Bol. Mat. **17**(1), 13–26 (2010)

Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX

II. La matemática de los funcionales 1920–1950

Fernando Zalamea[1]

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

Continuamos con este artículo nuestra serie de seis textos ligados a la *Cátedra Granés* 2008, *Grandes corrientes de la matemática en el siglo* XX (ver número previo del *Boletín*). Recordamos que los textos desean explorar tres frentes: *(i)* elucidación de núcleos conceptuales y problemáticas centrales en la matemática de la época; *(ii)* descripción de entornos históricos correspondientes, entrelazando matemática y cultura; *(iii)* determinación de temáticas filosóficas que emergen paralelamente a los avances técnicos, buscando ilustrar así *instancias de desarrollo del pensamiento matemático*, inscritas dentro de la cultura como un todo. En este segundo artículo, en particular, enfatizaremos ejemplos alrededor de las figuras centrales de Banach, Artin y Weil.

Palabras claves: fundamentos, lógica, filosofía.

MSC: 01A60

[1] fzalameat@unal.edu.co, www.matematicas.unal.edu.co/~fzalamea

1 Instancias de la modernidad

En el primer artículo de la serie, vimos cómo las figuras revolucionarias de Galois, Riemann y Cantor, en el siglo XIX, habían trazado un derrotero extraordinariamente rico para el posterior desarrollo de la matemática. Enfocándonos en los fundamentos de la disciplina, observamos luego cómo las obras de Hilbert, Brouwer y Gödel habían *abierto* perspectivas complementarias para el pensamiento matemático. En realidad, en el lapso que se sitúa entre las dos guerras mundiales, esos trabajos fundamentales se realizaron no sólo a nivel global (programa de Hilbert) sino también a nivel local: diversas *regiones* de la matemática fueron exploradas con minuciosos esfuerzos para *organizar* los conceptos allí involucrados. Entenderemos aquí la *organización* de un campo del saber como *dialéctica pendular inversa* a la fundamentación. La "organización" busca determinar *núcleos de irradiación* del conocimiento, donde no se intenta reducir lo complejo a lo simple, sino, inversamente, calibrar la fuerza de propulsión de esos núcleos complejos hacia lo que les circunda. Éste es el caso, en particular, de la organización efectuada en el periodo 1920–1950 en algunas de las "regiones" imprescindibles de la matemática moderna —topología, análisis funcional, álgebra abstracta, geometría algebraica—.

Para percibir esa organización, nos situaremos en una alta montaña, con prismáticos de regular calidad, sin las incursiones a cuerpo entero que se necesitarían para obtener una percepción cabal del territorio. No obstante, los quiebres del paisaje indican ya, de entrada, cómo la matemática europea de entreguerras propulsa un *salto sistémico* excepcional. En efecto, los objetos que empiezan sistemáticamente a estudiarse dejan de ser ecuaciones y operatorias fijas (en cualquier ámbito: algebraico, analítico, geométrico, etc.) y se convierten en *clases de ecuaciones y operatorias*. Para ello, las herramientas fundamentales *externas* de contrastación y de representación dejan de ser funciones y se convierten en *funcionales*. Ya veremos más adelante muchos de los detalles notables que se derivan de esa oscilación de la visión, pero es importante subrayar desde ya ese *cambio sistémico de nivel* que influenciará toda la época en sentido amplio, pues el salto, lejos de darse sólo en la matemática, es característico de una *modernidad difusa* que envuelve todo el pensamiento de entreguerras.

El salto de un objeto a una clase de objetos involucra la existencia de un recolector de información. Inevitablemente, el querer englobar un todo requiere una *mirada*: se trata de la introducción, propia de la modernidad, del sujeto activo en la comprensión del mundo. La obra cubista se desbarata a los ojos del pintor, para luego recomponerse a los ojos del espectador. Desde Kant, "los ojos de ···" recorren, de hecho, todo el espectro moderno. Las clases de ecuaciones y operatorias, así como los *correlatos* posteriores entre clases —los *funcionales*— recorren la época que aquí abordamos. En el artículo anterior de esta serie, señalamos cómo un desglose analítico incitaba a la *fundamentación* de la matemática. Pendularmente, una *mirada sintética incita a la organización*, dándole un nuevo sentido a la eterna dialéctica de *lo uno y lo múltiple*. En efecto, la multiplicidad de los objetos se compone internamente en una clase (vimos en el artículo anterior cómo la genial definición de "conjunto" en Cantor capturaba este aspecto), pero, además, esa clase unificada pasa a su vez a ser observada y multiplicada *desde fuera* (mediante multitud de funcionales apropiados). Si el conocimiento moderno se encuentra en un vaivén permanente entre los aspectos diferenciales de la observación (el *mundo múltiple*, ligado a constataciones factuales) y los aspectos integrales de la interpretación (el *sujeto unitario*, ligado a visiones modales), la matemática de la época es, a la vez, propulsor determinante y fiel reflector de esos movimientos generales.

Las décadas 1920–1950 conforman un periodo de excepcional riqueza en la historia de la matemática. Al evocar en lo que sigue solo unos pocos picos de ese notable panorama, las injusticias resultan flagrantes y confiamos en que el lector sabrá ir completando las diversas ascensiones alternativas necesarias. Recordemos la "tabla fenomenológica" básica que guía nuestros artículos:

tránsito matemático

$\longleftrightarrow$

qué	*cómo*	*por qué*	*cuándo*	*dónde*
objetos	modos	razones	momentos	lugares
ejemplos *problemas*	*transformaciones* *regulaciones*	*obstrucciones* *singularizaciones*	*diagramas* *temporales*	*diagramas* *culturales*
ontología	epistemología	metafísica	historia	geografía

$\longleftrightarrow$

cuestionamiento filosófico y cultural

Tabla II.1. Perspectivas de la Cátedra Granés 2008–I.

Los objetos centrales ("qué") con los que trabaja la matemática de la época son, a nivel "atómico", las *funciones* y, a nivel "molecular", sus conglomerados (espacios de funciones, *espacios funcionales*).

Esos conglomerados se distribuyen a lo largo de diversas regiones de la matemática, y dan lugar a espacios de funciones continuas, integrables, diferenciables, secuenciales, algebraicas, etc. Se pretende conseguir así un *control operativo* de ciertas propiedades matemáticas (como la continuidad, la diferenciabilidad, la algebraicidad, la finitud, etc.) a través de la detección de comportamientos estructurales (*avant la lettre*) de colecciones de funciones u operaciones. Mientras que las funciones operan sobre conjuntos, en un salto de nivel se empieza a operar entonces sobre funciones.

Los problemas ("qué") asociados son múltiples: *(i)* acotar el espectro de las funciones sobre una base relativa común (campo base: reales, complejos, anillos de polinomios, etc.), de acuerdo con *variaciones* dadas (continuas, algebraicas, aritméticas, geométricas, etc.); *(ii)* acotar la transformabilidad de las funciones, restringiéndose a controles de *primer grado* (linealidad, finitud, condiciones galoisianas, etc.); *(iii)* responder a problemas de ampliación *maximal* del saber (saturación, extensión) dentro de espacios funcionales determinados. Surge así una búsqueda de un *control funcional* de TRANSformaciones funcionales, de donde —en manos de las escuelas polaca, rusa y alemana ("cuándo" y "dónde" que evocamos al final del artículo)— emergerán algunas de las mayores invenciones de la época.

2 Banach. Linealidad y extensibilidad

Stefan Banach (1892–1945) es el paradigma de los grandes matemáticos renovadores de los años veinte. Estandarte de la escuela polaca —al lado de Sierpinski, Kuratowski, Tarski y muchos otros matemáticos excepcionales (ver [Kuzawa 1968] o [Kuratowski 1980])— Banach organizó las formas modernas del *análisis funcional* (con su monografía *Théorie des applications linéaires*, 1931) y ayudó a establecer los altos estándares de investigación requeridos en exigentes revistas especializadas del siglo XX (con *Fundamenta Mathematicae*, desde 1922, y *Studia Mathematica*, desde 1929).

Banach trabaja con los espacios funcionales provenientes del análisis y se enfrenta con los problemas ligados a continuidad, linealidad y extensibilidad de funcionales. Las *transformaciones* ("cómo") sobre las cuales opera siguen un proceso de elevación jerárquica muy general: dada una colección B de funciones de un cierto tipo, a valores en un campo K (reales o complejos usualmente), se estudian los *funcionales lineales* sobre la colección, es decir, los operadores de B en K que preservan la suma de funciones y la multiplicación por escalares. Una *iteración potente pero vaga* —función[función]— adquiere entonces un sentido preciso —funcional[función]— que permite *jerarquizar* el saber de la colección B subyacente. Se trata de una aparición precisa, en el ámbito del análisis, de la *idea de autorreferencia* fundamental desde Cantor (ver nuestro artículo anterior de la serie). Una consecuencia central de esa iteración es la emergencia de un *proceso de dualidad muy general* que atravesará toda la matemática del siglo XX: para conocer un espacio vectorial E dado (usualmente un espacio de funciones proveniente del análisis o la geometría), se estudia su *dual* $\hat{E}$, es decir, el espacio de los funcionales lineales sobre E. En general, el *dual del dual* no coincide con el espacio original, pero sí proporciona preciosa información, a través de múltiples teoremas de representación.

Un caso fundamental, amplia y profundamente organizado por Banach, es el de los *espacios vectoriales topológicos*, donde se enlazan linealidad y continuidad (suma de funciones y multiplicación por escalares se asumen continuas). Las *regulaciones* ("cómo") de las transformaciones alcanzan en ese caso un control pleno. La pregunta básica consiste en ligar el comportamiento de un funcional en un fragmento del espacio (localidad) con su eventual extensibilidad a todo el espacio (globalidad). Para ello, Banach introduce herramientas que permitan medir "tamaños geométricos" dentro de los espacios funcionales, en una plena alternancia dialéctica de *lo múltiple y lo uno*: familias de seminormas (plural) para captar lo local, y norma (singular) para cubrir lo global. Surgen entonces los famosos *espacios de Banach*, es decir, los espacios vectoriales normados completos, en los cuales pueden enunciarse y demostrarse, en forma precisa, diversos teoremas de extensibilidad de funcionales (*teoremas tipo Hahn–Banach*) (para un estudio histórico del análisis funcional centrado en Banach, ver [Ciesielski & Moslehian 2010]). Los *procesos de saturación* obtenidos son impactantes: *(i)* enlace linealidad/continuidad; *(ii)* estructuración normada del espacio; *(iii)* compleción de esa norma; *(iv)* extensión de lo local a lo global mediante aproximaciones ligadas a jerarquías normadas intermedias. Con otros ejemplos, Lautman había insistido, desde los años treinta, en la importancia central de los procesos de saturación para la matemática moderna (ver [Lautman 2006] o [Lautman 2011]), y la obra de Banach refrenda esa profunda observación lautmaniana.

El registro de *obstrucciones/singularizaciones* ("por qué") enfrentado por Banach es de gran interés matemático, metodológico y filosófico. Una *nueva mirada* permite estudiar las obstrucciones ligadas a conceptos matemáticos vía un *doble salto*: *(i)* funciones ligadas a los conceptos y *(ii) funcionales* ligados a esas funciones. En ese ámbito abstracto es donde se consigue un *enlace original* entre linealidad y continuidad, motor de organización y descubrimiento. Diversas saturaciones permiten ir eliminando entonces obstrucciones naturales (incompletitud, pluralidad de seminormas, localidad) y la matemática se entiende como *progresiva suavización*. La *iteración doble* de la idea de funcionalidad devela nuevos parajes de la matemática que se revierten de manera sorprendente en los estratos iniciales. La generalidad y la abstracción no se realizan así por un deseo vacuo de universalidad, sino con el objetivo concreto de definir los lugares naturales donde los conceptos matemáticos alcanzan una fuerza *organizacional maximal*. La irradiación posterior de los espacios de Banach en todas las áreas del análisis es testigo de esa propulsión organizacional introducida por las técnicas del maestro polaco.

De hecho, una sorprendente cita en un discurso de Banach intuye la emergencia, algunas décadas más tarde, de quien se constituirá en el paladín de esa *matemática suave y general, de fuerza organizacional maximal*, con la cual se quisieran poder resolver las más intrincadas obstrucciones singulares (para el contexto y la cita ver [Kaluza 1996, p. 92]):

> Un matemático es alguien que encuentra analogías entre teoremas; un matemático mejor es alguien que puede ver analogías entre pruebas, y un matemático aún mejor es quien detecta analogías entre teorías. Podemos imaginar al matemático supremo como aquel que puede ver *analogías entre analogías*.

Ese "matemático supremo" tendrá en efecto nombre en la segunda mitad del siglo XX, como veremos en el cuarto artículo de esta serie. Alexander Grothendieck fijará un antes y un después en la matemática, demarcando claramente, a nuestro entender, el lindero entre lo "moderno" y lo "contemporáneo" en la disciplina. Banach, por su lado, podría situarse como un inventor de enorme altura, que encuentra lazos profundos entre teorías (análisis, topología, geometría, álgebra lineal), pero que no alcanza ese rango supremo de *vidente*, reservado a poquísimas figuras en la historia de la matemática (Galois, Riemann, Hilbert, Grothendieck, y no muchos más).

3 Artin. Mediaciones y conservación

Un rasgo prominente ha distinguido desde sus inicios el análisis y el álgebra: el uso corriente de métodos infinitarios en análisis y el deseo de reconducirse a método finitarios en álgebra. La distinción tiende a desvanecerse en el álgebra moderna, donde Dedekind inventa y aprovecha todo tipo de métodos estructurales, muchos de ellos existenciales no finitarios. Sin embargo, dentro de la escuela de Hilbert y sus ramificaciones, tanto Emy Noether como Emil Artin (1898–1962) introducen condiciones ubicuas de finitud en anillos arbitrarios, de manera a poder regresar a problemáticas de generabilidad finita en álgebra abstracta. La obra de Artin —en un sentido de acercamiento a lo "simple"/finitario— no sólo es ejemplo de finura técnica (señalaremos a continuación algunas de sus ideas), sino también ejemplo notable de *finura estilística* (para la importancia del "estilo" matemático, ver [De Lorenzo 1971]). De hecho, algunas de sus monografías, producidas en el exilio norteamericano (Notre Dame, Princeton), se han convertido en verdaderos clásicos, debido a su excepcional elegancia, concisión y minimalidad (económica selección de hipótesis, no redundancia de lemas, navaja de Ockham): *Galois Theory* (1942), *Geometric Algebra* (1957), *Class Field Theory* (1961, con John Tate).

Los *objetos* ("qué") con los que Artin trabaja son operaciones algebraicas y estructuras algebraicas abstractas (modelos de la axiomática "simple" de las operaciones: asociatividad, conmutatividad, neutros, inversos, etc.) que van *más allá* de los modelos estándar (enteros, racionales, complejos, etc.) Los objetos naturales de observación resultan ser entonces *extensiones de campos y anillos de polinomios* correlacionados con esas extensiones. Los *problemas* asociados ("qué") tienen que ver con otro nuevo salto, propio de la modernidad: el paso del control finitario estándar de las operaciones usuales a un *control estructural* de modelos algebraicos *generales.* Algunos subproblemas pueden describirse como: *(i)* axiomatizar en forma natural las propiedades de las operaciones algebraicas estándar y derivar a partir de allí nociones generales de aproximabilidad algebraica (no estándar); *(ii)* producir un concepto amplio de *estructura* algebraica, con nociones intermedias universales (formas de *congruencia*); *(iii)* asegurar clases generales de teoremas para colecciones de estructuras algebraicas "similares".

Las transformaciones ("qué") de esos conceptos (estructura, congruencia, aproximación algebraica) entran entonces a jugar un papel clave, que se convertirá posteriormente en eje de renovación completa del panorama matemático (años cincuenta, explosión de la teoría de categorías). En efecto, por un lado, los *homomorfismos* ("misma forma") son funciones entre estructuras que preservan las operaciones; por otro lado, las *congruencias* —fundamentales testigos de invarianza— se caracterizan como núcleos de homomorfismos, y permiten recuperar, en forma abstracta, construcciones algebraicas imprescindibles como subgrupos normales (en grupos) e ideales (en anillos). Un "buen" comportamiento de las congruencias da lugar a un mejor conocimiento de las estructuras originarias, y emerge así una problemática profunda de *manejo de extensiones, ramificaciones, correspondencias.* Las analogías metodológicas y filosóficas con los procedimientos de Banach son patentes: *(i)* elevación, rastreo de mediaciones estructurales en la elevación, saturación de las mediaciones; *(ii)* dialéctica, reconocimiento de invarianzas en la dialéctica, propulsión de niveles superiores en la dialéctica gracias a invarianzas en rangos inferiores.

Las *regulaciones* ("cómo") de esas elevaciones y dialécticas se consiguen en anillos (aritmética general) o en módulos (linealidad general) a través de condiciones adecuadas sobre *cadenas* de ideales o de submódulos. Noether introduce una *condición de cadena ascendente* (inexistencia de cadenas infinitas estrictamente crecientes, o, dicho de otro modo, *estabilización finitaria* de cadenas crecientes), que se verifica en los anillos de polinomios $K[X]$ sobre un campo K y caracteriza a una colección muy amplia de anillos (*noetherianos*). Artin, por su parte, introduce una idea dual, *condición de cadena descendente*, que asegura la estabilización finitaria de cadenas decrecientes, se verifica en los anillos de matrices y caracteriza a los anillos *artinianos.* Las condiciones de noetherianidad o artinianidad responden así a las exigencias de la época (para una visión amplia de la obra de Noether y Artin, ver [Corry 2004]).

Artin, profundo conocedor de la teoría algebraica de números, *ve y va más allá*, y utiliza su formidable *equilibrio* para proponer muchas ideas y conjeturas nuevas en el cruce de la aritmética clásica y la emergente álgebra abstracta: *(i)* leyes de *reciprocidad* vía extensiones de funciones L (herencia de Riemann, Dirichlet, Dedekind) e isomorfismos asociados; *(ii)* definición de campos reales formales (-1 no suma de cuadrados) y de *campos reales cerrados* (maximales con respecto a los anteriores), conectados con el problema 17 de Hilbert y con enorme influjo en los trabajos posteriores de Robinson en teoría de modelos; *(iii)* elaboración de un análogo abstracto de la hipótesis de Riemann para extensiones cuadráticas (*conjetura de Artin*). Todos estos son ejemplos de una consistente *ampliación del "mundo de los posibles"* a través de estrategias decantadas: abstracciones de operaciones conocidas (estructuras algebraicas), conservaciones de esas abstracciones (homomorfismos, congruencias, ideales), mediaciones ligadas a esas conservaciones (cadenas, ramificaciones, reciprocidades, conteos ligados a funciones de distribución). Se trata de técnicas precisas (noetherianidad, artinianidad) o de teorías amplias (teoría de cuerpos de clases) que permiten rodear bien definidas *obstrucciones* ("por qué": ramificación, no linealidad, infinitud) y, de esa forma, "salvar los fenómenos" en niveles superiores del entendimiento.

4 Weil. Lo continuo y lo discreto

André Weil (1906–1998), reconocido líder de Bourbaki y considerado a mediados del siglo XX como el mayor matemático de su generación, es el paradigma del científico notablemente educado, representante de la gran élite intelectual francesa. Hermano de Simone Weil, estuvo al tanto de la filosofía de punta y de la alta cultura de su época. Profundo conocedor de la historia de su disciplina, sus trabajos redondearon con enorme elegancia la doble tradición francesa y alemana en teoría de números. Investigador de enlaces finos entre la geometría y la aritmética, Weil propuso nuevos fundamentos para la geometría algebraica (*Foundations of Algebraic Geometry*, 1946) y planteó sus famosas hipótesis sobre el comportamiento de curvas algebraicas sobre campos finitos (*conjeturas de Weil*, 1949). A fines de los años cuarenta, la obra de Weil concluye, con esplendor, el periodo de oro de las matemáticas "modernas".

Los *objetos* ("qué") abordados por Weil son, por un lado, las curvas algebraicas, "lugares" de raíces x, y tales que $P(x, y) = 0$, para *algún* polinomio fijo $P = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$ sobre un campo K (por ejemplo, el polinomio $x^n + y^n - 1$ asociado a la curva de Fermat), y, por otro lado, las variedades algebraicas, "lugares" más generales de raíces $x_1, \cdots, x_s$ tales que $P_r(x_1, \cdots, x_s) = 0$, para un conjunto de polinomios $(P_r)_{r\in I}$. El control de los lugares–solución incorpora así, de entrada, otra forma sofisticada de la dialéctica *uno* (curvas)/*múltiple* (variedades). Los *problemas* inmediatos asociados ("qué") deben: *(i)* describir la geometría de esos lugares–solución, tarea de la *geometría algebraica*; *(ii)* manejar herramientas de deformación del lugar, es decir, vaivenes de acción–reacción entre *combinatorias discretas y movimientos continuos*, dentro de la perpetua dialéctica *finitud* (álgebra)/*continuidad* (geometría), con todas sus ramificaciones subsiguientes.

Las *transformaciones* ("cómo") que entran en juego involucran entonces los *campos finitos* (descritos, desde Galois, como extensiones finitas $F_p(a)$: F_p campo con p elementos, p primo, a raíz de polinomio) y las *fracciones racionales* (cocientes de polinomios) sobre esos campos. Los invariantes de las transformaciones (en particular, el *género*) permiten poner en correspondencia las curvas algebraicas y las superficies de Riemann. Las *regulaciones* ("cómo") de esas transformaciones involucran: *(i)* la teoría de Riemann–Roch y *(ii)* las funciones L, herencias de la escuela alemana que Weil aprovechará plenamente para la edificación de sus conjeturas: *(i)* basándose en la idea revolucionaria de Riemann según la cual el conocimiento de una superficie puede obtenerse mediante el estudio de las funciones meromorfas sobre esa superficie (paso de lo extrínseco a lo intrínseco), Riemann y Roch proponen identificar el control topológico (*género*) de una superficie de Riemann con el control *algebraico* (dimensión) de su espacio de meromorfas; *(ii)* unificando la teoría analítica de números (series de Dirichlet, función zeta de Riemann) y la teoría algebraica de números (ideales y ramificación dentro de extensiones de campos, Dedekind), las funciones L integran las dos perspectivas (Hecke, Artin, Hasse), y se definen como *extensiones* de series de Dirichlet que permiten *"medir" obstrucciones y soluciones* en variedades. Recuérdense las problemáticas de saturación, extensión, equilibrio geométrico y algebraico finitario, estudiadas por Banach y Artin: aunque objetos, problemas, transformaciones y regulaciones difieren en cada uno de los tres casos, los fondos metodológico y filosófico son similares. Según Lautman, el último gran filósofo moderno de las matemáticas, una profunda dialéctica común subyace así detrás de sus múltiples encarnaciones regionales.

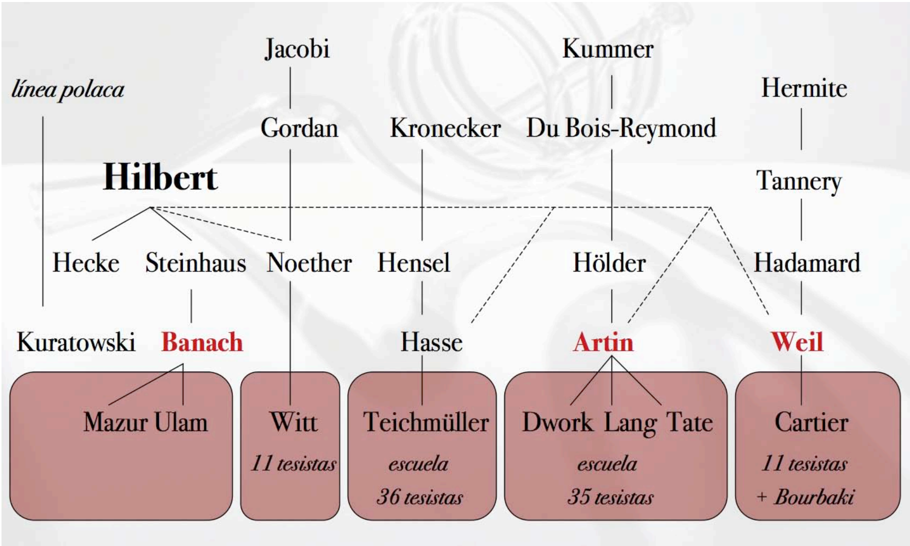
Las conjeturas de Weil proponen una nueva comprensión de la *aporía continuo/discreto* [Weil 1949], y sugieren un sorprendente tratamiento de la aritmética sobre campos finitos *vía* herramientas trascendentes: entendimiento de género, divisores, correspondencias *vía* series y funciones de distribución (zeta, L). Las conjeturas se refieren específicamente al comportamiento de una función zeta generalizada que ayuda a contar lon números de puntos en variedades sobre campos finitos. Weil conjetura: *(i)* la racionalidad de la función zeta; *(ii)* una ecuación funcional que la gobierna; *(iii)* una buena distribución de sus raíces. Heredero de Riemann, Dirichlet, Dedekind, Hasse (quien había demostrado en 1936 las propiedades de esa función zeta para el caso particular de las curvas elípticas), Weil sintetiza en sus conjeturas todo el saber algebraico–aritmético–geométrico de su época. Sin llegar a imaginarlo, Weil propulsará además desde allí la eclosión de ese singular genio matemático del siglo XX —Grothendieck— cuya enorme maquinaria categórica (haces, esquemas, topos, cohomologías) ayudará a resolver las conjeturas en los años setentas.

La mirada de Weil, en los años cuarentas, entronca la geometría de variedades y las topologías de Zariski, develando cómo los lugares naturales del álgebra poseen ciertas geometrías intrínsecas que se captan, en parte, gracias a herramientas trascendentes. Diversos cálculos combinatorios finitos se encuentran *obstruidos* ("por qué") por *restricciones estructurales infinitarias*, codificadas por las funciones (funcionales) L. Los filamentos singulares de la matemática se anudan en trenzas del entendimiento que permiten evitar y esquivar las obstrucciones. De esa manera, con el objetivo de acceder a lo "real" (aritmética, combinatoria, finitud), la matemática requiere primero *ascender* a lo "ideal" (variable compleja, continuidad, infinitud), para luego *descender* e ir proveyendo resoluciones graduales del saber. En esos ascensos y descensos, la *mixturación* del Maestro se hace sentir: Weil combina aritmética y álgebra (Tesis, 1928), aritmética y topología (Adeles, 1939), teorías analítica y algebraica de números (Conjeturas, 1949), integración abstracta, funcionales, aritmética y geometría algebraica (*Basic Number Theory*, 1967), etc. En todos sus *tránsitos* modernos, allende acotaciones subdisciplinares, la riqueza de la matemática vibra en las *técnicas migratorias* de Weil.

5 Encuentros y desencuentros con la cultura

Las dos grandes escuelas matemáticas de la época siguen siendo la escuela alemana (preponderante, como puede verse en la figura siguiente) y la francesa, aunque emergen con enorme vigor y originalidad en ese periodo las escuelas rusa y polaca. La figura de Hilbert sigue tronando en el panorama, ya sea a través de sus discípulos alemanes, de su impacto en algunos de los jóvenes más brillantes del momento (von Neumann, Herbrand), o de su incisiva influencia en los fundadores de Bourbaki. Revisaremos en nuestra próxima entrega el cambio radical en la escritura y en la forma de hacer matemáticas que supone Bourbaki, pero es claro que nada de ello hubiese posible sin Hilbert y su escuela.

Las décadas 1920–1950 se traslapan en gran medida con el periodo de entreguerras. La agitación intelectual europea es en esos momentos realmente enorme, y se trata de un periodo de brillante efervescencia creativa, bien reflejado en el ámbito mucho más acotado de las matemáticas. Las *nuevas arquitecturas*, por ejemplo, pueden ponerse en paralelo con los



protagonistas que hemos venido evocando en este artículo. La *funcionalidad de la Bauhaus* —con su atención fina a gradaciones, economías formales, rasgos de limpieza— recuerda las estrategias de Banach para decantar minimalmente las estructuras del análisis funcional. La *serialidad de Le Corbusier* —abierta a la búsqueda de patrones repetibles, atenta a la ergonomía y a la ecología del lugar arquitectónico— recuerda las búsquedas de Artin para ubicar formas catenarias universales que determinen el comportamiento general de los lugares algebraicos. La *distributividad de Aalto* —descubridora del equilibrio detrás de la oblicuidad, de la conexión detrás de lo separado— se refleja en las maniobras geométricas y algebraicas de Weil para acercar lo continuo y lo discreto.

Algunas de las grandes problemáticas filosóficas de la época se agolpan también en el entorno de estas tres temáticas: *(i)* alrededor de la *funcionalidad*, la ontología ("qué") explora la iteración *func[func]*, la epistemología ("cómo") aborda las mixturaciones del tipo *linealidad + continuidad*, la metafísica ("por qué") se adentra en las correlatividades ocultas de la aporía *continuo/discreto*; *(ii)* alrededor de la *serialidad* (comienzo de una *estructuración* posterior), emergen niveles de *obstrucción* (ontología), vaivenes de *universalidad* (epistemología) y formas *arquetípicas* subyacentes a la obstrucción y el vaivén (metafísica); *(iii)* alrededor de la *distributividad*, aparecen *nuevos mediadores* (como los funcionales y las funciones L), que revelan una progresiva *impureza* aritmética ("contaminación" con la variable compleja y la geometría algebraica), y que reflejan una indispensable *pendularidad* del entendimiento matemático.

Estas *develaciones*, que hemos subrayado en las matemáticas, son también registradas por algunos de los filósofos más originales del momento. Pavel Florenski, en *La perspectiva invertida* (1919) y en las *Lecciones del VchUTEMAS* (1923), muestra cómo un *fondo arquetípico antinómico* subyace inevitablemente detrás de las formas más avanzadas del arte y la matemática. Ernst Cassirer, en su *Filosofía de las formas simbólicas* (1923–1929), estudia con sumo cuidado las arborizaciones evolutivas de la tríada *forma–estructura–función*. Maurice Merleau–Ponty, en su *Fenomenología de la percepción* (1945), sienta las bases de una fenomenología atenta a quiebres y flujos, sensible a la vez al "desliz del suelo" (matemática relativa del periodo) y a una dialéctica oculta "visible/invisible" (matemática emergente con Grothendieck). Se intuye así la necesidad de empezar a construir tanto una *ontología transitoria*, como una *epistemología dinámica*, labores que serán realizadas en parte a finales del siglo XX.

Bibliografía

[Ciesielski & Moslehian 2010] K. Ciesielski and M. Moslehian, *Some remarks on the history of functional analysis*, Ann. Funct. Anal. **1**, 1 (2010).

[Corry 2004] L. Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* (Birkhäuser, Boston, 2004).

[De Lorenzo 1971] J. de Lorenzo, *Introducción al estilo matemático* (Tecnos, Madrid, 1971).

[Kaluza 1996] R. Kaluza, *Through a reporter's eyes: The life of Stefan Banach* (Birkhäuser, Boston, 1996).

[Kuratowski 1980] K. Kuratowski, *A Half Century of Polish Mathematics* (Pergamon Press, Oxford, 1980).

[Kuzawa 1968] M. G. Kuzawa, *Modern Mathematics. The Genesis of a School in Poland* (College and University Press, New Haven, 1968).

[Lautman 2006] A. Lautman, *Les mathématiques, les idées et le réel physique* (Vrin, Paris, 2006).

[Lautman 2011] A. Lautman, *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas* (F. Zalamea: edición, estudio introductorio y traducción), Bogotá: Universidad Nacional — Embajada de Francia — Siglo del Hombre Editores (Biblioteca Francesa de Filosofía), por aparecer (2011).

[Weil 1949] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Am. Math. Soc. **55**, 497 (1949).