe anularse con sus $n-1$ derivadas en $x = c$.
3. La operación de orden cero no altera la función ${}_cD_x^{0} f(x) = f(x)$.
4. Los operadores fraccionales deber ser lineales.
5. La ley de índices debe cumplirse ${}_cD_x^{-u}\, {}_cD_x^{-\nu} f(x) = {}_cD_x^{-u-\nu} f(x)$.

Como se mencionó anteriormente, Laurent obtuvo la primera definición que satisfizo estas propiedades. Publicó un artículo en 1884 considerado como definitivo para los fundamentos del Cálculo Fraccional. Para ello partió de la fórmula de Cauchy para funciones complejas analíticas:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

donde $\mathbb{C}$ representa el contorno de integración en el plano complejo, ahora denominado *Lazo de Laurent*, que se muestra en la siguiente figura:



La generalización de $n!$ no presenta problemas ya que $\nu! = \Gamma(\nu+1)$; además expresando la integral en forma exponencial y haciendo los cambios $\zeta = t$ y $z = x$, se obtiene:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} e^{(-\nu-1)\ln(t-x)} f(t)\, dt$$

en la parte AB del lazo tenemos que $t = x + \varepsilon e^{i\theta}$, de donde

$$\int_A^B e^{(-\nu-1)\ln(t-x)} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-\nu-1)\ln\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)} f(x+\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon\, i\, e^{i\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\ln\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)^{(-\nu-1)}} \varepsilon\, i\, e^{i\theta} f\left(x+\varepsilon e^{i\theta}\right)\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\varepsilon e^{i\theta}\right)^{(-\nu-1)} \varepsilon\, i\, e^{i\theta} f\left(x+\varepsilon e^{i\theta}\right)\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-\nu} e^{i\theta} e^{-i\nu\theta}\, i\, f\left(x+\varepsilon e^{i\theta}\right)\, d\theta$$

Si consideramos $\nu < 0$, entonces la integral anterior converge cuando $\varepsilon \to 0$. En la parte CA del lazo, $\ln(\zeta - x) = \ln(x-t) - i\pi$ y en la parte BC' del mismo, $\ln(\zeta - x) = \ln(x-t) + i\pi$, de donde

$$\int_{\mathbb{C}} e^{(-\nu-1)\ln(\zeta-x)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_C^A e^{(-\nu-1)(\ln(x-t)-i\pi)} f(t)\, dt$$

Al tomar $\nu < 0$, y límite cuando $\varepsilon \to 0$, la integral en la parte AB del lazo se anula y obviamente $A \to x$, $B \to x$ y $C \to C'$, por lo que

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\left[e^{(\nu+1)i\pi}\int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt - \right.$$

$$\left. - e^{-(\nu+1)i\pi}\int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi}\left[\frac{e^{i\pi(\nu+1)} - e^{-i\pi(\nu+1)}}{2i}\right]\int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi}\operatorname{sen}(\nu+1)\pi\int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi}(-\operatorname{sen}\pi\nu)\int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt$$

De acuerdo con la fórmula de reflexión de la función Γ,

$$\operatorname{sen}(\pi\nu) = \frac{\pi}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}$$

lo que nos lleva a

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)\pi}{\pi\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}\int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{C'}^{x} (x-t)^{-\nu-1} f(t)\, dt$$

Por último, realizando el cambio de notación para emplear $\nu > 0$ en lugar de $\nu < 0$, obtenemos la definición de integración de orden arbitrario obtenida por Laurent, que con la notación establecida por H. T. Davis resulta

$${}_{C}D_{x}^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{C}^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt$$

Esta última expresión se denomina también como *Fórmula de Riemann-Liouville* ya que si $C = 0$ o $C = -\infty$, obtenemos las expresiones definidas por Riemann y Liouville respectivamente, aunque para el caso de Riemann esta última expresión no considera la función complementaria $\psi(x)$ que éste consideró en su expresión.

Esta fórmula de Riemann-Liouville para integración fraccional, no se puede utilizar directamente para diferenciación de orden arbitrario, aunque mediante un pequeño cambio se puede encontrar una expresión adecuada.

Sea $\nu = m - p$, con m el mínimo entero mayor o igual que ν y $0 \leq p < 1$; entonces para la diferenciación de orden arbitrario:

$${}_{C}D_{x}^{-\nu} f(x) = {}_{C}D_{x}^{m-p} f(x) = {}_{C}D_{x}^{m}\, {}_{C}D_{x}^{-p} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[{}_{C}D_{x}^{-p} f(x) \right] =$$

$$= \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_{C}^{x} (x-t)^{p-1} f(t)\, dt \right]$$

donde el supuesto ${}_{C}D_{x}^{m-p} = {}_{C}D_{x}^{m}\, {}_{C}D_{x}^{-p}$ se puede justificar de la manera descrita a continuación.

Sea

$$\phi(\nu, x) = {}_{0}D_{x}^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt$$

es convergente para $\nu > 0$

$$\psi(\nu, x) = {}_{0}D_{x}^{m}\, {}_{0}D_{x}^{-p} f(x)$$

donde $-\nu = m - p$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$

Cuando $\nu > 0$ se puede escoger $m = 0$, entonces $\nu = p$, $\phi(\nu, x) = \psi(\nu, x)$ y se puede deducir:

$$\phi(\nu, x) = \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{0}^{x} (x, t)^{\nu-1} f(t)\, dt \right] dx$$

y haciendo uso de la fórmula de Dirichlet

$$\phi(\nu, x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\nu} f(t)\, dt$$

que es convergente para $\nu > -1$, y resulta que para $m = 1$, entonces

$$\phi(\nu, x) = \psi(\nu, x)$$

ISSN 2174-0410

y este proceso continúa hasta que $\phi(\nu, x) = \psi(\nu, x)$ para $m = n$ y $\nu > -n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Luego ϕ es analítica en R_1 donde $\nu > 0$ y ψ es analítica en R_2 para $\nu > -n$; como $\phi = \psi$ en $R_1 \bigcap R_2$ con un punto límite en el semiplano derecho, entonces ψ es continuación analítica de ϕ; esto se justifica al expresar

$$_cD_x^m \, _cD_x^{-p} = {}_cD_x^{m-p}$$

En 1892, Oliver Heaviside ponía de manifiesto la importancia de la utilización de los operadores generalizados para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. Heaviside no se caracterizó por ser un científico de gran rigor, sus aportaciones tenían un carácter eminentemente práctico, por lo que sus métodos resultaban útiles a disciplinas aplicadas como la ingeniería. En su publicación *Heaviside operational calculus* (*Cálculo Operacional de Heaviside*), denota al operador diferenciación por la letra p, y lo considera como si fuera una constante en la solución de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la ecuación del calor en una dimensión es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

donde a^2 es una constante y u la temperatura. Si consideramos $\dfrac{\partial}{\partial t} = p$, entonces la ecuación diferencial se expresa

$$D^2 u = a^2 p$$

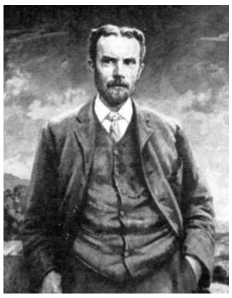
cuya solución expresada en función de este operador simbólico resulta

$$u(x,t) = Ae^{xap^{1/2}} + Be^{-xap^{1/2}}$$

que es exactamente lo que se obtendría si se resolviera la ecuación $D^2u = a^2p$ considerando p como una constante.

Heaviside contribuyó en gran medida a al desarrollo acelarado de la teoría de operadores generalizados en la recta final del siglo XIX. Obtuvo resultados satisfactorios desarrollando la exponencial en potencias de $p^{1/2}$, donde

$$p^{1/2} = \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} = D^{1/2}$$



Oliver Heaviside

Heaviside llevo a cabo un uso frecuente del operador $p^{1/2}$ en la teoría de circuitos eléctricos. Interpretó que $p^{1/2} \to 1$, esto es, $D^{1/2}(1)$, se convierte en $(\pi t)^{-1/2}$. Como $f(t) = 1$ es una función de clase Riemann, se ve claramente que el operador de Heaviside debe ser interpretado en el contexto del operador de Riemann $_0D_x^{\nu}$[5]. Sus resultados fueron correctos, aunque fue incapaz de justificar sus procedimientos, hecho que sucedería años más tarde (en 1919) de la mano de Thomas John l'Anson Bromwich.

[5] En el moderno Cálculo Operacional, $pF(p)$ es reemplazado por $F(s)$, donde s es la transformada variable de Laplace. Por lo tanto, $p^{1/2}$ es reemplazado por $s^{1/2}$, y la transformada de Laplace inversa de $s^{1/2}$ resulta $(\pi t)^{-1/2}$, que es $D^{1/2}(1)$.

ISSN 2174-0410

3. Aplicaciones en el siglo XX

Con la llegada del siglo XX y de los desarrollos tanto del análisis matemático como de la teoría de funciones, surgieron nuevas formas íntegro-diferenciales fraccionarias. Muchos fueron los que colaboraron en el desarrollo del cálculo fraccional, entre ellos M. Al-Bassam, Harold T. Davis, Arthur Erdélyi, Godfrey Harold Hardy, Hermann Kober, John Edensor Littlewood, Eric R. Love, T. Osler, Marcel Riesz, S. Samko, Ian Naismith Sneddon, Hermann Weyl o Antoni Zygmund.

En 1917, Hermann Weyl definió una integral fraccionaria adecuada a funciones periódicas:

$$ {}_xW_{\infty}^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_x^{\infty} (t-x)^{p-1} f(t)\, dt, \ \text{ con } Re(p) > 0 $$

.

Tras varios intentos por definir de otra manera derivadas fraccionales de orden arbitrario (Anton Karl Grünwald en 1867, Emil Leon Post en 1930), surgió la representación directa de $x_0 D_x^{\nu} f(x)$ como límite:

$$ x_0 D_x^{\mu} f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{x-x_0}{n}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\nu}{k} f\left(x - k\,\tfrac{x-x_0}{n}\right) $$

conocida como íntegro-derivada, pues es una generalización común de derivadas e integrales iteradas en el caso de valores enteros de ν.

Marcel Riesz

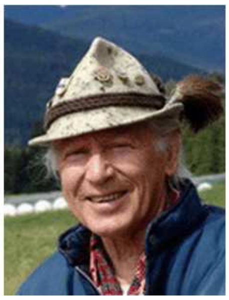
Otra de las ideas es que la integral de Riemann-Liouville es una función holomorfa de orden ν. Sobre esta base, Marcel Riesz y algunos seguidores trabajaron entre 1933 y 1949 desarrollando el método llamado *"Continuación Analítica de la Integral de Riemann-Liouville"*. Este proceso, en la teoría de la diferenciación fraccional, se aplica también a funciones de varias variables, sobre todo en espacios euclídeos y espacios métricos de dimensión grande y se usa en Física Nuclear (*Potenciales de Riesz*). En 1936, Marcel Riesz consideró la integral fraccionaria de múltiples variables como un operador de tipo potencial. Uno de estos potenciales ha sido formalmente definido como la potencia $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ del Laplaciano.

Arthur Erdélyi

Hermann Kober

Entre 1940 y 1941, Arthur Erdélyi y Hermann Kober trabajaron sobre la generalización de las integrales de Riemann-Liouville y Weyl, quedando este tema "aletargado" hasta prácticamente 1960, cuando Miklós Mikolás estudió el caso de derivadas e integrales fraccionales de orden complejo para funciones Lebesgue-integrales, basándose para ello en el concepto de Weyl.

Resultados de las investigaciones de Magnus Gösta Mittag-Leffler y Marcel Riesz en el campo de funciones, permitieron entre otras cosas, una completa caracterización del dominio de existencia de la derivada fraccional, íntimamente relacionado con la teoría de Funciones Zeta de Hurwitz.



Darío Maravall *Michele Caputo*

Por otro lado, el académico español Darío Maravall con una serie de publicaciones que aparecieron a partir del año 1959, muchas acerca de la ingeniería de las oscilaciones, fue el primero en España en mencionar unas particulares oscilaciones fraccionarias asociadas a ecuaciones diferenciales no enteras.

En 1969, el físico matemático italiano Michele Caputo dio una nueva definición de derivada fraccionaria que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los cada vez más numerosos problemas aplicados que se estaban estudiando. Caputo definió la derivada fraccional

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(u)}{(x-u)^{\alpha-n+1}}\, du$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$, tal que $n - 1 < \alpha < n$.

En el año 1974, tuvo lugar en la Universidad de New Haven, en Connecticut, la primera conferencia internacional sobre el Cálculo Fraccionario, organizada por Bertram Ross, a la que asistieron 94 matemáticos y se presentaron 26 artículos al respecto, que sirvió de estímulo a numerosas publicaciones posteriores. La segunda conferencia tuvo lugar en 1984 en la Universidad de Strathclyde, en Escocia, codirigida por Adam McBride y Garry Roach. La tercera, dirigida por Katsuyuki Nishimoto, tuvo lugar en 1989 en la Universidad de Nihon, en Tokyo. La última, codirigida por Peter Rusev, Ivan Dimovski y Virginia Kiryakova, tuvo lugar en 1996 en Varna, Bulgaria.

Actualmente es difícil encontrar un ámbito de la ciencia o de la ingeniería que no considere conceptos del Cálculo Fraccionario. Desde 1975 hasta la actualidad se han publicado más de 600 artículos relacionados con el tema, lo que sin duda pone de manifiesto su actual vigor.

Desde el punto de vista de la matemática, es fascinante ver como el campo de las generalizaciones "fraccionarias" es lugar de encuentro de varias disciplinas, entre otras, la teoría de las probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones íntegro-diferenciales, la teoría de las transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico.

De relevante importancia son las aplicaciones físicas en la teoría de la viscoelasticidad, en el estudio del fenómeno de la difusión anómala y en la teoría electromagnética; pero podemos anticipar que también se va despertando un interés cada vez mayor en otros ámbitos muy distintos como, por ejemplo, el de la teoría de circuitos, de la biología o de la física de la atmósfera. Asimismo, entre los economistas se va consolidando el empleo de conceptos de Cálculo

ISSN 2174-0410

Fraccionario. Ya en 1996, en el *Journal of Econometrics* apareció un número especial en el que se recogía una serie de artículos sobre el tema denominado "Fractional Differencing and Long Memory Processes".

Entre las variadas cuestiones abiertas sobre el Cálculo Fraccional, ocupa un lugar prominente la de determinar si es posible encontrar una interpretación geométrica para la derivada fraccionaria. Una posible solución a este problema ha sido propuesta por el matemático eslovaco Igor Podlubny en un reciente artículo titulado "Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation" *(Interpretación Geométrica y Física de la Integración y Diferenciación Fraccional)* en el que la interpretación física y geométrica de estos operadores fraccionarios está basada en el empleo de dos tipos de tiempos, un tiempo cósmico y un tiempo individual, y viene estrechamente relacionada con la teoría de la relatividad.

Igor Podlubny

Referencias

[1] CAPUTO, Michele. *Diffusion with space memory modelled with distributed order space fractional differential equations*, Revista *Annals of Geophysics*, Vol. 46, Nº 2, Abril, 2003

[2] LOVERRO, Adam. *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*, Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mećanica, Universidad de Notre Dame, EE.UU, 2004.

[3] MILLER, Kenneth S., y ROSS, Bertram. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, pp. 1–16, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

[4] PIERANTOZZI, Teresa. *Estudio de Generalizaciones Fraccionarias de las Ecuaciones Estándar de Difusión y de Ondas*, Departamento de Matemática Aplicada, UCM, Madrid, 2006.

[5] PODLUBNY, Igor. *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation*, Revista *Fractional Calculus & Apllied Analysis*, Vol. 5, Nº 4, 2002.

[6] RODRÍGUEZ PERDOMO, Diego Felipe. *Cálculo Fraccional: Un enfoque a la Teoría de Riemann-Liouville*, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Colombia, 2008.

[7] THE ABEL PRIZE WEBSITE. *Página completa dedicada a la figura de Abel*, http://www.abelprisen.no/en/abel/

[8] VALENCIA ARVIZU, Luis Feliciano. *Una Teoría de Integración Fraccional para Funciones Generalizadas*, Tesis Licenciatura Matemáticas Escuela de Altos Estudios. Universidad de Sonora, México, 1981.

[9] WIKIPEDIA,
Bernhard Riemann, http://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann
Cálculo Fraccional, http://es.wikipedia.org/wiki/Cálculo_fraccional
Función Gamma, http://es.wikipedia.org/wiki/Función_gamma
Gottfried Leibniz, http://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz
John Wallis, http://es.wikipedia.org/wiki/John_Wallis
Joseph Liouville, http://es.wikipedia.org/wiki/Liouville
Marqués de L'Hôpital, http://es.wikipedia.org/wiki/L'hopital
Oliver Heaviside, http://es.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside
Producto de Wallis, http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_de_wallis