

EL ESTUDIO DE LOS PARÁMETROS POR MEDIO DE TECNOLOGÍAS HÍBRIDAS ¹.

STUDYING PARAMETERS VIA HYBRID TECHNOLOGIES

Basurto, E., Gallardo, A.

Cinvestav, México

Resumen. *Los estudiantes de enseñanza media se enfrentan al uso e interpretación de los parámetros en funciones polinomiales, lugares geométricos y expresiones algebraicas. Este hecho conduce a la necesidad de diferenciar los parámetros de otro tipo de literales como variables o incógnitas. Esta investigación indaga sobre la influencia que pueden tener dos entornos tecnológicos sobre la comprensión de la polisemia de las literales, bajo el telón de fondo de los Modelos Teóricos Locales y de la Aproximación Instrumental.*

Palabras Clave: Parámetros, literales, entornos tecnológicos, Modelos Teóricos Locales y Aproximación Instrumental.

Abstract. *Middle school students generally face the use and interpretation of parameters in polynomial functions, geometric locations and algebraic expressions. This fact leads to the need to distinguish between the parameters of other types of literals, such as variables or unknowns. The research looks at the influence that two technological environments can wield on comprehension of the polysemy of literals, with a backdrop of Local Theoretical Models and of Instrumental Approximation.*

Key Words: Parameters, literals, technological environments, Local Theoretical Models and Instrumental Approximation.

A lo largo de su formación matemática, los estudiantes se enfrentan a distintos niveles de comprensión de las literales, en específico a incógnitas, números generalizados y variables, Küchemann (1981). A esta polisemia vinculada al uso algebraico, se unen otro tipo de literales llamadas parámetros surgidos al introducir a los sujetos en la exploración de entidades aún más generales, que poseen significados propios capaces de agrupar en familias a expresiones algebraicas en un nivel más abstracto.

Recurrimos a la perspectiva semiótica establecida en matemática educativa por, Filloy, Rojano y Puig (2008) y Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008) y utilizada también por Fernández, A. y Puig, L. (2002). Los “Modelos Teóricos Locales” (MTL) son apropiados sólo para fenómenos específicos pero capaces de tomar en cuenta la competencia formal, los procesos cognitivos, la enseñanza y la comunicación presentes en la observación empírica de todo fenómeno producido en situaciones de enseñanza aprendizaje. Se introduce el término: Sistema Matemático de Signos (SMS) para analizar los textos creados por los estudiantes que constituyen procesos de producción de sentido.

Además analizamos la evolución cognitiva de los sujetos desde el enfoque de la aproximación instrumental, dado que las acciones instrumentales producen una versión signífica del conocimiento. Artigue (2002) menciona que un instrumento se diferencia del artefacto físico que lo origina por ser “una entidad mixta, parte artefacto y parte procesos cognitivos”. La conversión de un artefacto en instrumento involucra una evolución de sus diferentes usos permitiéndole analizar una situación o resolver un problema. Este proceso es llamado génesis instrumental.

(1) Investigación financiada por el PROYECTO DE GRUPO - CONACYT: Génesis instrumental y modelos de competencia formal en procesos de apropiación de tecnologías digitales para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Aprobado- N°. de ref. 80359.

Por último, respecto al contexto del “profesor a pie de aula”; Fortuny, J.M., Iranzo, N., Morera, L. (2010) mencionan la existencia de un “estado de alerta continua” para mejorar la labor docente en beneficio de los alumnos donde se encuentra situado el papel de la tecnología en la educación. En esta misma dirección, Morera, L. (2010) advierte sobre “momentos clave” en el proceso de resolución de problemas usando la ventana de Geogebra donde es posible identificar situaciones donde se produce un cambio entre los estados inicial y final en el proceso de aprendizaje. Identifica tres momentos claves: generalización de casos particulares, enriquecimiento de procesos de resolución y refutación de conjeturas con visiones distintas.

NUESTRA INVESTIGACIÓN

Nos proponemos entonces, el estudio de las producciones de los sujetos sobre tareas que involucran parámetros donde se advierte el entrecruzamiento de distintos SMS surgidos tanto en papel y lápiz como en dos entornos tecnológicos. Observamos que el fenómeno de génesis instrumental permea toda la actividad cognitiva analizada.

En nuestra investigación a partir de los modelos de competencia formal de Drijvers (2001) y Bloedy-Vinner (2001) se decodificaron los textos producidos en el intercambio de mensajes donde los actores tienen distintos grados de competencia. El primer autor afirma: *El parámetro puede ser considerado una meta – variable: la a en $y=ax+b$ puede jugar los roles de una variable ordinaria, un fijador de posición, una cantidad desconocida o cambiante pero que actúa en un nivel más alto que el caso de una variable.* Bloedy-Vinner (2001) menciona que los parámetros se estudian tanto de manera explícita como implícita, cuando se analizan familias de ecuaciones, familias de funciones, en problemas de enunciado verbal y tienen dos componentes, uno proveniente del contexto en que se usan y el otro se refiere a los diferentes roles de los parámetros, incógnitas y variables.

El modelo de los procesos cognitivos da cuenta de la evolución de los sujetos escolares vía la identificación de tendencias cognitivas, es decir, de hechos que siempre se presentan cuando en una situación de enseñanza se transita de un estrato de un SMS más concreto a otro más abstracto.

Los modelos de enseñanza hacen uso del Geogebra; Software Dinámico de Matemáticas (DMS) que provee funciones básicas de un Sistema Computarizado de Álgebra (CAS) como la graficación de funciones, para proporcionar dos representaciones de cada objeto matemático, en sus ventanas gráfica y algebraica permitiendo una

retroalimentación inmediata entre ambas; y del sistema de aprendizaje TI-Navigator (Texas Instruments) consistente en una red inalámbrica de hasta 40 estudiantes conectados con el profesor a partir de calculadoras, que interactúan en un espacio común llamado centro de actividades donde cada individuo contribuye al colectivo con distintos objetos matemáticos.

Ambos entornos tecnológicos son de naturaleza híbrida debido a la forma en que han sido diseñados, Geogebra compuesto por funciones de un DMS y de CAS y TI-Navigator que a través de una red inalámbrica vincula un grupo de calculadoras entre sí. Esta tecnología es nueva para los sujetos de este Estudio, aunque se espera que sus mecanismos anticipadores surjan en estratos de SMS que les son familiares: las representaciones en papel y lápiz. En consecuencia, el ciclo de resolución de la situación problemática mediado por tecnologías híbridas, debe completarse de inicio a fin sin omitir ningún paso.

Por último, el modelo de comunicación advierte de la diferencia en las lecturas de mensajes emitidos por el sujeto competente en este caso el entrevistador y los estudiantes.

EL ESTUDIO

El desarrollo del montaje experimental en su fase piloto se realizó con dos grupos de estudiantes de entre 16 y 18 años del último año de bachillerato que desconocían la tecnología digital, es decir, aquella que no es exclusiva de papel y lápiz. Con el primer grupo se realizaron 7 sesiones de enseñanza con Geogebra y con el segundo grupo 10 sesiones utilizando el TI-Navigator. Antes de iniciar este montaje se efectuó una evaluación diagnóstica, donde se mostró dificultad en el uso de las distintas literales.

Se reportan únicamente situaciones relacionadas con rectas de la forma $y = mx + b$, eligiendo así los casos más sencillos con la finalidad de mostrar de la manera más clara posible la complejidad del entrecruzamiento de los distintos SMS mostrados en las producciones de los estudiantes. No obstante, a lo largo de la investigación en curso, fueron exploradas concatenaciones de tareas con objetos matemáticos más complejos.

DOS EXPERIENCIAS

Grupo 1. Geogebra. El grupo estaba formado por 25 estudiantes. Al referirnos a un nombre específico se hace notar una participación individual, al decir Grupo son afirmaciones escuchadas al unísono por la mayoría de los estudiantes. El análisis de las producciones transcritas de los sujetos se ubica debajo de cada fragmento en cursivas y se realiza bajo la lupa del MTL permeada por la aproximación instrumental.

Con el objetivo de que los estudiantes ingresen una función lineal en geogebra, visualicen la gráfica generada y logren diferenciar entre las variables y parámetros, se presenta la situación: *Un tinaco contiene una cantidad de 500 litros de agua, se comienza a vaciar por medio de un grifo que permite la salida de agua a razón de 10 litro por minuto.*

Propongan una expresión algebraica que represente la situación.

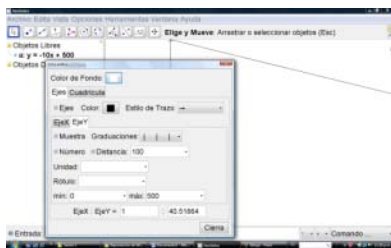
Cinco sujetos arriban primero a la expresión $y = 500 - 10x$ de manera verbal como lo hace la siguiente estudiante:

Fragmento 1

- 1: Ileana: Litros total sería y que es lo que va quedando en el tinaco, litros totales es 500 y los litros transmitidos serían 10 por minuto.
- 2: Profesor: ¿Cómo sería la expresión algebraica?
- 3: Ileana: Pues es y igual a 500 menos 10 por equis.
- 4: E: Escríbela en el pizarrón.
- 5: Ileana: $y = 500 - 10(x)$

Respecto a los **procesos cognitivos**, podemos observar que Ileana pasa de un SMS menos abstracto a otros más abstractos, ya que primero menciona la situación problemática de manera verbal, después, da una descripción entre verbal y simbólica de la expresión para finalmente escribirla en el SMS algebraico en la línea 5.

Fragmento 2. Una vez que los estudiantes han ingresado la expresión en geogebra mencionan que no ven la gráfica, a lo que uno, Gabriel, manifiesta problemas con la escala.



Se les preguntó, ¿cuáles serán los valores máximos y mínimos que debe mostrar el plano cartesiano?, una estudiante afirmó:

Carmen: en x de -1 a 55 y en y de -1 a 550.

E: ¿Porqué esos valores?

Carmen: porque se va vaciar en 50 minutos y viene desde 500, pero dar un poco más de espacio para que se vean los ejes.

Respecto a los **procesos cognitivos de génesis**

instrumental:

Al tener que visualizar la gráfica de la situación, Gabriel solicita información sobre el artefacto para poder realizar la tarea. Necesita utilizar una de las potencialidades de la herramienta: el ajuste de los rangos de la ventana gráfica. Esto exige un proceso cognitivo sobre la percepción por parte del sujeto.

Una vez colocada la configuración adecuada para visualizar la gráfica, se les pregunta sobre los litros que deben quedar en el tinaco en diferentes momentos o sobre los instantes en que el tinaco tendrá cierta cantidad de litros. Se les sugiere la introducción de un deslizador para conocer los valores obtenidos con los cálculos anteriores a partir de un punto dinámico. Un punto dinámico es un punto ubicado en la gráfica cuya naturaleza móvil es debida a que sus coordenadas son definidas en términos de variables y parámetros, en este caso son deslizadores que pueden controlar el movimiento del punto, e incluso pueden estar asociados a la misma curva donde se ubica.

Fragmento 3. Deseo que exista un punto dinámico dependiente del deslizador t y capaz de recorrer la gráfica a fin de poder verificar sus coordenadas en cualquier momento. ¿Cuáles deben ser las coordenadas del punto dinámico? Se recibieron propuestas tales como:

- 1: Jessica: $(t, 500)$
- 2: Gabriel: Se va a mover paralelo al eje de las x .
- 3: Profesor: ¿la t va tomando los valores de?
- 4: Grupo: De la variable x .
- 5: Julia: Debe ser (t, t)
- 6: Profesor: Recuerden que el punto dinámico debe recorrer la recta que representa la situación del tinaco, si t vale cero, ¿el punto debe estar en?

- 7: Grupo: (0, 500)
8: Profesor: Y si t vale 10, ¿Dónde está el punto?
9: Grupo: (10, 490)
10: Profesor: t en el punto hace las veces de x en nuestra expresión, ¿quién sería la y?
11: Julia: sería $-10t$
12: Profesor: ¿cuáles serían las coordenadas del punto?
13: Julia: (t, $-10t$)
14: Profesor: Introdúzcanlo a ver qué sucede, ¿corresponde?
15: Grupo: No
16: Gabriel: Sería (t, $-10t+500$)

Respecto a los **procesos cognitivos**, surgen generalizaciones correctas e incorrectas: *Al solicitarles la creación de un punto dinámico dependiente del deslizador t Jessica mencionó en la línea 1: que debería ser (t, 500) con lo cual no puede generar el punto que recorra la recta. Al no obtener las coordenadas correctas del punto dinámico el profesor vuelve la situación más concreta determinando algunos lugares específicos por los que debería pasar dicho punto dinámico para lograr generalizaciones del mismo, más cercanas a la generalización correcta obtenida por Gabriel.*

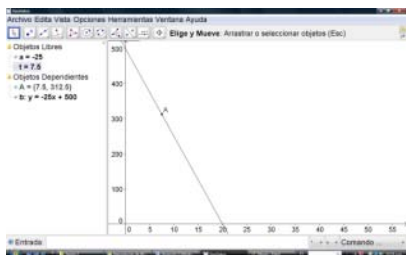
Fragmento 4. Una vez que el punto dinámico funciona correctamente sobre la gráfica se les comentó que el grifo que permite la salida de agua puede variar a fin de representarlo con un deslizador:

- 1: ¿Cómo reescribirían la expresión si el deslizador a representara el flujo del grifo?
2: Gabriel: Sería $y = ax + 500$
3: Profesor: Redefinan su expresión incluyendo al deslizador a , ¿qué sucede si cambian los valores de a ?
4: Grupo: la recta se mueve.
5: Profesor: ¿Por qué?
6: Gabriel: Porque sale más o menos agua del tinaco.
7: Profesor: Tiene sentido que a fuera -500 , ¿qué sucedería con el tinaco?
8: Julia: Se vaciaría en un minuto.
9: Profesor: ¿Por qué?
10: Julia: Porque si sustituyes 1 te da cero.
11: Profesor: ¿Qué sucede si a fuera positivo?
12: Gabriel: En vez de salir agua es como si entrara.
13: Profesor: ¿Por qué?
14: Gabriel: Porque se comenzarían a sumar litros a los 500.

Respecto a los **procesos cognitivos**, aparecen Procesos de generalización, del SMS algebraico al SMS del contexto del problema: *La inserción del deslizador a en la expresión conduce a Julia y a Gabriel a un proceso de generalización permitiéndoles explorar los casos que se podrían presentar al variar el parámetro. Los estudiantes a pesar del trabajo realizado con deslizadores y expresiones algebraicas, no pierden el sentido de la situación. Además advierten el efecto que el deslizador a tiene sobre el movimiento de la recta y pueden dar un significado al movimiento dentro del contexto del problema.*

Una vez lograda la dependencia del punto dinámico con respecto de t y la dependencia de la gráfica con respecto de a, se les solicita que vinculen ambos objetos a fin de que el

punto dinámico no salga de la recta independientemente del valor de a . Esta tarea se enfoca a la distinción entre variables y parámetros.



Fragmento 5

1: Profesor: ¿Cómo escribirían las nuevas coordenadas de A (punto sobre la recta)?

2: Gabriel: $(t, -a t + 500)$

3: Profesor: Prueben a ver si funciona.

4: Grupo: No funciona.

5: Profesor: ¿Por qué?

6: Grupo: Va al revés.

7: Profesor: Entonces, ¿cuáles deben de ser las coordenadas del punto?

8: Ileana: Es que pusimos $-at+500$ y en la gráfica tenemos $ax+ 500$

9: Profesor: ¿cómo debe ser?

10: Ileana: Igual a la gráfica, entonces es, $at + 500$ porque t representa a x .

11: Profesor: Muevan a y t para ver qué sucede, ¿cuál deslizador deben determinar primero para utilizar el punto dinámico a ó t ?

12: Gabriel: Es igual.

13: Profesor: Si pensamos que el grifo tiene un flujo de salida de agua de 25 litros por minuto y deseamos conocer el agua que ha salido en 7 segundos y medio. ¿Qué deslizador utilizan primero?

14: Gabriel: Primero ajusto a en menos 25 y luego t en 7.5

15: Profesor: Entonces en la expresión de las coordenadas del punto dinámico, ¿qué representa t y qué representa a ?, ¿en qué se parecen y en que son diferentes?

16: Ileana: t representa x y a es una constante que podemos ajustar según nos convenga, pero que primero debemos determinarla antes de usar a t .

Respecto a la **competencia formal**, se manifiesta una evolución en distintos niveles: *Se observan dos expresiones algebraicas en las que intervienen tanto variables como parámetros, una de ellas es $y = ax + 500$ y la otra la correspondiente al punto dinámico $(t, at + 500)$ en la cual pueden relacionar que t y x representan la mismas variación y el deslizador a es común en ambas. Es muy importante que puedan verbalizar que para poner a trabajar t y x con la finalidad de conocer algún valor específico de la situación, primero deben determinar el valor de a y llegan a decir, es una constante que podemos ajustar según nos convenga.*

Respecto al **modelo de comunicación**: *Son evidentes diálogos de la forma Profesor – Grupo, de Profesor – Alumno, e incluso diálogos Alumno – Grupo/Profesor, pero no se presentaron diálogos de la forma Alumno – Alumno ni siquiera mediados por el profesor. Observe que la noción de parámetro se transforma en una concepción de naturaleza más continua que discretizada debido a las ventajas dinámicas de geogebra.*

Grupo 2. TI-Navigator.

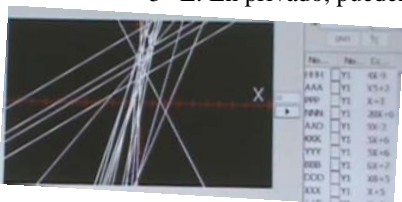
El propósito de la tarea fue explorar la influencia de los parámetros m y b en la expresión de la recta $y=mx + b$, determinar los valores de los parámetros m y b de una recta que pasa por cuadrantes determinados y las condiciones de paralelismo entre dos rectas respecto a los parámetros m y b . El análisis de los fragmentos se realizará al final de la transcripción de cada diálogo.

El estudio de los parámetros por medio de tecnologías híbridas

- 1 E: Contribuyan con la expresión algebraica de una recta que pase por los cuadrantes I, II y III.
- 2 Alumno: Profesor, ¿puedo corregir mi recta?
- 3 E: Dense cuenta que en su calculadora tiene dos opciones en la pantalla, **SEND** y **GRAPH**, ¿para qué les sirve cada opción? Y ¿en qué les puede ayudar para la tarea?
- 4 Alumna: **SEND** es para enviarla y **GRAPH** es para graficarla antes de enviarla y corregir si es necesario.

Respecto al **proceso cognitivo de génesis instrumental**, se observa la necesidad de obtener información sobre la calculadora a fin de corregir un error avistado por un estudiante, es decir, se genera un proceso cognitivo de percepción, en el que se destaca el potencial del artefacto en la ayuda de la actividad desarrollada por el estudiante.

- 5 E: En privado, pueden ver sus intentos antes de mostrarlos a los demás.



6 E: Díganme, ¿cuál o cuáles no están cumpliendo?

7 Alumna: La que está inclinada hacia la izquierda.

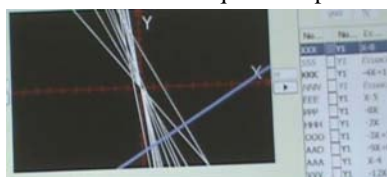
8 E: ¿Cuál es su ecuación?

9 Grupo: $y = -3x + 5$

10 E: Ahora van a contribuir con la ecuación de una recta que solamente pase por el cuadrante II y IV.

11 E: Detenemos la actividad y díganme cuáles si cumplieron y cuáles no.

12 Alumno: La que tiene pendiente positiva.



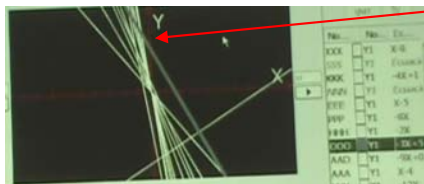
13 E: ¿Cuál es su ecuación?

14 Alumna: $y = x - 8$

15 E: ¿Por qué cuadrantes está pasando esa recta?

16 Grupo: Por el I, IV y III

17 E: A ver, ésta que estoy señalando, ¿en qué falló?



18 Grupo: El más cinco hace que la gráfica no pase por el origen.

19 E: ¿Por qué?

20 Alumna: hace que se recorra hacia arriba.

21 E: ¿y si fuera $y = -3x - 5$, qué sucedería?

22 Grupo: Se recorre hacia abajo.

23 E: ¿entonces la m qué controla?

24 Grupo: Su inclinación.

25 E: ¿y el parámetro b qué controla?

26 Alumno: Qué tan lejos esté del origen la recta.

27 E: A ver explícamelo mejor.

28 Alumno: Pues controla qué tan arriba o qué tan abajo está la recta del origen.

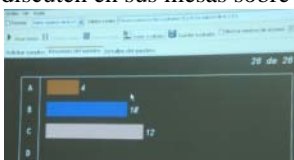
Respecto a los **procesos cognitivos**: surge una generalización del SMS algebraico al SMS geométrico. En la tarea anterior sólo un estudiante pudo relacionar el efecto de b en $y=mx+b$, y advertir la existencia de un patrón en el comportamiento de la gráfica. Además, se observa un proceso de generalización donde el grupo relaciona la medida de la pendiente con la inclinación de las rectas presentadas.

29 E: Les voy a enviar una encuesta a sus calculadoras; Si una recta pasa por los cuadrantes II y IV los valores de m y b son...elijan una opción.

Las opciones de respuesta del sondeo fueron mostradas en un pizarrón aparte:

a) $m = 0, b < 0$; b) $m > 0, b = 0$; c) $m < 0, b = 0$; d) $m = 0, b > 0$

Respecto al **modelo de comunicación**: Mientras se completa el sondeo los estudiantes discuten en sus mesas sobre la opción de respuesta a elegir, argumentan sus elecciones:



30 E: La mayoría elige la opción c como correcta afirmando: m es menor que cero y b igual a cero, pero también hay un grupo fuerte que dice que la correcta es la opción b en donde m es mayor que cero y b igual a cero.

31 E: ¿Cómo determinamos qué opción era la correcta?

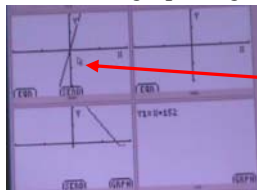
32 Grupo: Vamos a la gráfica y vemos los que están bien.

33 E: ¿Cuál es la opción correcta?

34 Grupo: La c .

35 E: Muy bien, ahora van a contribuir con la ecuación de una recta que solo pase por los cuadrantes II, III y IV.

36 E: Vamos a ver qué están haciendo en su espacio privado. Por ejemplo, ¿qué sucede con este grupo de gráficas?



Esta es la imagen en el navegador cuando pedimos la *captura* de las pantallas de las calculadoras de los estudiantes, por ejemplo el estudiante ubicado por las letras MMM está graficando una expresión antes de enviarla al espacio público.

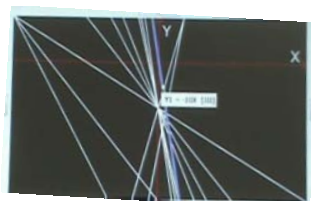
37 Grupo: Están mal pero todavía pueden corregir.

Respecto a los **procesos cognitivos de génesis instrumental**: La potencialidad que les permite cambiar sus gráficas antes de enviarlas al espacio público que fue explorada en la actividad anterior, ahora ya la han asimilado y la utilizan a su conveniencia, a fin de que si no están seguros en alguna tarea, pueden retroalimentarse ellos mismos en el espacio privado y enviar al espacio público hasta sentirse seguros. Esto conduce a un proceso de generalización en la influencia de los parámetros en el comportamiento de la gráfica.

38 E: Vamos a ver cómo quedaron sus gráficas en el centro de actividades.

39 E: A ¿cuántos no están cumpliendo?

40 Grupo: Parece que cuatro.



294

El estudio de los parámetros por medio de tecnologías híbridas

- 41 E: A ver éste que señale por qué no cumple
42 Grupo: Le falta menos algo. ($y = -10x$)
- 43 E: A ver les voy a enviar el siguiente sondeo: Si la recta pasa por los cuadrantes II, III y IV los valores de m y b son: Las opciones de respuesta son:
a) $m < 0, b = 0$; b) $m < 0, b < 0$; c) $m > 0, b > 0$; d) $m > 0, b = 0$

Iniciamos el sondeo.

Discusión grupal: A1 (alumno uno), A2 (alumno dos)...

Alumna 1: Creo que es la c pero como b es mayor que cero pasaría por arriba del origen.

Alumna 2: Si pero la que debe ser negativa es la pendiente ya que si no, no pasaría por el cuadrante dos.

Alumna 3: Entonces es la a.

Alumna 2: No porque si b es cero pasa por el origen.

Alumna 4: Pero entonces la b debe ser negativa para que baje.

Alumna 2: Entonces la correcta es la b ya que la m y la b deben ser menores que cero.

Las cuatro alumnas: Si esa debe ser la correcta.

Respecto al **de comunicación**: *Existe un intercambio de sujetos que tiene distintos grados de competencia ya que la alumna 2 distingue las relaciones de orden que permiten a los parámetros cumplir con las condiciones presentadas.*



44 E: Veamos el resumen del sondeo.

45 E: La mayoría dicen que la correcta es la b.

46 Grupo: Si.

47 Alumna: Porque la pendiente y la ordenada deben ser

menores que cero.

48 E: ¿Por qué la pendiente debe ser negativa?

49 Grupo: Para que pase por el cuadrante dos.

50 E: ¿Por qué la b debe ser negativa?

51 Alumna: Para que no pase por el centro y pueda pasar por los cuadrantes tres.

En este sondeo se observa una tendencia más definida que en el anterior, pues un número mayor de estudiantes se han dado cuenta de los efectos que m y b pueden tener sobre una recta. Al parecer existe una evolución de los niveles de competencia del sondeo anterior a éste.

Podemos afirmar que vía el TI-Navigator la comunicación es alterada al colocar a cada estudiante en una dualidad entre lo público y lo privado, espacio este último que poco a poco se desvanecía y todo se volvía público, por lo que ningún sujeto quedaba fuera de la comunicación. Esto parece influir en la multiplicación de casos de éxito ya que las contribuciones en el espacio virtual común alentaba al debate verbal y el apoyarse en los errores potencializaba la creación de significados más formales de los parámetros m y b en $y = mx + b$.

Estamos finalizando el Estudio Principal donde hemos tomado en cuenta las aportaciones de la fase piloto descrita anteriormente, y nos encontramos analizando el

tránsito de lo cognitivo perceptual a lo cognitivo formal a través del uso de las tecnologías híbridas propuestas. En este par dialéctico, lo cognitivo perceptual está referido al aprendizaje vía los sentidos, fundamentalmente la vista, aunque está involucrado el movimiento de todo el cuerpo produciéndose en el sujeto un acto de reflexión sobre la observación de lo que ocurre en el espacio virtual de la pantalla. En contraposición, lo cognitivo formal revela los procesos de generalización y abstracción que conducen al conocimiento pleno del objeto matemático en cuestión.

Cabe señalar que en el Estudio Principal, ambas tecnologías son experimentadas en la misma población por ser de naturaleza complementaria. Pretendemos arribar a una propuesta de enseñanza sobre la problemática analizada, donde el profesor basado en investigaciones sobre el uso de la tecnología, diseñe secuencias didácticas de tareas mediante trayectorias hipotéticas de aprendizaje de los estudiantes.

Referencias

- Artigue, M. (2002). "Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work". *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 7(3) P. 245 – 274
- Bloody-Vinner, H. (2001). *Beyond Unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra*", R. Sutherland et al. (eds.), *Perspectives on school Algebra*, 177-189. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra environment. H. Chick et al. (eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Vol. 1. The University of Melbourne, Australia, pp, 221-227.
- Fernández, A. y Puig, L. (2002) Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. *Actas Simposio de la SEIEM*. Universidad de La Rioja. Logroño.
- Filloy, E; Rojano, T y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and Empirical Approach*. Mathematics Education Library. Springer.
- Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El Estudio Teórico Local del Desarrollo de Competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), 327-342.
- Fortuny, J.M., Iranzo, N., L. (2010). Geometría y tecnología. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds), *Investigaciones en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida: SEIEM
- Küchemann, D. (1981). Algebra, en K. Hart (ed), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, Murray, London. Pp.102-119
- Morera, L., & Fortuny, J.M. (2010). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías. En *Actas del 14º Simposio de la Sociedad Española de Investigación de Educación Matemática*. Lérida. SEIEM Pp. 435-450