Garcia, G. et al. 2010. El Problema de las Estampillas de Correo. Revista Sigma, 10 (1). Pág. 18-31 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/Volúmen X No 1/2.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen X N° 1 (2010), páginas 18–31

El Problema de las Estampillas de Correo

Gilberto Garcia Pulgarín
John Hermes Castillo Gómez
Wilson Fernando Mutis Cantero
Fernando Andrés Benavides Agredo
Universidad de Nariño

Abstract. Let h a positive integer, A a set of positive integers, with hA we denote the set of all integers representable as a sum of at most h elements of A (allowing repetitions). The Postage Stamp Problem, is to find the largest integer $n = n(h, A)$ such that $\{1, \ldots, n\} \subseteq hA$. In this paper we present a new proof of the result of Stöhr that say how to calculate $n(h, A)$ when A has two elements. From this result we show that if h is a positive integer there exists a set A which is an extremal $(\beta, h)-$basis and an extremal $(\beta, h+1)-$basis for two stamps. In addition, we find the cases when exist a set which is an extremal $(\beta, h)-$basis and an extremal $(\beta, h+1)-$basis in the case of three stamps.

Keywords. Postage Stamp Problem, Additive bases.

Resumen. Sean h un entero positivo, A un conjunto de enteros positivos, con hA se denota el conjunto de todos los enteros representables como una suma de a lo más h elementos de A (admitiendo repeticiones). El Problema de las Estampillas de Correo, consiste en encontrar el mayor entero $n = n(h, A)$ tal que $\{1, \ldots, n\} \subseteq hA$. En este texto se presenta una prueba nueva del resultado de Stöhr que dice como calcular $n(h, A)$ cuando A tiene dos elementos. A partir de este resultado se muestra que si h es un entero positivo existe una conjunto A que es una $(\beta, h)-$base extrema y una $(\beta, h+1)-$base extrema para dos estampillas. Además, se muestran los casos en que existe un conjunto que es una $(\beta, h)-$base extrema y una $(\beta, h+1)-$base extrema en el caso de tres estampillas.

Palabras Clave. Problema de las estampillas de correo, Base aditiva.

Introducción

En una oficina postal a cada carta se le debe adherir un número limitado de estampillas y cada estampilla tiene un correspondiente valor en pesos. El valor postal de una carta es la suma de los valores de las estampillas que tiene pegadas, luego si a una carta se le pegan estampillas de valor $1, 5$ y 7, su valor postal es 13. Si en esta oficina se pueden utilizar como máximo 4 estampillas en cada carta, ¿cuál es la carta de menor valor postal que no puede enviarse ?. Es fácil ver que de esta oficina pueden enviarse cartas de valor postal $1, 2, \ldots, 22$; pero que la carta de valor postal 23 no puede ser enviada.

El problema de las estampillas de correo es el siguiente: supóngase que una carta no puede llevar más de h estampillas y que se tiene una cantidad infinita de estampillas distribuidas en k valores diferentes $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ (el conjunto de estampillas); ¿cuál es el menor entero $N = N(h, A)$ tal que la estampilla de valor postal N no puede enviarse? o en forma equivalente ¿cuál es el mayor entero $n = n(h, A)$ tal que toda carta de valor postal desde 1 hasta n puede enviarse ?. Es claro que $n(h, A) = N(h, A) - 1$

Sean h y k enteros positivos dados, *el Problema Global de las Estampillas de Correo* consiste en encontrar el h rango extremo; es decir, encontrar el número

$$n(h, k) = n(h, A^*) = \max_{|A|=k} \{n(h, A)\}$$

y también el conjunto A^* para el cual se alcanza este valor.

Como $A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}$ es un conjunto de enteros positivos entonces se debe tener que $a_1 = 1$, pues de lo contrario se tendría que para todo h, $n(h, A) = 0$. Así que se puede suponer que $a_1 = 1$.

Si $k = 1$ entonces $A = \{1\}$, lo que implica que $n(h, A) = h$. Y de esto $n(h, 1) = h$ para todo h.

El caso $k = 2$, fue resuelto por Stöhr [6], en 1955 (ver Teorema 1). Para $k = 3$, Hofmeister [3] en 1968 construyó la siguiente base de orden h, $A = \{1, a_2, a_3\}$ para h suficientemente grande

$$a_2 = 2\left\lfloor \frac{4h+4}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2h}{9} \right\rfloor + 3,$$

$$a_3 = \left(\left\lfloor \frac{2h}{9} \right\rfloor + 2\right) a_2 - \left\lfloor \frac{4h+4}{9} \right\rfloor - 2$$

Esta base da el valor preciso de $n(h, 3)$, a saber

$$n(h, 3) = \left(h - \left\lfloor \frac{4h+4}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2h}{9} \right\rfloor\right) a_3 + \left\lfloor \frac{2h}{9} \right\rfloor a_2 + \left\lfloor \frac{4h+4}{9} \right\rfloor$$

Después, Hertsch [7] mostró que el resultado anterior se tiene para $h \geq 500$, y Hofmeister [3] mostró que se cumple para $h \geq 200$. Mossige [8] en 1981, verificó la fórmula para $23 \leq h \leq 200$ con ayuda de un computador.

A pesar de los grandes esfuerzos de muchos investigadores, no existe aún una fórmula que permita calcular $n(h, 4)$. Sin embargo, se construyeron algunas bases de orden h para dar cotas inferiores. Mas información sobre el Problema de las Estampillas de Correo y problemas relacionados puede encontrarse en [1].

Este artículo está divido como sigue. En la segunda sección se presenta las definiciones generales de bases aditivas. En la tercera sección se define formalmente el Problema de las Estampillas de Correo y se da una nueva demostración del resultado de Stöhr para dos estampillas (ver Teorema 1). En la cuarta sección se estudia cuando existe un conjunto A tal que es una $(\beta, h)-$base extrema y una $(\beta, h+1)-$base extrema en el caso de dos y tres estampillas. Finalmente en la última sección se presentan las implementaciones en MuPAD de los algoritmos usados durante la elaboración de este trabajo.

1. Bases aditivas

Sean $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales, $A \subset \mathbb{N}$ un conjunto de enteros no negativos, $|A| = k$ su cardinal, h un entero positivo. Para n un entero positivo, con $[0, n]$ se denota el intervalo de enteros entre 0 y n. Con hA (respectivamente $h * A$) se denota el conjunto de enteros que son suma de a lo más h elementos de A, admitiendo repeticiones (respectivamente sin admitir repeticiones). Es decir,

$$hA = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i a_i \; : \; \sum_{i=1}^{k} x_i \leq h, \; x_i \in \mathbb{N} \right\}$$

$$h * A = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i a_i \; : \; \sum_{i=1}^{k} x_i \leq h, \; 0 \leq x_i \leq 1, \; x_i \in \mathbb{N} \right\}$$

Definición 1. *Sean A un conjunto finito de enteros no negativos y h un entero positivo.*

1. *A es una base restringida de orden h para n ó una $(\alpha, h)-$base para n si $[0, n] \subset h * A$.*
2. *A es una base de orden h para n ó una $(\beta, h)-$base para n si $[0, n] \subset hA$.*
3. *A es una base restringida de orden h para $\mathbb{Z}_n$ ó una $(\gamma, h)-$base para $\mathbb{Z}_n$, si $\mathbb{Z}_n = h * A$.*
4. *A es una base de orden h para $\mathbb{Z}_n$ ó una $(\delta, h)-$base para $\mathbb{Z}_n$, si $\mathbb{Z}_n = hA$.*

Ejemplo 1. *Sea $A = \{1, 2, 4, 8\}$ entonces*

$$\begin{aligned} 1 * A &= \{0, 1, 2, 4, 8\} \\ 2 * A &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12\} \\ 3 * A &= [0, 14] \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} 1A &= \{0, 1, 2, 4, 8\} \\ 2A &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16\} \\ 3A &= [0, 14] \cup \{16, 17, 18, 20, 24\} \end{aligned}$$

Del ejemplo anterior A es una $(\beta, 3)-$base y una $(\alpha, 3)-$base para 14. Además, A es una $(\beta, 3)-$base y una $(\alpha, 3)-$base para 13. En realidad A es una $(\beta, 3)-$base y una $(\alpha, 3)-$base para cualquier entero positivo menor o igual que 14. Si $* \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ tiene validez la pregunta ¿cuál es el mayor entero n tal que A sea una $(*, h)-$base para n o para $\mathbb{Z}_n$? Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2. *El $(*, h)-$rango de A, que se denota por $n_*(h, A)$, es el mayor entero n, tal que A es una $(*, h)-$base para n o $\mathbb{Z}_n$.*

Definición 3. *Sean h, k enteros positivos y $* \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, el $(*, h)-$rango de k, que se denota con $N_*(h, k)$, es el mayor entero n para el cual existe un conjunto A, con k elementos, tal que A es una $(*, h)-$base para n o $\mathbb{Z}_n$. En tal caso, A se denomina una $(*, h)-$base extrema para k.*

Del ejemplo 1, el $(\alpha, 3)-$rango y el $(\beta, 3)-$rango de A son iguales a 14. A continuación se calcula el $(\alpha, 3)-$rango de 4; es decir, se calcula $N_\alpha(3, 4)$. Sea B una $(\alpha, 3)-$base extrema de 4 y sea $n = N_\alpha(3, 4)$. Claramente $1, 2 \in B$ (pues en $h * A$ no se permiten repeticiones), entonces $3 \in 2 * B$ pero 4 no está, así que 4 debe estar en B. Luego B contiene los elementos $1, 2, 4$. Sea $B = \{1, 2, 4, b\}$, entonces

$$\begin{aligned} 1 * B &= \{0, 1, 2, 4, b\} \\ 2 * B &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, b+1, b+2, b+4\} \\ 3 * B &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, b, b+1, b+2, b+3, b+4, b+5, b+6\} \end{aligned}$$

Luego, si $b = 8$ se logra cubrir con $3 * B$, el intervalo $[0, 14]$. Con cualquier otra escogencia de b, el intervalo que se logra cubrir es más pequeño. Por lo tanto, $N_\alpha(3, 4) = 14$ y entonces B es una $(\alpha, 3)-$base extrema para 4. Por otro lado, B no es una $(\beta, 3)-$base extrema para 4 ya que si $A = \{1, 4, 7, 8\}$, puede verse que $n_\beta(3, B) = 24$, con lo que $N_\beta(3, 4) \geq 24$. Es más, se puede probar A es una base extrema para 4, pues $N_\beta(3, 4) = 24$.

Ejemplo 2. *Para calcular $N_\beta(3, 3)$, sea $a < b$, $B = \{1, a, b\}$ entonces $3B = \{0, 1, 2, 3, a, b, a+1, a+2, b+1, b+2, a+b, 2a+1, 2b+1, 2a+b, a+2b, 2a, a+b+1, 3a, 2b, 3b\}$. Para obtener un intervalo se debe tener que $7, 10 \in 3B$, y en consecuencia $b \neq 7$. Si $b = 6$, $[0, 12] \subset 3B$, mientras que si $b = 5$, $3B = [0, 15]$, así que $B = \{1, 4, 5\}$ es una $(\beta, 3)-$base extrema para $k = 3$ y además $N_\beta(3, 3) = 15$.*

2. El Problema General

En una oficina postal para enviar una carta se le deben adherir estampillas, de un determinado valor. El *valor postal* de una carta es la suma de los valores de las estampillas que tiene pegadas. Por ejemplo, si a una carta se le pegan tres estampillas de valores $1, 5$ y 7 pesos, su valor postal es 13. Además, si en esta oficina sólo se tienen estampillas de $1, 5, 7$ pesos y se pueden utilizar como máximo cuatro estampillas en cada carta, ¿cuál es la carta de menor valor postal que no puede enviarse utilizando a lo más cuatro estampillas? Se puede ver que de esta oficina pueden enviarse cartas de valores postales $1, 2, \ldots, 22$; pero que la carta de valor postal 23 no puede ser enviada.

En general, supóngase que en una oficina del correo postal una carta no puede llevar más de h estampillas y que se tiene una cantidad suficiente de estampillas distribuidas en k valores diferentes $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ (el conjunto de estampillas); ¿cuál es el menor entero positivo $N = N(h, A)$, tal que la carta de valor postal N no puede enviarse? o en forma equivalente ¿cuál es el mayor entero $n = n(h, A)$ tal que toda carta de valor postal entre 1 y n puede enviarse? De lo anterior es claro que $n(h, A) = N(h, A) - 1$.

Este problema se conoce como el *El Problema de las Estampillas de Correo*. Formalmente el problema puede presentarse como sigue:

Sean h un entero positivo y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ un conjunto de k enteros positivos (las estampillas), encontrar el menor entero positivo N que no puede representarse como suma de a lo más, h elementos de A, admitiendo repeticiones en tal representación. Este entero N se denota con $N(h, A)$.

Sea $n(h, A) = N(h, A) - 1$, dado que $N(h, A)$ es el menor entero que no puede representarse como suma de a lo más h elementos (no necesariamente diferentes) de A, entonces $n(h, A)$ es el mayor entero positivo tal que todo entero no negativo menor o igual que él tiene una representación como suma de a lo más h elementos de A (admitiendo repeticiones). Es claro que si se ordenan los elementos del conjunto A en la forma $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, entonces a_1 debe ser igual a 1, pues de lo contrario $N(h, A) = 1$.

Encontrar $n(h, A)$, para h y A dados, se conoce como *el Problema Local de las Estampillas de Correo*. En otras palabras el problema local consiste en encontrar el mayor entero n tal que A sea una $(\beta, h)-$base para n.

Sean h y k enteros positivos dados, *el Problema Global de las Estampillas de Correo* consiste en encontrar el $(\beta, h)-$rango de k; es decir,

$$n(h,k) = N_\beta(h,k) = \max_{|A|=k}\{n(h,A)\}$$

y además, encontrar una $(\beta, h)-$base extrema A para k; tal que $|A| = k$ y $n(h,A) = n(h,k)$. Si $k = 1$, entonces $A = \{1\}$, y por lo tanto $n(h,A) = h$, en consecuencia $n(h,1) = h$, para todo entero positivo h.

2.1. El caso de dos estampillas

En esta sección se presenta la solución de los problemas local y global de las estampillas de correo, para el caso en el que el conjunto A tiene dos elementos. Sea $A = \{1, a\}$ y h un entero positivo. El siguiente resultado presenta la estructura del conjunto hA.

Proposición 1. *Si h es un entero positivo y $A = \{1, a\}$, entonces*

$$hA = \bigcup_{i=0}^{h}(ia + [0, h-i]).$$

Demostración. Sea $n \in hA$, entonces $n = k + ia$, donde $k, i \geq 0$ y $k + i \leq h$. Por lo tanto para i entre 0 y h, se tiene que $k \in [0, h-i]$. De esta forma $hA \subseteq \bigcup_{i=0}^{h}(ia + [0, h-i])$. Además, como para cada $0 \leq i \leq h$, $ia + [0, h-i] \subseteq hA$, de donde se tiene el resultado.
☑

Cuando el conjunto de estampillas tiene dos elementos se conoce el valor exacto del $(\beta, h)-$rango de cualquier conjunto $A = \{1, a\}$ y además cual debe ser el valor de a para que A sea una $(\beta, h)-$base extrema para 2. Jia [1], dice que esto se sabe gracias al siguiente resultado de Stöhr

Teorema 1. *Para cualquier conjunto $A = \{1, a\}$*

$$n(h,A) = \begin{cases} h, & si\ a \geq h+2 \\ (h-a+3)a-2, & si\ a \leq h+1 \end{cases}$$

y entonces A es una $(\beta, h)-$base extrema para 2 si

$$a = \begin{cases} \frac{1}{2}(h+3), & si\ h\ es\ impar \\ \frac{1}{2}(h+3\pm 1), & si\ h\ es\ par \end{cases}$$

Así, $n(h,2) = \left\lfloor \dfrac{h^2+6h+1}{4} \right\rfloor$.

Demostración. Primero note que hA se puede representar mediante el esquema (1).
Es claro que cada uno de los renglones en el esquema (1) está constituido por enteros consecutivos, lo que implica que $n(h,A) = ka + (h-k)$, para algún entero $0 \leq k \leq h$. El primer entero positivo que no está en hA va a aparecer cuando el último elemento del i-ésimo renglón sea menor que el primer elemento del $(i+1)$-ésimo renglón menos uno, esto es cuando

$$ia + (h-i) < (i+1)a - 1.$$

De ahí que $ia + (h-i) + 1 \leq (i+1)a - 1$, de donde $i \geq h - a + 2$.

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 2 & \ldots & h-1 & h \\
a & a+1 & a+2 & \ldots & a+(h-1) & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & & \\
ia & ia+1 & ia+2 & \ldots \quad ia+(h-i) & & \\
(i+1)a & (i+1)a+1 & \ldots & (i+1)a+h-i-1 & & \\
\vdots & \vdots & \ldots & & & \\
(h-1)a & (h-1)a+1 & & & & \\
ha & & & & &
\end{array}
$$

Figura 1: Esquema de hA.

Sea $\lceil h-a+2 \rceil^+$ el menor entero no negativo que es mayor o igual que $h-a+2$. Por lo tanto

$$n(h, A) = \lceil h-a+2 \rceil^+ a + h - \lceil h-a+2 \rceil^+$$

Si $a \geq h+2$ entonces $\lceil h-a+2 \rceil^+ = 0$ de donde $n(h, A) = h$. Y, finalmente, si $a \leq h+1$ entonces $\lceil h-a+2 \rceil^+ = h-a+2$. Esto demuestra el primer resultado del teorema. Para demostrar los demás resultados basta con notar que una $(\beta, h)-$base extrema para 2 se tiene cuando $a \leq h+1$, y así $n(h, A) = (h-a+3)a-2$. Calculando los puntos críticos de la anterior función se completa la prueba.

☑

i h es un entero positivo par, entonces existen dos $(\beta, h)-$bases extremas para 2. Además, si h es un entero positivo impar, existe una única $(\beta, h)-$base extrema para 2.

Demostración. Se tiene del teorema 1. ☑

.ΩΩSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.ΩType-H-¡return¿-for-immediate-helpig1
Sea h un entero positivo. Existe un conjunto A que es una $(\beta, h)-$base y una $(\beta, h+1)-$base extrema para 2.

Demostración. Del teorema 1, se tiene que para h un entero positivo impar ($h+1$ es par), $A = \{1, \frac{h+3}{2}\}$ es una $(\beta, h)-$base y una $(\beta, h+1)-$base para 2. ☑

Para el caso de 3 estampillas, Selmer y Beyer [2] dieron un algoritmo para solucionar el problema global de las estampillas de correo; es decir dado un entero positivo h encontrar una $(\beta, h)-$base extrema para 3. El método del algoritmo de Selmer y Beyer está basado en fracciones continuas. En la sección 5 se presenta la implementación de este algoritmo en MuPAD (ver 5.2).

3. Igualdad de las bases extremas para el caso de tres estampillas

En el corolario **??**, se probó que cuando se tienen dos estampillas existe un conjunto que es una (β, h) y una $(\beta, h+1)-$base a la vez. En esta sección se muestran los casos en los que existe un conjunto que es una (β, h) y $(\beta, h+1)-$base extrema, para tres estampillas. Este resultado fue sugerido por los cálculos que se hicieron con el programa de cálculo simbólico MuPAD usando el algoritmo *bcriticacon* (ver 5.2).

Jia, en [1], dice que Hofmeister, en el artículo [3] de 1968, construyó la siguiente $(\beta, h)-$base extrema para $k = 3$, con h suficientemente grande, $A = \{1, a_2, a_3\}$.

$$a_2 = 2\left\lfloor \frac{4h+4}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2h}{9} \right\rfloor + 3; \tag{3.1}$$

$$a_3 = \left(\left\lfloor \frac{2h}{9} \right\rfloor + 2\right) a_2 - \left\lfloor \frac{4h+4}{9} \right\rfloor - 2. \tag{3.2}$$

A partir de este resultado se puede calcular explícitamente una base extrema para h, mirando a h módulo 9; es decir tomando $h = 9t + r$, con $t \in \mathbb{Z}^+$ y $0 \leq r \leq 8$.

1. Si $h \equiv 0$ mód 9; es decir $h = 9t$ entonces

$$a_2 = 2(4t) - 2t + 3 = 6t + 3.$$

y

$$\begin{aligned} a_3 =& (2t+2)(6t+3) - 4t - 2 \\ =& 12t^2 + 14t + 4. \end{aligned}$$

2. Si $h \equiv 1$ mód 9; es decir, $h = 9t + 1$, se tiene que

$$a_2 = 2(4t) - 2t + 3 = 6t + 3.$$

y

$$\begin{aligned} a_3 =& (2t+2)(6t+3) - 4t - 2 \\ =& 12t^2 + 14t + 4. \end{aligned}$$

3. Si $h \equiv 2$ mód 9; es decir, $h = 9t + 2$, se tiene que

$$a_2 = 2(4t+1) - 2t + 3 = 6t + 5.$$

y

$$\begin{aligned} a_3 =& (2t+2)(6t+5) - (4t+1) - 2 \\ =& 12t^2 + 18t + 7. \end{aligned}$$

4. Si $h \equiv 3$ mód 9; es decir, $h = 9t + 3$, se tiene que

$$a_2 = 2(4t+1) - 2t + 3 = 6t + 5.$$

y

$$\begin{aligned} a_3 =& (2t+2)(6t+5) - (4t+1) - 2 \\ =& 12t^2 + 18t + 7. \end{aligned}$$

5. Si $h \equiv 4$ mód 9; es decir, $h = 9t + 4$, se tiene que

$$a_2 = 2(4t+2) - 2t + 3 = 6t + 7.$$

y

$$\begin{aligned} a_3 =& (2t+2)(6t+7) - (4t+2) - 2 \\ =& 12t^2 + 22t + 10. \end{aligned}$$

6. Si $h \equiv 5$ mód 9; es decir, $h = 9t + 5$, se tiene que

$$a_2 = 2(4t+2) - (2t+1) + 3 = 6t + 6.$$

y

$$\begin{aligned} a_3 =& (2t+3)(6t+6) - (4t+2) - 2 \\ =& 12t^2 + 26t + 14. \end{aligned}$$

7. Si $h \equiv 6$ mód 9; es decir, $h = 9t + 6$, se tiene que

$$a_2 = 2(4t+3) - (2t+1) + 3 = 6t + 8.$$

y

$$\begin{aligned} a_3 =& (2t+3)(6t+8) - (4t+3) - 2 \\ =& 12t^2 + 30t + 19. \end{aligned}$$

8. Si $h \equiv 7$ mód 9; es decir, $h = 9t + 7$, se tiene que

$$a_2 = 2(4t+3) - (2t+1) + 3 = 6t + 8.$$

y

$$\begin{aligned} a_3 =& (2t+3)(6t+8) - (4t+3) - 2 \\ =& 12t^2 + 30t + 19. \end{aligned}$$

9. Si $h \equiv 8$ mód 9; es decir, $h = 9t + 8$, se tiene que

$$a_2 = 2(4t+4) - (2t+1) + 3 = 6t + 10.$$

y

$$\begin{aligned} a_3 =& (2t+3)(6t+10) - (4t+4) - 2 \\ =& 12t^2 + 34t + 24. \end{aligned}$$

Se resumen estos resultados en el siguiente lema

Lema 1. *Sea h suficientemente grande. Entonces una $(\beta, h)-$base extrema para $k = 3$, denotada mediante A^* viene dada por:*

1. *Si $h = 9t$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A^* = \{1, 6t+3, 12t^2 + 14t + 4\}$.*
2. *Si $h = 9t + 1$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A^* = \{1, 6t+3, 12t^2 + 14t + 4\}$.*
3. *Si $h = 9t + 2$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A^* = \{1, 6t+5, 12t^2 + 18t + 7\}$.*
4. *Si $h = 9t + 3$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A^* = \{1, 6t+5, 12t^2 + 18t + 7\}$.*
5. *Si $h = 9t + 4$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A^* = \{1, 6t+7, 12t^2 + 22t + 10\}$.*
6. *Si $h = 9t + 5$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A^* = \{1, 6t+6, 12t^2 + 26t + 14\}$.*
7. *Si $h = 9t + 6$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A^* = \{1, 6t+8, 12t^2 + 30t + 19\}$.*
8. *Si $h = 9t + 7$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A^* = \{1, 6t+8, 12t^2 + 30t + 19\}$.*

9. Si $h = 9t + 8$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $A^* = \{1, 6t + 10, 12t^2 + 34t + 24\}$.

Teorema 2. *Las (β, h) y $(\beta, h+1)-$bases extremas para 3 son iguales si y sólo si $h \equiv 0, 2, 6$ (mód 9).*

Demostración. Inmediato a partir del lema 1. ☑

Teorema 3. *Sea $A = \{1, a_2, a_3\}$ la $(\beta, h)-$base extrema para 3, entonces*

$$3a_3 = \begin{cases} a_2^2 + a_2, & si\ h \equiv 0, 1, 5 \pmod 9 \\ a_2^2 - a_2 + 1, & si\ h \equiv 2, 3, 6, 7 \pmod 9 \\ a_2^2 - 3a_2 + 2, & si\ h \equiv 4, 8 \pmod 9 \end{cases}$$

Demostración. Basta ver los resultados del Lema 1. ☑

Además, según Jia en [1], Hofmeister en el mismo artículo de 1968 demostró que si $A^* = \{1, a_2, a_3\}$ es una $(\beta, h)-$base extrema para $k = 3$, el $(\beta, h)-$rango de 3 viene dado por:

$$N_\beta(h, 3) = \left(h - \left\lfloor \frac{4h+4}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2h}{9} \right\rfloor\right) a_3 + \left\lfloor \frac{2h}{9} \right\rfloor a_2 + \left\lfloor \frac{4h+4}{9} \right\rfloor \tag{3.3}$$

De este resultado se tienen los siguientes casos para el $(\beta, h)-$rango de 3, tomando congruencias módulo 9.

Lema 2. *Sea h suficientemente grande. Si $A^* = \{1, a_2, a_3\}$ es una $(\beta, h)-$base extrema para 3, el $(\beta, h)-$rango de 3 viene dado por:*

1. *Si $h = 9t$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $N_\beta(h, 3) = 3ta_3 + 2ta_2 + 4t$.*
2. *Si $h = 9t + 1$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $N_\beta(h, 3) = (3t + 1)a_3 + 2ta_2 + 4t$.*
3. *Si $h = 9t + 2$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $N_\beta(h, 3) = (3t + 1)a_3 + 2ta_2 + 4t + 1$.*
4. *Si $h = 9t + 3$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $N_\beta(h, 3) = (3t + 2)a_3 + 2ta_2 + 4t + 1$*
5. *Si $h = 9t + 4$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $N_\beta(h, 3) = (3t + 2)a_3 + 2ta_2 + 4t + 2$*
6. *Si $h = 9t + 5$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $N_\beta(h, 3) = (3t + 2)a_3 + (2t + 1)a_2 + 4t + 2$*
7. *Si $h = 9t + 6$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $N_\beta(h, 3) = (3t + 2)a_3 + (2t + 1)a_2 + 4t + 3$*
8. *Si $h = 9t + 7$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $N_\beta(h, 3) = (3t + 3)a_3 + (2t + 1)a_2 + 4t + 3$*
9. *Si $h = 9t + 8$, para algún $t \in \mathbb{Z}^+$, entonces $N_\beta(h, 3) = (3t + 3)a_3 + (2t + 1)a_2 + 4t + 4$*

Teorema 4. *Sea h un entero suficientemente grande, entonces*

1. *Si $h \equiv 0, 2, 6$ mód 9, entonces $N_\beta(h + 1, 3) = N_\beta(h, 3) + a_3$.*
2. *Si $h \equiv 5, 7$ mód 9, entonces $N_\beta(h + 1, 3) = N_\beta(h, 3) + a_3 + t - 1$*
3. *Si $h \equiv 1, 3$ mód 9, entonces $N_\beta(h + 1, 3) = N_\beta(h, 3) + a_3 + 3t$.*
4. *Si $h \equiv 4$ mód 9, entonces $N_\beta(h + 1, 3) = N_\beta(h, 3) + a_2 + a_3 - 4t - 3$.*

donde $t = \left\lfloor \frac{h}{9} \right\rfloor$.

Demostración. Sean $A^* = \{1, a_2, a_3\}$ la $(\beta, h)-$base extrema para 3 y $B^* = \{1, b_2, b_3\}$ la $(\beta, h + 1)$-base extrema para 3.

1. Si $h = 9t$ entonces $h+1 = 9t+1$. Luego, del Lema 1

$$\begin{aligned} a_2 &= 6t+3 \\ a_3 &= 12t^2+14t+4 \\ b_2 &= 6t+3 = a_2 \\ b_3 &= 12t^2+14t+4 = a_3 \end{aligned}$$

y del Lema 2; $N_\beta(h,3) = 3ta_3 + 2ta_2 + 4t$ y $N_\beta(h+1,3) = (3t+1)b_3 + 2tb_2 + 4t$; de donde

$$N_\beta(h+1,3) = (3t+1)b_3 + 2tb_2 + 4t = 3ta_3 + 2ta_2 + 4t + a_3 = N_\beta(h,3) + a_3$$

Por lo tanto si $h \equiv 0 \operatorname{mód} 9$, entonces $N_\beta(h+1,3) = N_\beta(h,3) + a_3$. La prueba es similar cuando $h \equiv 2, 6 \operatorname{mód} 9$.

2. Si $h = 9t+5$ entonces $h+1 = 9t+6$. Luego, del Lema 1

$$\begin{aligned} a_2 &= 6t+6 \\ a_3 &= 12t^2+26t+14 \\ b_2 &= 6t+8 = a_2+2 \\ b_3 &= 12t^2+30t+19 = a_3+4t+5 \end{aligned}$$

y del Lema 2; $N_\beta(h,3) = (3t+2)a_3 + (2t+1)a_2 + 4t+2$ y $N_\beta(h+1,3) = (3t+2)b_3 + (2t+1)b_2 + 4t+3$; de donde

$$\begin{aligned} N_\beta(h+1,3) &= (3t+2)b_3 + (2t+1)b_2 + 4t+3 \\ &= (3t+2)(a_3+4t+5) + (2t+1)(a_2+2) + 4t+3 \\ &= N_\beta(h,3) + 12t^2 + 27t + 13 \\ &= N_\beta(h,3) + a_3 + t - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $h \equiv 0 \operatorname{mód} 9$, entonces $N_\beta(h+1,3) = N_\beta(h,3) + a_3 + t - 1$. La prueba es similar cuando $h \equiv 7 \operatorname{mód} 9$.

3. Si $h = 9t+3$ entonces $h+1 = 9t+6$. Luego, del Lema 1

$$\begin{aligned} a_2 &= 6t+5 \\ a_3 &= 12t^2+18t+7 \\ b_2 &= 6t+7 = a_2+2 \\ b_3 &= 12t^2+22t+10 = a_3+4t+3 \end{aligned}$$

y del Lema 2; $N_\beta(h,3) = (3t+2)a_3 + (2t)a_2 + 4t+1$ y $N_\beta(h+1,3) = (3t+2)b_3 + (2t)b_2 + 4t+2$; de donde

$$\begin{aligned} N_\beta(h+1,3) &= (3t+2)b_3 + (2t)b_2 + 4t+2 \\ &= (3t+2)(a_3+4t+3) + (2t)(a_2+2) + 4t+2 \\ &= N_\beta(h,3) + 12t^2 + 21t + 7 \\ &= N_\beta(h,3) + a_3 + 3t \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $h \equiv 3 \operatorname{mód} 9$, entonces $N_\beta(h+1,3) = N_\beta(h,3) + a_3 + 3t$. La prueba es similar cuando $h \equiv 1 \operatorname{mód} 9$.

4. Si $h = 9t + 4$ entonces $h + 1 = 9t + 5$. Luego, del Lema 1

$$\begin{aligned} a_2 &= 6t + 7 \\ a_3 &= 12t^2 + 22t + 10 \\ b_2 &= 6t + 6 = a_2 - 1 \\ b_3 &= 12t^2 + 26t + 14 = a_3 + 4t + 4 \end{aligned}$$

y del Lema 2; $N_\beta(h, 3) = (3t + 2)a_3 + (2t)a_2 + 4t + 2$ y $N_\beta(h + 1, 3) = (3t + 2)b_3 + (2t + 1)b_2 + 4t + 2$; de donde

$$\begin{aligned} N_\beta(h + 1, 3) &= (3t + 2)b_3 + (2t + 1)b_2 + 4t + 2 \\ &= (3t + 2)(a_3 + 4t + 4) + (2t + 1)(a_2 - 1) + 4t + 2 \\ &= N_\beta(h, 3) + 12t^2 + 18t + 7 + a_2 \\ &= N_\beta(h, 3) + a_2 + a_3 - 4t - 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $h \equiv 4 \mod 9$, entonces

$$N_\beta(h + 1, 3) = N_\beta(h, 3) + a_2 + a_3 - 4t - 3$$

☑

4. Algoritmos

Dados un entero positivo h y un conjunto A de enteros positivos primos relativos entre sí, los siguientes algoritmos se utilizan para calcular el conjunto hA.

4.1. Algoritmo sumset

Este algoritmo recibe dos conjuntos A, B de enteros positivos y calcula el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A; b \in B\}$.

```
sumset:=proc(A,B) local c, x, y; begin c:={}; for x in A do
  for y in B do
    c:=c union {x+y};
   end_for;
end_for; c; end_proc;
```

4.2. Algoritmo hsumset

Dado un entero positivo h y un conjunto de enteros positivos A, el algortimo hsumset calcula el conjunto hA.

```
hsumset:=proc(h,A) local A1,t,B, B1; begin
  if h=1 then
    return(A union {0});
  end_if;
A1:= A union {0}; B1:= A union {0};
  for t from 1 to h-1 do
   B:=sumset(A1,B1);
   B1:=B;
  end_for;
B1; end_proc;
```

5. Algoritmos de Fracciones Continuas

En esta sección se presenta la implementación en MuPAD de los algoritmos de Selmer y Beyer [2]. Los siguientes algoritmos son una aplicación directa de la relación que existe entre el Problema de Frobenius y el problema de las estampillas de correo. Esta relación fue demostrada por Selmer en [4]. En particular; dado un conjunto de enteros positivos $A = \{1, a_2, a_3\}$ y un entero positivo h entonces, $N(h, A) = ha_3 - g(a_3 - a_2, a_3 - 1, a_3)$, donde $g(x, y, z)$ denota el número de Frobenius del conjunto $\{x, y, z\}$, o en otras palabras el mayor entero n que no se puede escribir en la forma $n = ax + by + cz$ con coeficientes no negativos x, y, z. Ver [5] para más información sobre el Problema de Frobenius.

5.1. Algoritmo frobeniuscon

Este algoritmo calcula el número de Frobenius para un conjunto de tres enteros positivos primos relativos entre sí dado. utilizando el método de Selmer y Beyer descritó en [2].

```
frobeniuscon:=proc(a,b,c) local d,s0,t,l,P0,Q0,q1,P1,Q1,s1,P,q,S,Q;
begin if gcd(a,b,c)>1 then
 return("cambie base");
end_if; if gcd(a,b)>1 and gcd(b,c)>1 then
  d:=c;
  c:=b;
  b:=d;
 elif gcd(b,c)=1 then
   d:=a;
   a:=c;
   c:=d;
end_if; [a,b,c]; s0:=(c mod a)*powermod(b,-1,a); s0:=(s0 mod a);
t:=(b*s0-c)/a; if t<=0 then
  return(FALSE);
end_if; l:=0; P0:=1; Q0:=0; q1:=floor(a/s0)+1; P1:=q1; Q1:=1;
s1:=s0-(a mod s0); if b/t>=P1/Q1 then
return(-a+b*(s0-1)+c*(P1-1)-min(b*s1,c*P0)); end_if;
  while l=0 do
   q:=floor(s0/s1)+1;
   s:=s1-(s0 mod s1);
   P:=q*P1-P0;
   Q:=q*Q1-Q0;
  if (P/Q)<=(b/t) and (b/t)<=(P1/Q1) then
    return(-a+b*(s1-1)+c*(P-1)-min(b*s,c*P1))
  end_if;
   s0:=s1;
   s1:=s;
   Q0:=Q1;
   Q1:=Q;
   P0:=P1;
   P1:=P;
  end_while;
end_proc;
```

5.2. Algoritmo bcriticacon

Dado un entero positivo h, este algoritmo calcula la $(\beta, h)-$base extrema y el respectivo $(\beta, h)-$rango extremo para 3.

```
bcriticacon:=proc(h) local b1,a,n,u,b,A,t,L, base1; begin
n:=floor((h*h+6*h+1)/4); base1:= []; for a from 2 to h+1 do
  u:=h*a-(a-1)^2;
  for t from 1 to u do
   L:=[a,h,t,u];
   write(Text, "baseshcon",L);
   A:={1,a,a+t};
   if h*(a+t)<n then
    next;
   end_if;
   b1:=frobeniuscon(t,a+t-1,a+t);
   if b1=FALSE then
    next;
   end_if;
   b:=h*(a+t)-b1-1;
   if b>=n then
     if b>n then
      n:=b;
      base1:=[A];
     else
      base1:=[op(base1), A];
     end_if;
   end_if;
  end_for;
 end_for;
[n, base1]; end_proc:
```

Referencias

[1] 19, 22, 24, 26

Hsu, D. Frank; Jia, Xingde. Additive bases and extremal problems in groups, graphs and networks. Util. Math. 66 (2004), 61–91. MR2106212.

[2] Selmer, Ernst S.; Beyer, Öyvind. On the linear Diophantine problem of Frobenius in three variables. J. Reine Angew. Math. 301 (1978), 161–170. MR0557015. 23, 29

[3] 19, 24

G. Hofmeister, Asympotische abschatzungen für dreielementige extremalbasen in naturlichen zahlen, J. Reine. Angew. Math. 232, 77-101,(1968)

[4] 29

Selmer, Ernst S. On the postage stamp problem with three stamp denominations. Math. Scand. 47 (1980), no. 1, 29–71. MR0600078

[5] Ramírez Alfonsín, J. L. The Diophantine Frobenius problem. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 30. Oxford University Press, Oxford, 2005. xvi+243 pp. ISBN: 978-0-19-856820-9; 0-19-856820-7 MR2260521 29

[6] A. Stöhr, Delöste und ungelöste fragen über basen der natürlichen zahlenreihe i und ii, J. Rein. Angew. Math. 194 (1955), 40-65.

[7] W. Hertsch, Bestimmung der dreielementigen extremalbasen und deren reichweiten. staatsexamensarbeit, Math. Inst., Joh. Gutenberg. Univ. Mainz (1972). 19

[8] Svein Mossige, Algorithms for computing the h-range of the postage stamp problem, Math. Comput. 36 (1981), 575-582. 19

19

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
++++++++++++++++++++++++++++++
e-mail: `gigarcia@member.ams.org`
e-mail: `jhcastillo@gmail.com`
e-mail: `wfmutis@gmail.com`
e-mail: `fandresbenavides@gmail.com`