INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO Y PRIMEROS CURSOS DE UNIVERSIDAD[39]

Camacho Machín, M.

Universidad de La Laguna

Resumen. *En este trabajo presentamos una revisión de las investigaciones que se han venido realizando en los últimos 20 años, tanto a nivel internacional como en nuestro país, en el campo de la Didáctica de la Matemática en la enseñanza post-obligatoria. En primer lugar, analizamos los estudios internacionales realizados en el seno del International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) y especialmente en el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), al objeto de mostrar un panorama general de la investigación en este ámbito. Posteriormente abordaremos los trabajos presentados en los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIM) y, en particular los del Grupo de Investigación Didáctica del Análisis Matemático, tomando como elemento organizador el contenido matemático. Finalmente estableceremos algunas conclusiones generales del estudio elaborado.*

Palabras clave: Investigación en Educación Matemática, Bachillerato y Universidad, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Abstract. *A review of research performed over the past 20 years, both internationally and in our country, in the field of mathematics education in post-compulsory education is presented here. Firstly, we analyze international studies conducted by the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) and especially the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), in order to give an overview of research in this area. We then analyze the papers presented at the Symposia of the Spanish Society for Research in Mathematics Education (SSRME), in particular the Research Group of Mathematical Analysis Education, using the mathematical content as organizing element. Finally, we make some general conclusions arising from the study*.

Keywords: Research in Mathematics Education, post-compulsory education, Spanish Society for Research in Mathematics Education

[39] Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación EDU 2008-05254 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Plan Nacional I+D+i del Gobierno de España.

INTRODUCCIÓN

Sintetizar los avances de la investigación en cualquier ámbito no es una tarea fácil y resulta aún más complicado hacerlo en un campo de investigación emergente y con tanta variabilidad de paradigmas de investigación como es la Didáctica de la Matemática en el bachillerato y universidad. Artigue (2001, p. 207) justifica esa dificultad en términos de:

- La falta de unificación del campo de la investigación, que hace difícil la síntesis y uso de los resultados, aunque la diversidad existente sea un elemento enriquecedor.
- La dependencia parcial de la investigación de los diferentes entornos sociales y culturales donde se desarrollan, que hacen que tengan un campo de validez limitado
- La dificultad de convertir los resultados de la investigación en *estrategias educativas efectivas.*

Para la preparación de esta revisión de la investigación en nuestro país, hemos tratado de encontrar algunos elementos comunes que nos permitan organizar la información de que disponemos, derivada fundamentalmente de las ponencias y comunicaciones publicadas en las Actas de los catorce Simposios celebrados por la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Hemos considerado oportuno analizar también las comunicaciones que se presentan en los Grupos de Investigación que son posteriormente publicadas y entregadas en el Simposio siguiente. Estas publicaciones en soporte electrónico, que se entregan al año siguiente de presentadas, se demoran en el tiempo con la intención de que se incorporen en ellas las aportaciones de las discusiones que se plantean en las sesiones que se desarrollan durante las reuniones de dichos Grupos. Como referencia complementaria, hemos hecho una revisión de las diferentes Tesis Doctorales que se han defendido en estos últimos quince años, que de una manera o de otra constituyen el lugar donde convergen las diferentes investigaciones presentadas en el foro de los Simposios. Sabemos que, en muchos de los casos, los diferentes Proyectos de Investigación tanto del Plan Nacional con los de las diferentes Autonomías y Universidades hubieran ayudado a hacer un análisis más exhaustivo que el que hemos realizado, pero la no disponibilidad de esas fuentes no nos ha permitido hacer referencia a ellos.

Dividiremos el trabajo en tres partes. En la primera parte presentamos una revisión de algunos estudios internacionales que se han hecho en las dos últimas décadas. Pensamos que las fuentes originales de nuestros trabajos se encuentran en los trabajos de investigación que se han realizado en el ámbito internacional. La segunda parte de este trabajo se centra en el análisis detallado de las diferentes investigaciones que han sido presentadas y discutida en los Simposios, en particular en el ámbito del Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático. Terminaremos, estableciendo algunas consideraciones generales sobre el análisis desarrollado.

UN PANORAMA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN EN LOS NIVELES SUPERIORES.

Desde principio de la década de los noventa y casi con una periodicidad de un lustro se han publicado diversos estudios internacionales, que tratan de sintetizar, con enfoques generalmente diferentes, las investigaciones que se han desarrollado a nivel internacional del campo de la Educación Matemática.

El *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*[40] , publicado en el año 1992 constituyó, desde nuestro punto de vista, uno de los primeros referentes básicos para la investigación en el campo de la Didáctica de la Matemática. Pese a que no había un capítulo específico dedicado a la enseñanza y aprendizaje del Bachillerato y la Universidad, el capítulo de D. Tall titulado *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof* (Tall, 1992) es el que se refiere más directamente a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en estos niveles. En él se muestra que los principales temas de investigación hasta ese momento eran de carácter cognitivo, centrados en: la identificación de los procesos cognitivos que subyacen en el aprendizaje de las matemáticas de los niveles avanzados, las relaciones de tales procesos con los procesos que surgen en los niveles más elementales y, finalmente, en la comprensión de las dificultades de los estudiantes con los conceptos avanzados de matemáticas. Posteriormente, se publicaron otros "*Handbooks*" en los años 1996[41], 2002[42], 2006[43] y por último el del año 2007[44].

En relación con el *Handbook* del PME (Gutiérrez y Boero, 2006), se observa que no existe un capítulo específico dedicado a la revisión de la investigación en los niveles superiores de la enseñanza, sin embargo se puede considerar que hay tres capítulos que mantienen una relación directa con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en alumnos de 17 a 20 años. No obstante, los capítulos que mayor conexión tienen con estos tópicos son los de Harel, Selden y Selden (2006), Mariotti (2006) y Ferrara, Pratt y Robutti (2006) que se refieren respectivamente al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA[45]), a la demostración y la prueba y finalmente al uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje, en particular para la enseñanza del Álgebra y del Cálculo. Por motivos de espacio, haremos una breve descripción de la estructura del primero de los capítulos citados. En él, los autores se centran inicialmente en establecer la distinción entre dos de los términos más utilizados en el campo de investigación del PMA que son *concept image* y *concept definition* y señalan que mientras que el término *concept image* se refiere a la "estructura cognitiva total asociada con un concepto" que se construye durante el paso de los años y mediante la experiencia con los conceptos matemáticos, el *concept definition* se refiere principalmente a la expresión verbalizada del concepto, que puede ser *personal* o *formal* (la que ha sido institucionalizada por la comunidad matemática). Posteriormente, dedican una sección a la definición, destacando la importancia que tienen las definiciones para comprender los conceptos matemáticos y aportando dos dimensiones principales a las definiciones una en relación con la prueba y otra como organizador de los conceptos. La sección 4 analiza, en una primera parte, la construcción de los conceptos matemáticos en el individuo, estableciendo un paralelismo entre un conocimiento operacional (proceso) de un concepto matemático en términos de los aspectos de cálculos y procedimientos y la

[40] Grouws, D. A. (Ed.) (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.
[41] Bishop, A.J.; Clements, K; Keitel, K.; Kilkpatrick, J. y Laborde, C. (Eds.) (1996) *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
[42] English, L.I. (Ed.) (2002) *Handbook of International Research in Mathematics Education.* London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
[43] Gutiérrez, A.; Boero, P. (Eds.)(2006) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* Rotterdam: Sense Publishers.
[44] Lester, F.K. (Ed.)(2007) *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte: Information Age Publishing
[45] PMA son las siglas que utilizaremos para el Advanced Mathematical Thinking (AMT)

concepción estructural (objeto) del mismo más formal y estática. A continuación se centra en la breve descripción de la aproximación propuesta por la teoría APOS[46] y termina la sección destacando el papel que juegan los símbolos como puente de conexión entre los aspectos operacional (proceso) y estructural (objeto) de un concepto matemático, que desemboca en el término *procepto* como una combinación de los tres elementos: proceso, concepto y símbolo[47]. Primeramente el alumno se encuentra el concepto matemático como un proceso, con los símbolos se introduce el producto de ese proceso y finalmente ese simbolismo lleva al significado dual tanto del proceso como del producto. En los últimos años ha surgido una línea de investigación dedicada a estudiar las prácticas y productos de los matemáticos "profesionales" (docentes o investigadores), (Misfeldt, 2003), dado que el análisis de tales prácticas y productos pueden ayudar a entender algo más de los que significa el PMA. Por ello, en la sección 5, se revisan algunas investigaciones en esta línea que se centran principalmente en el análisis de la forma en que los matemáticos escriben sus investigaciones, la manera en que resuelven problemas (Hitt, Barrera y Camacho, 2010), las estructuras mentales que utilizan para realizar las demostraciones, tanto cuando aprenden nuevos conceptos e incluso como cuando enseñan matemáticas (Moreno, 2001; Moreno y Azcárate, 2003). Finalmente, en el último capítulo proponen temas futuros de investigación: En primer lugar, proponen investigaciones que tengan en cuenta consideraciones sociales y culturales sobre la enseñanza y aprendizaje del PMA, dado que la gran mayoría de las que aparecen el los *Proceedings* de los PME se realizan desde las perspectiva cognitiva, es esencial no sólo este tipo de investigación sino la búsqueda de modelos que expliquen el comportamiento de los estudiantes, se debe profundizar también en el análisis de las actuaciones de los matemáticos, la transición de la secundaria a la Universidad y por último y, finalmente, otro de los temas de investigación que proponen es sobre la prueba y la demostración.

El *Handbook* más reciente (Lester, 2007) recoge en el capítulo 22 de una manera acertada un análisis de la investigación que se ha desarrollado en lo que podemos considerar que es el campo que nos ocupa (Artigue, Batanero y Kent, 2007). Pese a que en el título habla del "post-secondary level", pensamos que se adecua perfectamente a nuestro propósito. En esta revisión, se presenta la evolución generada en los años posteriores al primer *Handbook* a partir de las áreas temáticas clásicas de la investigación en estos niveles como son el Análisis Matemático y el Álgebra Lineal y añadiendo dos temas emergentes relacionados con las Matemáticas en los cursos de Ingeniería y la estocástica los que no atenderemos por motivos prácticos. Las referencias a las Tecnologías de la Información y Comunicación aparecen incluidas en la discusión de todo el capítulo. El capítulo aparece estructurado en cuatro partes y pasaremos a describir brevemente a continuación los aspectos más relevantes para nuestro trabajo.

La primera parte, se dedica a presentar una visión general de las primeras investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje en el nivel superior que trataban de caracterizar el PMA en relación con las formas más elementares del pensamiento matemático y se clarifican cuáles son los procesos mentales que permiten a los

[46] Que son la iniciales de "Action-Process-Object-Schema". En España, algunos autores la denominan APOE (la última sigla se corresponde con la traducción española de Schema=Esquema). Más adelante se explicitará un poco más sobre su fundamentación.

[47] En (Gray y Tall, 1991) y en (Azcárate y Camacho, 2003) se hacen una descripciones más precisas de estos términos.

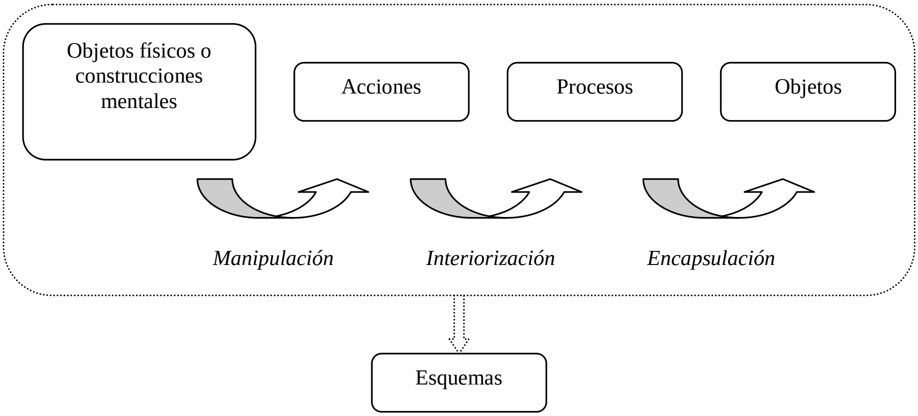
estudiantes alcanzar el PMA, atendiendo a las dificultades que se encuentran para desarrollar tales procesos. Se discute sobre algunos de los constructos teóricos fundamentales ya mencionados como son el *concept imagen* y la *concept definition*, y destacan los principales aspectos de la noción de obstáculo epistemológico de Bachelard importada por Brousseau al campo de la Educación, como aquélla que permite entender mejor los errores que cometen los estudiantes, generalmente los más resistentes, que provienen no de una falta de conocimientos sino de un conocimiento asimilado que dificulta la comprensión de nuevos conocimientos. Son varios los obstáculos descritos por los investigadores en la década de los noventa, Artigue sintetiza, a partir de varias investigaciones los siguientes:

- el significado cotidiano de la palabra "límite", que induce concepciones resistentes del límite como una barrera o el último término de un proceso, o que tiende a restringir la convergencia a la convergencia monótona;
- la sobre-generalización de propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos, siguiendo el principio de continuidad enunciado por Leibniz;
- la fuerza de la geometría de las formas, que impide a los alumnos identificar claramente los objetos implicados en el proceso límite y su topología subyacente. Esto hace que para los alumnos sea difícil apreciar la interacción sutil entre los marcos numérico y geométrico en los procesos límite. (Artigue, 2001, p. 211)

También la dualidad proceso-objeto de Sfard y Dubinski jugó en los años noventa un papel importante en las investigaciones realizadas con estudiantes de 17 a 20 años. La teoría APOS que fue introducida por Dubinsky y que está basada en la teoría de Piaget, trata de modelizar las construcciones mentales que intervienen en el aprendizaje de los conceptos teniendo en cuenta que:

> ... comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar *acciones*; las acciones son luego interiorizadas para formar *procesos* que son después encapsulados para formar *objetos*. Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos a partir de los cuáles fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en *esquemas* (Asiala et al., 1996, p. 8).

El esquema siguiente refleja el modelo que propone la Teoría APOS para la construcción de los conceptos



Esquema 1.1.2: Conceptualización según la Teoría APOS (Reproducido de Perdomo, J. (2010), p. 10)

(Artigue, Batanero y Kent, 2010) señalan que durante los años noventa se lograron avances importantes en la investigación dado que, por ejemplo, se consiguió estructurar una forma de interpretar los procesos de aprendizaje de los estudiantes y diseñar alternativas para detectarlas. Sin embargo, consideran como limitaciones que los resultados obtenidos estuvieron concentrados en pequeñas áreas de la educación post-obligatoria, los constructos teóricos establecidos no fueron integrados en estructuras didácticas más globales que conectases los fenómenos de enseñanza y aprendizaje. Finalmente otra limitación para los autores es que esos constructos pertenecían exclusivamente a perspectiva cognitiva.

(Artigue, Batanero y Kent, 2007) muestran como han evolucionado las ideas sobre el PMA:

- el afianzamiento de las aproximaciones basadas en la dualidad objeto-proceso,
- el impacto de algunas aproximaciones cognitivas nuevas
- la integración de aproximaciones más globales.

Afirman los autores de la complementariedad de tales aproximaciones para “entender la interacción entre el individuo y el colectivo en los procesos de enseñanza y aprendizaje y sustentar los diseños didácticos”.

En relación con la evolución de las ideas sobre la naturaleza del PMA, se puede decir que ha estado centrada principalmente sobre a qué hace referencia el término “avanzado”, si al pensamiento, a las matemáticas o a ambos (Selden y Selden, 2005). De esta forma han surgido dos perspectivas, una centrada en las matemáticas, identificada en inglés con las siglas A-MT y otra enfocada hacia el pensamiento matemático, denotada AM-T (Zazkis y Applebaum, 2007). Esta es una cuestión que se retoma cada cierto tiempo y que aún no está resuelta, pero que ha dado lugar a la publicación de diversos trabajos sobre el tema. En particular, la revista *Mathematical Thinking and Learning* dedicó un monográfico, en el año 2005, a esta discusión. En este monográfico, Harel y Sowder (2005) se plantean qué significa que el pensamiento matemático sea avanzado (reescribiendo el término Pensamiento Matemático Avanzado como Pensamiento-Matemático Avanzado[48], P-MA) y estableciendo que el pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo involucra al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico. El nivel de adquisición de una forma de pensamiento por parte de un individuo queda determinado por la manera en que el individuo ha superado dichos obstáculos. (Harel y Sowder, 2005, pp. 34-35)

En relación con el afianzamiento y desarrollo de las aproximaciones existentes, se puede considerar que la evolución de la Teoría APOS ha resultado importante en los últimos años, debido principalmente al trabajo de varios grupos de investigación relacionados de una manera u otra con el grupo RUMEC. En nuestro país, es uno de los marcos de referencia más utilizados en las investigaciones realizadas en los últimos años en relación con la enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático, como veremos más adelante. El análisis teórico de los conceptos matemáticos que se denomina *descomposición genética del concepto*, constituyen la base para el diseño de secuencias de enseñanza para experimentar con los alumno. La mayor evolución ha venido en relación con la parte que tiene que ver con el "esquema". (Dubinski y McDonald, 2001, p. 277) señalan que un esquema para un cierto concepto matemático es una colección individual de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados con algunos principios generales para formar una estructura en la mente del individuo que puede ser retomada en una situación problemática relacionada con el concepto

Algunas dificultades encontradas a la hora de explicar las investigaciones realizadas bajo esta teoría, en particular en lo que concierne a la construcción de esquemas, motivaron una reconsideración de este término, distinguiéndose en la actualidad tres niveles en el desarrollo del esquema de un concepto: *Intra*, *Inter* y *Trans*

- En el nivel de desarrollo *Intra* el estudiante se centra en acciones, procesos y objetos individuales, de forma aislada con respecto a otros aspectos cognitivos de naturaleza similar.
- El nivel *Inter* se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre esos aspectos cognitivos.
- En el nivel *Trans* el individuo construye una estructura subyacente que permite comprender las conexiones establecidas en el nivel *Inter* y da cierta coherencia al esquema de manera que el individuo puede decidir cuándo y cómo resulta útil el esquema.

Con este enfoque también se han elaborado y probado diseños de enseñanza, ligados al aprendizaje cooperativo (Artigue, Batanero y Kent, 2007). El proceso de diseño de las secuencias de enseñanza basadas en esta teoría comienza con la descomposición genética del concepto a enseñar, reflejando qué significa comprender ese concepto y cómo puede un estudiante construir o desarrollar esa comprensión. Con ese análisis se propone una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante debería realizar para desarrollar su comprensión del concepto.

En el proceso de enseñanza se hace pasar a los estudiantes por situaciones donde tengan que afrontar sus lagunas conceptuales y tratar de darles sentido involucrándose en actividades como resolver problemas o responder preguntas, de forma individual o en grupo. Uno de los enfoques pedagógicos que se utiliza es el "Ciclo de Enseñanza ACE.

[48] En inglés: Advanced Mathematical-Thinking (AM-T).

Los estudiantes trabajan en grupo en todas las sesiones. Los tres componentes del ciclo son: actividades, discusiones de clase y ejercicios. Las actividades se desarrollan en las salas de ordenadores y consisten en tareas de programación diseñadas para promover construcciones mentales específicas, con base en el análisis teórico del concepto realizado previamente. El objetivo de estas actividades es que los estudiantes desarrollen una experiencia con el concepto matemático que se va a tratar en las clases posteriores. En las discusiones de clase los estudiantes trabajan en equipo para responder, con lápiz y papel, a cuestiones basadas en las actividades que previamente se han realizado en la sala de ordenadores. El profesor guía las discusiones que se producen en los grupos con el objetivo de que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que realizaron con el ordenador y los relacionen con los cálculos que han hecho en clase. En algunas ocasiones el profesor interviene, introduciendo definiciones o explicaciones para integrar o aclarar los aspectos que se han discutido.

El ciclo se completa con una serie de ejercicios que se asignan a los estudiantes como trabajo de casa. El objetivo de estos ejercicios es reforzar las ideas que los alumnos han construido, que utilicen las matemáticas que han aprendido o incluso comenzar a pensar en situaciones que se abordarán más adelante.

La evolución de las ideas de D. Tall ha sido independiente a las teorías de Sfard o Dubinsky, en lo que al desarrollo del conocimiento matemático se refiere. Tall (2004) distingue tres vías por las que se produce este desarrollo que son distintas pero están interrelacionadas y se corresponden con tres “mundos matemáticos”. Cada individuo transita por estos tres mundos de una manera diferente.

El primer camino se basa en la *percepción* del mundo que tenga el individuo, refiriéndose a lo que el individuo piensa sobre las cosas que percibe y siente, tanto en el mundo físico como en su propio mundo mental de significados. A través de la reflexión y el uso de un lenguaje cada vez más sofisticado, el individuo puede centrarse en aspectos de su experiencia sensorial que le permita imaginarse nociones que no existan en el mundo exterior, tal como una línea perfectamente recta. Para Tall este sería el “conceptual-embodied world”, que se podría interpretar como “mundo de los conceptos personificados”. El segundo mundo es el de los *símbolos* que se utilizan en aritmética, álgebra o cálculo para manipular y calcular. El paso por este mundo comienza con las acciones (como contar) que son encapsuladas como conceptos, utilizando símbolos que permitan pasar, sin esfuerzo, de los procesos para hacer matemáticas a los conceptos para pensar en matemáticas. A este mundo lo denomina “proceptual-symbolic world”, que se puede interpretar como “el mundo de los proceptos”. El tercer mundo se basa en las *propiedades*, expresadas en términos de definiciones formales que se utilizan como axiomas para especificar estructuras matemáticas como “grupo”, “espacio vectorial”, etc. Este sería el “formal-axiomatic world” o el “mundo formal”. En este mundo se activa la experiencia previa del individuo, trabajando con objetos que no resultan familiares sino con axiomas que se formulan cuidadosamente para definir estructuras matemáticas en términos de propiedades específicas. Dentro del sistema de axiomas se pueden definir nuevos conceptos y deducir sus propiedades para así construir una teoría coherente y lógica.

Tall (2007) relaciona los dos primeros mundos con las matemáticas elementales y el tercero, el “mundo formal” con el PMA. Uno de los puntos de interés en esta teoría es cómo se produce la transición hacia ese “mundo formal”, que resulta tan complicada para muchos estudiantes. (Artigue, Batananero y Kent, 2007) señalan que muchos estudiantes podrían conseguir acceder a ese mundo de las matemáticas formales trabajando previamente en los otros dos mundos definidos por Tall, el de la percepción y el de los *proceptos*.

Las aproximaciones epistemológicas se pueden considerar complementarias a la anterior y se centran más en planteamientos más abstractos como los del Álgebra Lineal. (Dorier, 2000), muestra la importancia del análisis epistemológico de los conceptos para entender la complejidad de esa abstracción y para presentar situaciones más prácticas para el aprendizaje de esos conceptos.

En relación con la integración de aproximaciones más globales, (Artigue, Batanero y Kent, 2010) se refieren a una aproximación a la enseñanza y aprendizaje en el nivel post-secundario que toma en cuenta prácticas socioculturales e institucionales.

Estas investigaciones están sustentadas en diferentes marcos teóricos que tienen en común el hecho de considerar que los objetos matemáticos emergen a partir de prácticas humanas que pueden ser institucionales y socioculturales, entendiendo por *institución*, cualquier tipo de estructura formal o informal que organiza o condiciona nuestras actividades sociales y culturales. De esta forma, cada institución desarrolla una idea específica de qué significa conocer un objeto matemático, definiendo un conjunto de normas institucionales para el conocimiento. Así, la relación que cada individuo establece con los objetos matemáticos surge a partir de las prácticas institucionales y las normas que se han experimentado en relación con dicho objeto matemático. Desde esta perspectiva, resulta fundamental comprender las normas y prácticas institucionales para comprender los procesos de aprendizaje. Por otra parte, la mediación entre lo social y lo cultural desempeña un papel importante y las herramientas semióticas son fundamentales en esta mediación, debido a la dimensión semiótica de la actividad matemática.

(Cobb y Yackel, 1996) conectan las perspectivas sociocultural y el constructivismo para analizar los procesos que se producen en el aula y el diseño de experimentos dentro del aula. Este marco es utilizado por Rasmussen y sus colaboradores en el desarrollo de un proyecto para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, el proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equations), en el que se analiza la influencia que tienen las prácticas que se realizan en el aula, como comunidad de aprendizaje, en el conocimiento matemático de cada individuo. (Rasmussen et al., 2005).

Otro ejemplo de este paradigma de investigación es el enfoque antropológico iniciado por Chevallard (1996) en el que las prácticas de las que emerge el conocimiento se analizan utilizando la noción de *praxeología*, que incluye cuatro componentes: tareas, técnicas, tecnología y teoría. Existen numerosas investigaciones realizadas empleando este marco. Praslon (2000), por ejemplo, caracteriza las *praxeologías* involucradas en la noción de derivada en dos instituciones, la enseñanza secundaria y la universitaria, encontrando que parte de las dificultades en la transición de un nivel a otro pueden ser explicadas en función de las prácticas que se dan en cada uno de ellos. Un enfoque instrumental del marco antropológico analiza cómo afecta el uso de CAS a las componentes técnicas y tecnológicas de las praxeologías matemáticas (Guin, Ruthven y Trouche, 2004). Este enfoque presta especial atención a la *génesis instrumental*, proceso por el que una herramienta, en este caso CAS, se transforma en un instrumento matemático, tanto para el individuo como para la institución. Las investigaciones muestran que el uso de tecnología define lo que aprendemos y la forma en que lo aprendemos, aspecto que debe tenerse en cuenta, en términos de prácticas institucionales, valores y normas, para integrar la tecnología, de manera eficiente, en la enseñanza de las matemáticas.

El enfoque ontosemiótico (EOS) propone que la comprensión de un concepto emerge de las prácticas que resultan significativas para el estudiante vinculadas con la repetición de la resolución de problemas específicos para ese concepto y distinguen entre la dimensión institucional del conocimiento, formada por los significados matemáticos propuestos o marcados por una institución particular, y su dimensión personal, referido al significado considerado por una persona concreta de esa institución. En este modelo, el significado (comprensión) de cualquier objeto matemático se concibe como un sistema complejo, compuesto por diferentes elementos interrelacionados (Godino, 2003): (i) los problemas o situaciones a partir de las que emergen los objetos, (ii) las representaciones de los datos y los conceptos, (iii) los procedimientos y las estrategias para resolver los problemas, (iv) las definiciones y propiedades y (v) los argumentos y demostraciones, incluyendo argumentos de tipo deductivo e informal. De esta forma, distinguen dos componentes de las matemáticas: la fenomenológica o *praxis* (Chevallard, 1999), formada por los problemas matemáticos y las acciones para resolverlos y el *logos*, componente teórica o discursiva formada por las definiciones, las propiedades y los argumentos.

La investigación en el Bachillerato y la Universidad en los Simposios de la SEIEM: Didáctica del Análisis Matemático.

Una revisión de los trabajos presentados en los Simposios de la SEIEM muestra que el mayor número de investigaciones desarrolladas en torno al Bachillerato y la Universidad. De de unas sesenta ponencias y comunicaciones que hemos recopilado, aproximadamente las tres cuartas partes están dedicadas a conceptos propios del Análisis Matemático. Conviene señalar que la mayoría de estos trabajos han ido encaminados hacia la elaboración de trabajos de doctorado, por lo que hemos creído conveniente hacer converger, en la medida de lo posible, la discusión hacia la propia Tesis Doctoral en los casos que haya sido presentada.

Un elemento que tuvo que ser valorado fue la inclusión o no de investigaciones realizadas en otros países. Hemos decidido incluir únicamente aquéllas en las que existiera equivalencia de niveles y constituyeran trabajos que tuvieran continuidad con algún otro[49].

En la literatura se pueden encontrar algunas revisiones sobre la investigación en Educación Matemática en España que se han realizado en los últimos años. (Torralbo, Vallejo y Fernández, 2003), (Llinares, 2008), (Planas, 2010) son ejemplo de ellas. En el primer caso se hace un estudio bibliométrico de las Tesis Doctorales hasta el año 2002, en el segundo a la presencia en revistas de impacto de trabajos de investigadores españoles. Quizás la que mayor relación tenga con este trabajo sea el trabajo recientemente publicado por (Maz-Machado et al., 2011) quienes identifican una serie de indicadores bibliométricos de colaboración y coautoría de autores en las publicaciones de las Actas de los Simposios de la SEIEM. Aunque el enfoque sea

[49] Somos conscientes de las limitaciones de nuestro trabajo y con toda seguridad han quedado ponencias y comunicaciones que podríamos haber referenciado. Apelamos a la tolerancia de los autores y pedimos que, en su caso nos lo hagan saber para próximos informes.

diferente al nuestro, creemos que es importante reseñar una de sus conclusiones principales que se relaciona con la escasez de colaboración entre investigadores de diferentes universidades.

A la hora de agrupar las diferentes ponencias y comunicaciones hemos distinguido tres grandes áreas temáticas correspondientes a los Grupos de Investigación que funcionan habitualmente y en los que se pueden observar un mayor número de trabajos relacionados con el Bachillerato y la Universidad: Didáctica del Análisis Matemático, Didáctica de la Estadística y la Probabilidad y el tercer grupo lo hemos denominado Temas Transversales. Nos centraremos en este artículo en el ámbito del Análisis Matemático que es donde se encuentran el mayor número de trabajos dedicados a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas del Bachillerato y la Universidad. Limitaciones de tiempo y espacio no nos han permitido extender el análisis, pese q que en el Anexo hemos incluido las ponencias y comunicaciones de los otros grupos considerados. Categorizaremos por contenidos específicos la discusión, de tal forma que hemos distinguido seis grupos de ponencias y comunicaciones sobre aspectos generales de la investigación y en particular del Análisis, así como sucesiones, series e infinito, funciones y límites de funciones, derivada, integral y ecuaciones diferenciales.

Se incluyen unas tablas en las que se recogen las diferentes ponencias y comunicaciones, en las que se utilizan una serie de indicadores para el análisis posterior. Los indicadores empleados: año, autores (en el caso de más de dos autores, hemos puesto “et al”, Título, Marco de Investigación, Nivel, TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) y Tipo de presentación. En el indicador Nivel consideramos: B (Bachillerato), U (Universidad) y I (Interniveles, cuando se consideren varios niveles de enseñanza). El indicador TIC reflejará si se utiliza o no tecnología en la investigación, los Tipos de presentación serán P (Ponencia), C (Comunicación) y CGI (Comunicación en los grupos de Investigación). Una explicación especial necesita el indicador que hemos denominado Marco de Investigación y vamos a considerar tres tipos de Marco: Maco Teórico, (MT) Marco Conceptual (MC) y Marco Práctico (MP)..Lester (2010)[50] señala, que el uso de un marco de referencia en una investigación proporciona una estructura para el diseño, la concepción y la visualización del estudio, además de establecer las bases que permiten identificar la información relevante y justificar las evidencias que se muestren, los cuáles conducen a la presentación de las conclusiones y finalmente a una comprensión más profunda del fenómeno que se está investigando. En este caso, y en virtud del problema de investigación que se aborda, el marco de referencia estará formado por aquellos elementos que permitan analizar el conocimiento matemático mostrado por los estudiantes al resolver las actividades relacionadas con el tema de investigación que facilite el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan. Eisenhart (1991) distingue tres tipos de marcos de investigación, con sus propias características y jugando cada uno su papel: Teórico, Práctico y Conceptual. Lester (2010) profundiza en la caracterización de los diferentes marcos y, en relación con los Marcos Teóricos señala que las investigaciones realizadas empleando un Marco Teórico dependen de una teoría formal, las preguntas de investigación se reformulan en términos de dicha teoría, los resultados de la

[50] Lester (2010). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. En B. Sriraman y L. English (Eds.). *Theories of Mathematics Education* (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.

investigación se utilizan para confirmarla, extenderla o modificarla y los investigadores deben seguir la agenda de investigación marcada por dicha teoría, aceptando los convenios de argumentación y experimentación asociados a ella. Son numerosos y muy variados los Marcos Teóricos que existen en el campo de la investigación en Educación Matemática y, en muchos casos, no resulta sencillo establecer relaciones entre ellos, con lo que se siguen desarrollando de forma independiente dentro del contexto en que se crearon. Los intentos por encontrar relaciones entre las diferentes teorías que ayuden al desarrollo de un marco más general no han resultado muy satisfactorios en ese aspecto, aunque sí resultan enriquecedores por la visión que presentan de diversas teorías (Artigue, Batanero y Kent, 2010) (Santos-Trigo y Barrera-Mora, 2007). El Marco Práctico se fundamenta en el conocimiento práctico de los expertos y los resultados de investigaciones previas, pero sus resultados no se pueden generalizar fácilmente. Finalmente, un Marco Conceptual es “un argumento que incluye diferentes puntos de vista y culmina en una serie de razones para adoptar algunos puntos... y no otros” (Eisenhart, 1991, p. 210). Un Marco Conceptual puede estar basado en diferentes teorías y una noción fundamental para este tipo de marcos es la de justificación; resulta fundamental explicar por qué se hacen las cosas y por qué son razonables las explicaciones e interpretaciones. El bricolaje, o como denomina Gravemeijer (1998) “bricolaje guiado por la teoría” (p. 279), es un proceso relacionado con la noción de Marco Conceptual de Eisenhart (1991). Este término hace referencia al proceso según el cuál un investigador toma ideas de diferentes fuentes y las ajusta para construir, por ejemplo, un marco de referencia para su investigación o un conjunto de actividades para el aprendizaje de un concepto matemático.

Una vez hechas estas consideraciones, pasamos a continuación a la descripción de las investigaciones en los términos indicados.

Comunicaciones y ponencias de carácter general

En este primer grupo hemos incluido seis ponencias y comunicaciones (Tabla 1) presentadas entre los años 1999 y 2009. Las dos primeras se centran, después de una breve revisión de los trabajos a nivel internacional realizadas en la Didáctica del Análisis Matemático, en la exposición de algunos proyectos de trabajo en los temas de enseñanza y aprendizaje de conceptos del Análisis Matemático, desde dos perspectivas claramente diferenciadas. Por una parte, en (G1), se proponen varias investigaciones en el marco de algunos Proyectos de Investigación basándose en una perspectiva cognitiva que se deriva del campo de investigación del PMA y los diferentes constructos teóricos asociados, mientras que por otra en (G2) se plantea un Proyecto de Investigación desde la consideración de los obstáculos epistemológico Brousseau (1998) y los actos de comprensión Sierpinska (1995) como elementos constitutivos del referente teórico que los guía. En estos dos trabajos, se ponen de manifiesto las distintas líneas de investigación que empezaban a desarrollarse en nuestro país, así como se presentan algunos de los trabajos ya realizados en torno a la Didáctica del Análisis Matemático. Podemos considerar ambos trabajos como las primeras agendas de investigación del campo de la Didáctica del Análisis Matemático que, como veremos posteriormente, marcaron la pauta del conjunto de investigaciones que se realizaron en los siguientes años. Se adelantaban en ambos trabajos, los enfoques y temas de investigación para futuras investigaciones en nuestro país. Hemos clasificado de ámbito general las comunicaciones y ponencias (G4), (G5) y (G6), que presentan también un panorama global de la investigación haciendo uso de Programas de Cálculo Simbólico (PCS en lo que sigue), las comunicaciones (G4) y (G6) utilizan el software *Mathematica*, para analizar los fenómenos didácticos que surgen en el estudio de los conceptos (objetos) matemáticos límite y derivada mientras que Camacho presenta la síntesis de dos investigaciones realizada sobre los conceptos de integral definida e integral impropia haciendo uso de *Derive* y *Maple* respectivamente.

Hemos considerado que la ponencia (G3) debía estar incluida en este grupo de trabajos, pese a que no trata directamente con temas específicos de la Didáctica del Análisis, porque en ella se describe -tomando como referencia una investigación con estudiantes universitarios sobre las concepciones, dificultades y errores en el aprendizaje del contraste de hipótesis- un esquema metodológico que puede resultar útil para la investigación de temas específicos de otras áreas en la enseñanza y aprendizaje en los cursos universitarios.

Año	**Autores**	**Título**	**Marco**	**Nivel**	**TIC**	**Presentación/(Código)**
1999	Azcárate, C. et al.	Perspectivas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Investigación en Didáctica del Análisis.	MC	B/U	No	P (G1)
2000	Contreras , A.	La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad.: Una perspectiva desde la Teoría de los obstáculos Epistemológicos y los actos de comprensión	MC	B/U	No	P (G2)
2001	Vallecillos , A.	Cuestiones metodológicas en la investigación educativa.	-	U	No	P (G3)
2005	Contreras , A. et al.	Aplicación del programa *Mathematica* a las prácticas de cálculo en el primer año universitario.	MC	U	Sí	C (G4)
2005	Camacho , M.	La enseñanza y aprendizaje del DAM haciendo uso de las CAS (Computer Algebra System).	MC	U	Sí	P (G5)
2009	Contreras, A. y Ortega, M.	Fenómenos didácticos emergentes de las prácticas realizadas con el programa Mathematica.	MC	U	Sí	CGI (G6)

Tabla 1. Comunicaciones y ponencias de carácter general

Comunicaciones y ponencias sobre sucesiones, series e infinito (Tabla 2)

Se incluyen en este apartado varios trabajos inmersos en investigaciones más amplias que posteriormente dieron lugar a Tesis Doctorales. Así (Codes, 2010)[51], (Claros, 2010)[52] y (Belmonte, 2010)[53] son Tesis que derivan directamente de las investigaciones presentadas en los Simposios en este ámbito. En la primera de ellas, se utiliza la Teoría APOS como referente teórico y se desarrolla, previo a un análisis histórico, del

[51] (SI2), (SI4) y (SI5)
[52] (SI3) y (SI6)
[53] (SI1)

concepto de serie numérica y su convergencia, describiendo además los distintos niveles de comprensión de ambos conceptos. Se detectan algunos obstáculos que provienen principalmente de las concepciones previas de los conceptos de límite, función e infinito que poseen los estudiantes y también debidas a problemas de instrumentación con el PCS utilizado. En la Tesis Doctoral de Claros, se elabora un marco conceptual que le permite hacer una organización fenomenológica del concepto de límite, a partir de dos estudios empíricos uno con libros de texto y oto con estudiantes de bachillerato, determinan dos tipos de fenómenos: el de aproximación simple intuitiva (a.s.i.) y el de retroalimentación (i.v.s.). Belmonte, en su Tesis, analiza la evolución del concepto de infinito desde primero de primaria hasta segundo de bachillerato, poniendo de manifiesto el papel articulador que los elementos metafóricos juegan entre el finitismo del entorno que rodea a los estudiantes y la abstracción del concepto.

Hemos considerado importante, pese a que no existen comunicaciones y ponencias en los simposios, la Tesis Doctoral de Garbín (2000), que trata también del tema del infinito. En ella se identifican las inconsistencias y se representan las situaciones de coherencia que manifiestan los estudiantes con los esquemas conceptuales[54]que los estudiantes asocian al concepto de infinito actual cuando lo contextualizan en lenguajes matemáticos diferentes (verbal, geométrico, gráfico, analítico y algebraico).

[54] El término “esquema conceptual” se considera equivalente al *concept image* descrito por Tall y Vinner (1987). En Azcárate, C. (1990) se hace una discusión al respecto.

Año	Autores	Título	Marco	Nivel	TIC	Presentación/ (Código)
2004	Belmonte, J. L. y Sierra, M.	Intuición y esquemas conceptuales del infinito: actualización.	MC	E/U (longitudinal)	No	CGI (SI1)
2004	Codes, M. y Sierra, M.	Enseñanza-aprendizaje con Maple del concepto de convergencia de series numéricas con alumnos de primer curso de la diplomatura de informática: un estudio piloto.	MT	U	Sí	CGI (SI2)
2006	Claros, F. J. et al.	Fenómenos que organizan el límite.	MC	B	No	C (SI3)
2006	Codes , M. y Sierra, M.	Una primera aproximación al análisis de la comprensión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica	MT	U	Sí	CGI (SI4)
2007	Codes, M. et al.	Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional.	MT	B/U	Sí	C (SI5)
2009	Claros, F. J. et al.	Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy	MC	U	No	C (SI6)

Tabla 2. Comunicaciones y ponencias sobre sucesiones, series e infinito

Comunicaciones y ponencias sobre funciones y límite de funciones (Tabla 3)

En relación con estos temas, se puede considerar que los trabajos (FL2), (FL5) y (FL6) convergen en la Tesis Doctoral de García (2008) en la que se desarrolla una investigación de naturaleza epistemológica, cognitiva y curricular sobre las causas de naturaleza ontosemiótica de las dificultades mostradas por los alumnos para el concepto de límite de una función en primero de bachillerato. Después de siseñar y experimentar una secuencia de enseñanza elaborada a partir de la aproximación ontosemiótica, se estudian tres tipos de idoneidades: epistémica (grado de representatividad de los significados institucionales implementados), interaccional (grado en que las configuraciones y trayectorias permiten identificar conflictos semióticos y resolverlos mediante la negociación de significados y cognitiva (grado en el que los significados pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los implementados). La ponencia (FL1) también forma parte de su trabajo de Tesis Doctoral de Blázquez (2000) en la que se construye una grupo de actividades para la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite funcional como aproximación óptima, para la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de segundo de bachillerato. Se muestra la utilidad de la definición propuesta frente a otras definiciones más intuitivas e ingenuas, la importancia del uso de distintos sistemas de representación y del tratamiento previo del límite secuencial, la discriminación entre tendencias y límite finito, la participación del alumno en su aprendizaje, el uso de medios informáticos, y las dificultades que lleva asociadas el concepto**.** La comunicación FL3 utiliza como marco conceptual algunos constructos teóricos de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2003) y las ideas de (Lakoff y Núñez, 2000) para analizar la representación gráfica de funciones, constatando la importancia del uso de las metáforas, tanto en el discurso del profesor como de los alumnos para la construcción de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes y en la negociación de significados en el aula. En la comunicación (FL7) presentada en el Grupo de Investigación, se analizan los conflictos semióticos que surgen (a partir del análisis de una prueba pasada a estudiantes universitarios) entre el lenguaje matemático y la sintaxis del PCS Mathematica, al igual que aquéllos que aparecen entre los procedimientos matemáticos y los que utiliza el PCS todo ello desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS).

Año	**Autores**	**Título**	**Marco**	**Nivel**	**TIC**	**Presentación/(Código)**
1999	Blázquez, S.	Sobre la noción de límite en las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.	MC	B	No	P (FL1)
2003	Contreras, A. et al.	Investigación acerca de la enseñanza del límite en el marco de teoría de las funciones semióticas.	MT	B	No	C (FL2)
2004	Acevedo, J. y Font, V.	Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales.	MC	B	No	C (FL3)
2004	Rodríguez, F. M.	Una perspectiva didáctica en la iteración de funciones y el punto fijo.	MC	U	No	C (FL4)
2006	Contreras, A. et al.	Análisis de una experiencia de la enseñanza de la noción de límite funcional con herramientas del enfoque ontosemiótico.	MT	B	No	C (FL5)
2008	Contreras, A. y García, A. L.	La trayectoria instruccional de un proceso de estudio sobre el límite de una función.	MT	B.	No	C (FL6)
2008	Contreras, A. et al.	Prácticas del límite y derivada de una función con el programa Mathematica en estudiantes universitarios.	MT	U	Sí	CGI (FL7)

Tabla 3. Comunicaciones y ponencias sobre funciones y límite de funciones

Comunicaciones y ponencias sobre la derivada de una función (Tabla 4)

Los trabajos (D2) y (D6) están íntimamente conectados. Mientras que en el primero se hace una revisión, a partir del marco teórico EOS, de distintas investigaciones realizadas desde esta perspectiva teórica y se detecta como conflicto semiótico particular el que surge cuando los estudiantes deben distinguir la derivada puntual de la función derivada, en (D6) se propone, basándose en estas ideas, una secuencia de actividades con ordenador para promover el aprendizaje de estos conceptos a partir de la noción de linealidad local.

La comunicación (D5), proviene de su Tesis Doctoral de Sánchez Matamoros (2004) y aporta al marco teórico APOS lo que se denominan “relaciones lógicas” como elemento interpretativo para explicar el paso de un nivel a otro del esquema de derivada de una función (inter, intra y trans). Estas relaciones resultan ser útiles para analizar la comprensión que poseen los estudiantes de bachillerato y primer curso de universidad del concepto y proporcionó información sobre la forma de comprender el concepto.

La comunicación (D7) plantea, después de revisar diversas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la optimización, un proyecto de investigación sobre esta noción. Presenta además una propuesta, basada en el EOS. Se propone llevar al aula con estudiantes de bachillerato una secuencia de actividades usando un software de geometría dinámica con el objetivo de analizar su idoneidad epistémica, cognitiva y mediacional en términos de dicha teoría.

La ponencia (D1) se enmarca dentro de una investigación más amplia dirigida hacia la Tesis Doctoral de Fonseca (2004) basada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y muestra cómo la derivación de funciones aparece como una amalgama de Organizaciones Matemáticas (OM) puntuales. Los autores establecen una OM local (minimal) con las tareas y las técnicas relacionadas con el tema. En la Tesis Doctoral se define además una OM en torno a la regla de Ruffini en el paso de la secundaria a la Universidad.

Pese a que no existen comunicaciones ni ponencias de la Tesis Doctoral de González, (2002), podemos decir que aporta un modelo de análisis de libros de texto que permite caracterizar la información, estructura y forma de hacer matemáticas que se plantean a los estudiantes en torno al concepto de punto crítico. Como una segunda parte de la investigación, se realiza un estudio de las aportaciones que introducirán las nuevas tecnologías, en particular los CAS en relación con las representaciones así como las modificaciones que plantea su uso en el aula de matemáticas.

Año	Autores	Título	Marco	Nivel	TIC	Presentación/(Código)
2002	Fonseca, C. Gascón, J.	Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la Enseñanza Secundaria.	MT	B.	No	P (D1)
2005	Font, V.	Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada.	MT	B	No	P (D2)
2006	Mesa, G. et al.	Identificación y clasificación de los enfoques didácticos para la educación por competencias en algunos libros de cálculo diferencial.	MC	U	No	CGI (D3)
2007	Moreno, M. M. et al.	Competencias y evaluación: desarrollo de un instrumento de análisis y caracterización de problemas matemáticos de nivel superior.	MC	U	No	CGI (D4)
2007	Sánchez-Matamoros, G. et al.	Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas.	MT	B/U	No	C (D5)
2010	Robles, M. G. et al.	La función derivada a partir de una visualización de linealidad local.	MT	U	Sí	C (D6)
2010	Contreras, Á., Balcaza, T.	La enseñanza-aprendizaje de la optimización matemática en estudiantes de de educación secundaria desde la perspectiva del EOS	MC	B	Sí	C (D7)

Tabla 4. Comunicaciones y ponencias sobre la derivada de una función

Comunicaciones y ponencias sobre la integral (Tabla 5)

Los problemas de enseñanza y aprendizaje del concepto de integral definida son los que más han sido tratados en las ponencias y comunicaciones en el ámbito de la Didáctica del Análisis Matemático en los Simposios de la SEIEM. Casi todos los trabajos han cristalizado en diferentes Tesis Doctorales. Pasamos ahora a comentar brevemente dichos trabajos relacionándolos con Tesis a que han dado lugar. La comunicación (I1) forma parte de la Tesis Doctoral de Depool (2004) en la cual se diseña y se lleva al aula un módulo instruccional para la enseñanza y aprendizaje del concepto de integral definida basado en un conjunto de prácticas de laboratorio diseñadas con el PCS *DERIVE*. La secuencia propuesta planteaba las prácticas atendiendo a una perspectiva numérica y gráfica, privilegiando el sentido de aproximación de la integral definida. Para analizar la comprensión del concepto por parte de los estudiantes, se utilizó una parte del marco conceptual definido por el Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2007), en combinación con la Teoría de las representaciones de Duval. Se establecieron tres perfiles de actuación de los estudiantes. La comunicación (I10), es una prolongación del trabajo de Depool (2004), y se establece una herramienta metodológica para analizar la comprensión de los estudiantes de los concepto de error de aproximación, cota del error y valores exactos y aproximado de una integral. Las comunicaciones (I1), (I5), (I8) e (I9), configuraron la Tesis Doctoral de Ordóñez (2011). Utiliza en la Teoría de la Funciones Semióticas y la Teoría de las representaciones de Duval sobre los registros semióticos de representación para realizar un análisis del objeto integral en las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU). Identifican y describen algunos factores relacionados con los fenómenos de algebrización del Cálculo Integral y muestra las dificultades que tienen los estudiantes para que emerja el objeto integral, detectándose renuncias, tanto institucionales como personales para conseguir el aprendizaje de la integral definida. Las comunicaciones (I3), (I6) e (I11) forman parte de la Tesis Doctoral de Boigues (2010), en la que utiliza la Teoría APOS como marco teórico. Presenta dos descomposiciones genéticas del concepto de Integral de Riemann y utiliza la métrica Fuzzy para analizar la información obtenida de una serie de entrevistas realizadas a los estudiantes. Muestra que los estudiantes tienen mayor facilidad para manejar los elementos cognitivos que representan las acciones y observa que encuentran numerosas dificultades a la hora de establecer relaciones con los elementos que conforman el esquema de Integral de Riemann. La comunicación (I7) también forma parte de la Tesis Doctoral de Aldana (2011), quien emplea como marco de investigación también la Teoría APOS. Adapta las "relaciones lógicas" (Sanchez-Matamoros, 2004) entre los niveles intra, inter y trans del esquema construido a partir de una descomposición genética diferente a la de Boigues (2010) y establece una clasificación de un grupo de estudiantes de Matemáticas (profesores) en varios subniveles obtenidos a partir de los niveles iniciales. La comunicación (I4) forma parte de la Tesis Doctoral de González (2005) y se utiliza en ella un marco conceptual que combina la Teoría de las Situaciones Didácticas, la Teoría de Duval y la aproximación instrumental (Guin, Ruthven y Trouche, 2004). A partir de la perspectiva metodológica de la Ingeniería Didáctica se desarrolla una secuencia de enseñanza para la enseñanza y aprendizaje de la integral impropia. Se concluye que es posible transformar el contrato didáctico usual en la enseñanza superior y dar a los estudiantes una mayor responsabilidad en el proceso de aprendizaje, dar al registro gráfico un mayor estatus matemático y promover el trabajo en él y organizar las condiciones ecológicas en un aula de ordenadores para facilitar la colectivización de las técnicas instrumentales. Otra aportación importante de este trabajo es la detección de una variante del obstáculo epistemológico de la "heterogeneidad de las dimensiones" (Schneider, 1988), que se evidencia por la convicción que tienen los estudiantes de que para funciones positivas, $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty f^2(x)dx$ tienen el mismo carácter debido a que un área finita (respectivamente infinita área) corresponde por rotación alrededor del eje OX un volumen finito (respectivamente infinito volumen). Finalmente, en la comunicación (I13), se presenta un estudio con estudiantes de primero de la Licenciatura de Matemáticas en la que se evalúa la influencia del método visual para la comprensión del concepto de integral. Se describen los resultados de un cuestionario de problemas no rutinarios, tratando de identificar errores y dificultades relacionados con la comprensión visual de la integral. Por último, se sugieren aspectos clave para ser incorporados en la enseñanza explícita de la visualización en la disciplina del Análisis.

Año	**Autores**	**Título**	**Marco**	**Nivel**	**TIC**	**Presentación/ (Código)**
2003	Camacho, M. y Depool, R.	Análisis de la comprensión de la integral definida. Un estudio de casos.	MC	U	Si	CGI (I1)
2003	Contreras, A. y Ordóñez, L.	El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida.	MC	B	No	C (I2)
2004	Boigues , F. J.	El valor cognitivo de los sistemas de cálculo formal: el caso de la integral definida.	MT	U	Sí	G (I3)
2004	González, A. S. y Camacho, M.	La enseñanza y aprendizaje de la integral impropia. Algunos resultados de investigación relacionados con el registro gráfico.	MC	U	Sí	G (I4)
2005	Contreras, A. Ordóñez, L.	Análisis de significados personales de los estudiantes acerca de la integral definida.	MT	B	No	CGI (I5)
2006	Boigues, J. y Pastor, J.	La teoría Fuzzy como elemento para medir el grado de desarrollo en la comprensión de la integral.	MT	U	Sí	CGI (I6)
2009	Aldana, E. y González, Mª T.	Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario.	MT	U	No	CGI (I7)
2007	Ordóñez, L. y Contreras, A.	Significados histórico-epistemológicos y escolares de la integral definida. Restricciones planteadas por las pruebas de acceso a la universidad.	MC	B	No	CGI (I8)
2010	Ordóñez , L. y Contreras, A.	La integral definida en las pruebas de acceso a la universidad (PAU): sesgos y restricciones en la enseñanza de este objeto en 2º Bachillerato.	MC	B	No	P (I9)
2010	Camacho , et al.	La integral de Riemann. Interpretación de los errores de aproximación utilizando un CAS.	MC	U	Sí	P (I10)
2010	González, MªT., Aldana, E.	Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE	MT	U	No	P (I11)
2010	Boigues, F.J.	Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería.	MT	U	Sí	P (I12)
2010	Souto, B., Gómez, I.Mª	Comprensión visual y concepto de integral en la enseñanza universitaria.	MC	U	No	C (I13)

Tabla 5. Comunicaciones y ponencias sobre el concepto de integral

Comunicaciones y ponencias sobre ecuaciones diferenciales (Tabla 6)

Únicamente dos de las comunicaciones se han dedicado a la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y ambas poseen perspectivas tanto teóricas como metodológicas esencialmente diferentes. La (ED1) forma parte de la Tesis Doctoral (Perdomo 2010) en la que, previa la elaboración de un marco conceptual basado en la Resolución de Problemas (Schoenfeld, 1992) y el sentido de competencia matemática propuesto en (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2010), se experimentó un módulo de enseñanza dirigido a introducir el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en un primer curso de la licenciatura en química. El objetivo principal consistió en analizar los procesos emergen en el aula durante la implementación de dicho módulo. La enseñanza se basó en el uso de distintos problemas planteados en contextos hipotéticos, basados en situaciones reales para los estudiantes, que se resolvieron en un ambiente de interacción entre los alumnos y con la tecnología (la calculadora Voyage^{TM}200). Analizando los procesos cognitivos, las heurísticas y las estrategias de control mostradas por los estudiantes durante el proceso de resolución, como elementos que describen la competencia matemática de los estudiantes (Schoenfeld, 1992), se concluye que el uso de la herramienta tecnológica promovió que los estudiantes desarrollaran procesos del PMA tales como la abstracción o la generalización, y la interacción entre los alumno favoreció que expresaran, contrastaran, verificaran y justificaran sus argumentos. De esta forma, el modelo de enseñanza contribuyó a que los estudiantes desarrollaran habilidades y capacidades como la competencia estratégica y el razonamiento adaptativo (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2010) En el campo cognitivo, se concluye que la construcción de un concepto matemático que resulte novedoso para el estudiante, no debe entenderse como un hecho aislado, puesto que este nuevo conocimiento modifica la red de significados matemáticos de que dispone el individuo. De esta forma, la introducción del concepto de EDO, partiendo de su relación con el concepto de derivada de una función, permitió que los estudiantes iniciaran la construcción de un nuevo objeto matemático a la vez que se enriquecía la red de significados que asociaban al concepto de derivada de una función.

La comunicación (ED2), proviene del trabajo más amplio que constituye la Tesis Doctoral de Barquero (2009) en la cual se utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico como marco teórico y metodológico de la investigación. Se diseñan Recorridos de Estudio e Investigación (Chevallard, 2006) basados en la dinámica de poblaciones para el análisis y diseño del proceso didáctico subyacente. Se concluye que la implantación de los REI bajo condiciones controladas por la investigación pone de manifiesto algunas de las principales condiciones y restricciones didácticas ligadas principalmente al contrato didáctico imperante en la enseñanza universitaria, permitiendo dar una primera aproximación a la 'ecología de los REI'.

Año	Autores	Título	Marco	Nivel	TIC	Presentación
2007	Camacho , et al.	La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: un estudio exploratorio.	MC	U	Sí	CGI (ED1)
2010	Barquero et al.	Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE.	MT	U	No	C (ED2)

Tabla 6. Comunicaciones y ponencias sobe ecuaciones diferenciales

Consideraciones finales

En este trabajo hemos tratado de sintetizar la evolución de la investigación en Didáctica de las Matemáticas en el bachillerato y la universidad, haciendo primeramente una descripción de lo acontecido en el panorama internacional. Nos centramos posteriormente en analizar la esa evolución en nuestro país, particularizando el estudio al campo de la Didáctica del Análisis Matemático, utilizando como instrumentos de análisis las Actas de los Simposios de la SEIEM y la información disponible sobre las Tesis Doctorales defendidas en los últimos quince años. Se ha podido constatar a partir de nuestro análisis, cómo la aportación de los Simposios ha resultado ser determinante para la comunidad de investigadores de este campo. La mayoría de comunicaciones y ponencias que hemos ido detallando en el trabajo, han dado lugar a Tesis Doctorales. Consideramos que esto supone un avance importante para el desarrollo de la investigación en el área. El estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje en conceptos tales como límite, derivada, integral, han sido suficientemente estudiados y debemos pensar en abrir nuevos campos de investigación con nuevos enfoques.

Otro elemento que se ha podido observar es el uso de una gran diversidad de marcos teóricos y conceptuales en las diferentes investigaciones analizadas. Ahora bien, se ha podido constatar que los trabajos empíricos desarrollados en las investigaciones han conseguido, en líneas generales, aportar elementos que enriquecen en cierta medida los propios marcos utilizados (Sánchez-Matamoros, 2004; González, 2005; Fonseca, 2004), entre otros.

En relación con las preguntas planteadas por la coordinadora del seminario, pensamos que, el camino recorrido por la investigación en el bachillerato y universidad no ha seguido un camino paralelo a las necesidades del sistema educativo. La mayoría de investigaciones nos suministran resultados que confirman resultado obtenidos en otras o encuentran pequeños avances pero una gran parte de ellos deben ser incorporados a la enseñanza efectiva, buscando puentes que hagan visibles esas pequeñas aportaciones. Desde aquí se deben promover la elaboración de materiales curriculares que permitan implementar esos avances. La falta de conexión es uno de los puntos en los que habrá que poner un énfasis mayor en el futuro. Pensamos que deben crearse cuanto antes unas nuevas agendas de investigación en las que se incorporen nuevos aspectos que investigar acordes con la evolución de las investigaciones desarrolladas a nivel internacional (Artigue, Batanero y Kent, 2007)

Otro elemento importante que pensamos que debe ser atendido es la colaboración con grupos de investigación de otros países con el objetivo de internacionalizar nuestras investigaciones en el área, tal y como están haciendo otros grupos de investigación.

Referencias

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the University level?. En D. Holton (ed.) (2001) *The Teaching and Learning of Mathematics at University level. An ICMI study* (pp. 207-220). Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Artigue, M.; Batanero, C. y Kent, P. (2007). Mathematics Thinking and Learning at Post-Secondary Level. En F. K. Lester (Ed.) *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (*pp. 1011-1049). Charlotte: Information Age Publishing.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education,* 6 (pp. 1-32).

Azcárate, C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis Doctoral. UAB

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* 10 (2), 135-149.

Brousseau, G. (1998). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990* (editado y traducido por N. Balacheff, M. Cooper, R Sutherland and V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des prctiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 19 (2), pp. 221-266

Chevallard, Y. (2006). "Steps towards a new epistemology in mathematics education". *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4) pp. 21-30.

Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, emnergent and socio-cultural perspectivas in the contexto f developmental research. *Educational Psychologist*, 31, 175-190.

Dubinski, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructive theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (ed.) (2001) *The Teaching and Learning of Mathematics at University level. An ICMI study,* (pp. 207-220) The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. (Ed.) (2000). *On the teaching of Linear Algebra.* The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist. *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1, pp. 202-219. Blacksburg, VA.

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). En A. Gutiérrez y Boero, P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-273). Rotterdam: Sense Publishers.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet:

URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm

Gray E. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference,* 2, (72-79)

Gravemeijer, K. (1998). Developmental research as a research method. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study* (pp. 277-296). Gran Bretaña: Kluwer Academic Publisher.

Guin, D.; Ruthven, K. y Trouche, L. (Eds.) (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument.* New York: Springer.

Harel, G.; Selden, A. y Selden J. (2006). Advanced Mathematical Thinkinf. Some PME Perspectives. En A. Gutiérrez y Boero, P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 147-172). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G., Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27-50.

Hitt, F.; Barrera, F. y Camacho, M. (2010). Mathematical Thinking, conceptual frameworks: A review of structure of analysis of protocols for Problem Solving. *Far East Journal of Mathematical Education* 4(2), pp. 93-115.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2009). The Strands of Mathematical Proficiency. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (7th ed.) (pp. 115-155). Washington, DC: National Academy Press.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics come from: How the emboided mind bring mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lester, F. (2010). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. En B. Sriraman y L. English (Eds.). *Theories of Mathematics Education* (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España. Una aproximación desde “ISI-Web of Knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII/ Investigação em Educação Matemática XII* (pp. 1-26). Badajoz: SEIEM.

Mariotti, A. (2006). Proof and proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez y y Boero, P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

Maz-Machado, A.; Bracho-López, R.; Torralbo-Rodríguez, M.; Gutiérrez-Arenas. M. P.; y Hidalgo-Ariza M. D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: lossimposios de la SEIEM. *PNA*, *5*(4), 163-185.

Misfeldt, M. (2003). Mathematician's writing. En A Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 2, 301-308

Moreno M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias,* 21 (2), pp. 265-280.

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures Dans la transition terminales S/DEUG Sciencies en analyse. Le cas de la notion derivée et son environnement*. Tesis Doctoral. Universidad Paris 7.

Selden, A. y Selden, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 1-13.

Sierpinska, A.:1995, *La compréhension en mathématiques*, Mont-Royal, Québec: Modulo Editeur.

Torralbo, M., Vallejo, M. y Fernández, A. (2003). Panorama de la investigación en educación matemática en España a través de las tesis doctorales. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la SEIEM* (29-43). Granada: SEIEM.

Rasmussen, C., Zandieh, M, King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: a Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51-73.

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and looking into some Mathematics Education frameworks. *The Mathematics Educator*, 10(1), 81-106.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis des superficies et des solides. Recherches en Didactique des Mathématiques, 11 (2/3), 241-294.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In Grouws, D. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 334-370.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores (Eds). *Investigación en Educación Matemática, XI. Tenerife*, 19-52.

Tall, D. (2004). Thinking throught three worlds of mathematics. En M. Holmes & A. Fuglestead (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 281-288. Bergen, Norway: Bergen University College.

Tall, D. (2007). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education. *Plenaria presentada en el 10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Febrero 22-27, San Diego, California.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. Educational Studies in Mathemtics, 12 (2), pp. 151-169.

Zazkis, R. y Applebaum, M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Larnaca: Chipre, pp. 2389-2397.

TESIS DOCTORALES DE DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas.* Universidad Autónoma de Barcelona. Director: Josep Gascón Pérez. Codirectora: Marianna Bosh Casavò.

Belmonte, J. L. (2010). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad. Universidad de Salamanca. Director: Modesto Sierra Vázquez.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Universidad de Valladolid. Director: Tomás Ortega del Rincón.

Boigues, F.J. (2010). *El desarrollo de un esquema sobre la integral definida en universitarios de ingeniería y medio ambiente.* Universidad de Alicante. Director: Salvador Llinares Ciscar.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral.* Universidad Autónoma de Barcelona. Directora: Carmen Azcárate Giménez.

Claros, F.J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza.* Universidad de Granada. Director: Moisés Coriat Benarroch.

Codes, M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional.* Universidad de Salamanca. Director: Modesto Sierra Vázquez.

Delgado, C. A. (1999). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Universidad Autónoma de Barcelona. Directora: Carmen Azcárate Giménez.

Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS).* Universidad de La Laguna. Director: Matías Camacho Machín.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de una función". Del "pensamiento del profesor" a la gestión de los momentos de estudio.* Universidad Autónoma de Barcelona. Director: Carmen Azcárate Giménez.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Universidad de Vigo. Director: Josep Gascon Pérez. Codirectora: Marianna Bosh Casavò.

Galán, J.L. (2003). *Integrales múltiples con DERIVE, un estudios de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación.* Universidad de Málaga. Director: José Luis González Marí.

Garbín, S. (2000). *Infinito actual; inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 año".* Universidad Autónoma de Barcelona. Directora: Carmen Azcárate Giménez.

González, A.S. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica. Utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje.* Director: Matías Camacho Machín.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Director: Modesto Sierra Vázquez. Codirector:

Moreno, M.M. (2001). *El profesor Universitario de Matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.* Universidad Autónoma de Barcelona. Directora: Carmen Azcárate Giménez.

Nora, S. (2007). *Aprendizaje del concepto de límite funcional en alumnos de ingenierías.* Universidad de Valladolid. Director: Tomás Ortega del Rincón.

Perdomo, J. (2010). *Construcción del concepto de ecuación diferencial ordinaria en escenarios de resolución de problemas.* Universidad de La Laguna. Director: Matías Camacho Machín. Codirector: L. Manuel Santos Trigo.

Rodríguez, P. (2004). *Derivación e integración de funciones de Variable Compleja con DERIVE. Un estudio de innovación curricular en segundo curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación.* Universidad de Málaga. Director: José Luis González Marí.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto).* Universidad de Sevilla. Director: Salvador Llinares Ciscar. Codirectora: Mª Mercedes García Blanco.

Anexo: Comunicaciones y ponencias de Didáctica de la Estadística y Probabilidad

Año	Autores	Título	Nivel	Presentación
1998	Batanero, C. et al.	La construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos: reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la estadística	B	P
2004	Alvarado, H. y Batanero, C.	Elementos del significado del Teorema Central del Límite.	U	CGI
2007	Alvarado, H. y Batanero, C.	Distribución asintótica de la suma de variables aleatorias: significado en textos de estadística aplicada a la ingeniería.	U	CGI
2007	Díaz, C. et al	Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes para la aplicación del Teorema de Bayes.	U	C
2007	Huerta, P. y Carles, M.	El mundo de los problemas de Probabilidad Condicional en el contexto de los test de diagnóstico	B	C
2007	García, I. Y García, J. A.	Inferencia estadística y lenguaje: un estudio den Bachillerato.	B	C
2009	Rodríguez-Muñiz, L. J.	Experiencias de uso de la historia de la estadística y la probabilidad en una asignatura instrumental: métodos estadísticos de la ingeniería.	U	CGI
2009	Carpo, M. et al	Significados de la distribución normal en la universidad.	U	CGI
2009	Alvarado, H. y Retamal, M. L.	Diseño de unidades didácticas de la distribución muestral incorporando recursos tecnológicos.	U	CGI

Comunicaciones y ponencias de temas transversales: Comunicaciones y ponencias de Resolución de Problemas

Año	Autores	Título	Nivel	Presentación
1998	Cobo, P.	Análisis de las interacciones entre pares de alumnos en la resolución de problemas de Matemáticas.	B	P
2001	Roa, R. y Batanero, C.	Un estudio semiótico del razonamiento combinatorio en estudiantes universitarios.	U	P
2003	Lonjedo, Mª. A. y Huerta, P.	La resolución de problemas de probabilidad condicional: un estudio exploratorio con estudiantes de Bachillerato.	B	CGI
2004	Cañadas, Mª C. Y Castro, E.	Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la	T	C

		resolución de un problema matemático.		
2005	Codina, A. y Castro, E.	Resolución de problemas, interactividad e interacción. Una parrilla de observación.	U	CGI
2005	Cobo, P. y Fortuny, J. M.	El sistema tutorial ArgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas.	S-B	C
2005	Lonjedo, Mª A. y Huerta, P.	La naturaleza de las cantidades presentes en el problema e probabilidad condicional.	B	C
2007	Huerta, P. y Carles, M.	El mundo de los problemas de Probabilidad Condicional en el contexto de los test de diagnóstico	B	C
2008	Iranzo, N. y Fortuny, J. M.	La influencia del SGD en las estrategias de resolución de problemas de geometría analítica.	B	C
2009	Sainza, C. y Figueiras, L.	Identificación de diferencias en la resolución de problemas de conteo entre alumnos de Primaria y Bachillerato.	P-B	C
2010	Aranda, C., y Callejo, M.L.	Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la construcción del concepto de dependencia lineal.	B	C

Comunicaciones y ponencias sobre la prueba y la demostración

Año	**Autores**	**Título**	**Nivel**	**Presentación**
2001	Sáenz, C.	Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las Matemáticas.	B	P
2005	Gutiérrez , A.	Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica.	U	P
2006	Fiallo J. E. y Gutiérrez , A.	Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración.	B	CGI
2010	Camargo, L., Gutiérrez, Á.	El aprendizaje de la demostración visto desde la teoría de la práctica social.	U	C
2001	Martínez, A.	La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica.	U	P

COMUNICACIONES