

¿Necesita la economía de unas matemáticas propias distintas a las de la física?

ANGÉLICA CHAPPE

Politécnico Grancolombiano, Bogotá, Colombia

SERGIO MONSALVE

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

ABSTRACT. Some historical reasons for the late appearance of mathematics in economics are explained. Also some possible deficiencies of classical physics mathematics in the study of economic phenomena are explored.

Key words and phrases. Mathematical economy, history.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 91B02

RESUMEN. Se explican algunas razones históricas para la aparición tardía de las matemáticas en la economía. Se exploran ciertas posibles deficiencias de las matemáticas de la física clásica en el estudio de los fenómenos económicos.

Introducción

Con respecto a la física, la economía, como ciencia matemática, tiene un desarrollo tardío. Aunque las primeras conexiones matemáticas–economía se realizan, obviamente, en los cálculos primitivos y contabilidades de naturaleza comercial llevados a cabo desde tiempos remotos, el uso del lenguaje matemático tiene una tradición que se remonta al siglo XVIII con el *De re Nummeraria, Quoad Fiere Potuit Geometrice Tractata* (1711) de GIOVANNI CEVA, en donde aparecen algunas aplicaciones aritméticas a la economía. Después, en su *Essay on the Nature of Commerce in General* de 1730, RICHARD CANTILLON muestra algunos usos algebraicos de proporciones, particularmente en el estudio de la relación entre la cantidad de trabajo que lleva a cabo un hombre y

su capacidad de compra. Años más tarde, en 1759, FRANÇOIS QUESNAY publicaría *Le tableau économique*, en donde esquematiza el funcionamiento de un sistema económico a partir de una tabla empírica de insumos y productos para granjeros, propietarios de la tierra y artesanos. En 1764 CESARE BECCARIA escribiría *Tentativo analitico sui contrabbandi* en el que, similarmente, emplea algo de álgebra para describir los riesgos y beneficios del contrabando. También el “padre de la ciencia económica” ADAM SMITH, en su clásico *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations* (1776), recurre a cálculos aritméticos para mostrar cómo la especialización puede aumentar la productividad de un trabajador.

Pero de manera más importante y sistemática, la contribución de ACHILLES ISNARD [1748–1803] en *Traité des richesses* (1781) ha sido reconocida en las últimas décadas como pionera de la economía matemática (VAN DEN BERG (2006)), por su trabajo algebraico y de solución de ecuaciones de oferta y demanda de bienes. A éste le seguirían otras obras menores desde el punto de vista matemático, entre las que podría mencionarse *An Essay on the Principle of Population* (1798) de THOMAS MALTHUS, en donde explica, con tablas numéricas, cómo el crecimiento poblacional podría reducir drásticamente la calidad de vida; el *Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft and Nationalökonomie* de JOHANN HEINRICH VON THÜNEN de 1826; el *Mathematical Exposition of some Doctrines of Political Economy* (1829) de WILLIAM WHEWELL; e, inclusive, el clásico *On the Principles of Political Economy and Taxation* (1817) de DAVID RICARDO, entre otros.

1. Los pioneros: Cournot, Jevons, Marshall y Edgeworth

Después de ISNARD, el primer tratado en abordar *sistemáticamente* los métodos matemáticos dentro de la economía política fue la pieza maestra de ANTOINE AUGUSTIN COURNOT [1801–1877] *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* publicada en 1838 y en donde, por primera vez, se estudian, mediante fórmulas funcionales, algunas relaciones económicas de mercado: funciones de demanda, de oferta, de renta social y, desde allí da el primer paso para el estudio *formal* de estructuras de mercado tales como la competencia perfecta, el oligopolio y el monopolio. COURNOT, matemático, filósofo y estudioso de la probabilidad, al comienzo creyó que su trabajo estaba destinado al fracaso pues sus métodos de solución a ecuaciones simultáneas y, fundamentalmente, las técnicas del cálculo diferencial de NEWTON y LEIBNIZ eran muy extraños para los economistas contemporáneos, además de que sus razonamientos eran demasiado intrincados para las crudas nociones de economía política de la época. De hecho, en la introducción a sus *Recherches*, lo advertía:

“(…) el título de este trabajo no solo señala investigaciones teóricas; también muestra que intento aplicarle las formas y símbolos

del análisis matemático. Este es un plan que probablemente, debo confesar, me colocará en la fila de los condenados por parte de teóricos de renombre. Con seguridad se colocarán en contra del uso de formas matemáticas, y sin duda será difícil escapar al prejuicio que pensadores como SMITH y otros escritores más modernos, han contribuido a fortalecer. Las razones para este prejuicio parecen estar, de un lado, en el falso punto de vista desde el cual ha sido considerada la teoría por un número pequeño de aquellos que han pensado en aplicarle matemáticas; y, de otro lado, la falsa noción que se ha formado de este estilo de análisis por hombres que en otros temas tienen un juicio correcto, a la vez que son versados en Economía Política, pero para quienes las ciencias matemáticas no les son familiares.” (pág. 16)

Y más adelante agrega:

“Me propongo demostrar en este ensayo que la solución de las cuestiones generales que surgen de la teoría de la riqueza, depende esencialmente, no del álgebra elemental, sino de aquella rama del análisis que estudia funciones arbitrarias que simplemente se restringen a satisfacer ciertas condiciones. Como solo se considerarán cuestiones muy simples, los primeros principios del cálculo diferencial e integral serán suficientes para comprender este pequeño tratado. También, aunque me temo que podría parecer demasiado obstruso a la mayoría de la gente que tiene gusto por estos tópicos, no me atrevo a esperar que vaya a merecer la atención de matemáticos profesionales, excepto en la medida en que puedan descubrir aquí el germen de cuestiones que estén a la altura de sus potencialidades.” (pág. 19)

Sin embargo, aunque, efectivamente, el *Recherches* tuvo que esperar muchos años para recibir el reconocimiento que merecía, cuando apareció en publicaciones de importantes economistas como WILLIAM STANLEY JEVONS, ALFRED MARSHALL, FRANCIS EDGEWORTH y LÉON WALRAS, movió dramáticamente el curso de la teoría económica. MARSHALL, por ejemplo, reconoce a COURNOT desde 1868 como un gran maestro y como fuente de inspiración en cuanto a forma de pensamiento; JEVONS decía haber leído a COURNOT en 1872 y se sorprendió de encontrar “un análisis maravilloso de las leyes de la oferta y la demanda, y de las relaciones de precios, producción, consumo, gasto y beneficios”; y WALRAS reconoce en COURNOT a aquel que le allega “la idea de utilizar el cálculo de funciones en la elaboración de [su] doctrina”. Aún así, COURNOT tuvo que luchar por cuarenta años para que sus ideas fueran aceptadas, y lo hizo con persistencia y humor. Comprendió que se necesitaba otra generación para que se pudieran entender sus ideas. Después de su muerte, se mostró que tenía razón.

Fue el economista y lógico inglés WILLIAM STANLEY JEVONS [1835–1882], el primero en reconocer la importancia del método matemático en la teoría económica, además, como ya vimos, de las virtudes del trabajo de COURNOT. En *The Theory of Political Economy* de 1871 escribía:

“Es claro que la economía, si va a ser una ciencia, debe ser una ciencia matemática. Existen muchos prejuicios contra los intentos por introducir los métodos y el lenguaje de las matemáticas dentro de cualquier rama de las ciencias morales. Muchas personas parecen pensar que las ciencias físicas forman la esfera propia del método matemático, y que las ciencias morales demandan un método diferente - yo no sé cuál. Mi teoría de la economía, sin embargo, es puramente matemática en carácter. Y, creyendo que las cantidades con las cuales tratamos deben ser sujeto de variación continua, no dudo en utilizar la rama apropiada de la ciencia matemática, implicando, si es necesario, consideraciones de cantidades infinitamente pequeñas. La teoría consiste en aplicar el cálculo diferencial a las nociones familiares de riqueza, utilidad, valor, demanda, oferta, capital, interés, mano de obra, y todas las otras nociones cuantitativas de las operaciones diarias de la industria. Así como la teoría completa de casi cualquier otra ciencia implica el uso del cálculo, nosotros no podemos tener una teoría verdadera de la Economía sin su ayuda.

Para mí, nuestra ciencia debe ser matemática, simplemente porque trata con cantidades. Allí donde las cosas tratadas sean susceptibles de ser mayores o menores, las leyes y las relaciones deben ser matemáticas por naturaleza.” (Cap. 1, pág. 3)

Por su parte, en el manual *Principles of Economics* de 1890, uno de los más grandes economistas ingleses, ALFRED MARSHALL [1842–1924], afirmaba:

“El entrenamiento en matemáticas es útil pues da control sobre un lenguaje maravillosamente terso y exacto para expresar claramente algunas relaciones generales y algunos procesos cortos de razonamiento económico, los cuales pueden, de hecho, expresarse en lenguaje ordinario, pero no con igual claridad. Y, lo que es de mucha más importancia, la experiencia en manejar problemas físicos mediante métodos matemáticos da una comprensión, que no puede obtenerse igualmente bien de ninguna otra forma de la interacción mutua de los cambios económicos.” (Apéndice D, §1)

Sin embargo, en 1906, en una carta a A. BOWLEY, también MARSHALL escribía su *serateto* clásico de recomendaciones para la utilización de las matemáticas:

1. Utilice las matemáticas como un lenguaje de simplificación y no como una máquina para resolver preguntas.
2. Manténgase cerca de ellas hasta que haya terminado.

3. Traduzca al inglés.
4. Luego ilustre con ejemplos lo que sea importante en la vida real.
5. Queme las matemáticas.
6. Si no tiene éxito en 4, queme 3. Esto último me ha tocado hacerlo muy a menudo. (Citado por COASE (1975), págs. 30–31)

Además de ser el primero en la historia del pensamiento económico en cambiar el usual término “economía política” por “economía” en todos sus trabajos, fue él quien en sus *Principles* comenzó con la tradición de colocar todas las matemáticas en un apéndice al final, tratando de mostrar que el formalismo matemático era subsidiario de los problemas económicos substanciales.¹ MARSHALL recibió bien todos los métodos que le ayudaran a hacer un trabajo constructivo, y las matemáticas fueron eso para él. Siempre creyó que el objetivo era el sistema económico real y tratar de explicar cómo funcionaba, así que, según él, sólo deberíamos interesarnos en aquellas técnicas que nos ayudaran a alcanzar ese objetivo.

Desde otra orilla, el reconocido economista irlandés FRANCIS EDGEWORTH [1845–1926] leyó a COURNOT, pero también a JEVONS, algo de MARSHALL, a LAPLACE y a MAXWELL, entre otros, tratando de estar al tanto de cualquier tratamiento matemático de la teoría económica de su tiempo. Aunque nunca fue muy hábil con las matemáticas, sería él quien en su *New and Old Methods of Ethics* (1877) utilizaría por primera vez los **multiplicadores de Lagrange** dentro de la historia de la economía matemática, al tratar de darle significado matemático a la noción de “mayor cantidad de felicidad”. Sin embargo, EDGEWORTH no fue más allá de un poco de escritura matemática (cálculo diferencial e integral y teoría de probabilidades) en algunos de sus artículos y en el único libro que publicó (*Mathematical Psychics* (1881)) y mucho menos desarrolló sistema económico alguno que le permitiera ubicarse a la altura de uno de sus mayores contrincantes intelectuales: LÉON WALRAS.

2. Léon Walras

“Las matemáticas serán la lengua especial para hablar de hechos cuantitativos, y en consecuencia la economía será una ciencia matemática con el mismo título de la mecánica y de la astronomía.”

WALRAS (1909, pág. 323)

A pesar de tampoco ser un hábil matemático, el primero en colocar problemas económicos de gran magnitud frente a las matemáticas fue LÉON WALRAS [1834–1910], pues una mirada general a su obra, muestra una propuesta de filosofía social y económica para la Europa del siglo XIX, pero ahora *formulada*

¹También utilizó eficientemente el cálculo diferencial e integral pero, al igual que sus predecesores, no hizo uso de los multiplicadores de Lagrange.

científicamente, es decir, con el método matemático. En su trilogía (*Éléments d'économie politique pure* (1874–77), *Études d'économie sociale* (1896) y *Études d'économie politique appliquée* (1898)), WALRAS sería el primero en plantear matemáticamente un “gran modelo base” para entender el problema del tránsito de una economía agrícola a una capitalista. Esa gran estructura tuvo como piedra angular al modelo de equilibrio general de mercado bajo competencia perfecta:² *el primer modelo de equilibrio económico con numerosos agentes*.

Al parecer la visión de una “economía en equilibrio” vino a WALRAS de una fuente precisa: de los *Éléments de Statique* (1803) de LOUIS POINSONOT sobre el equilibrio de fuerzas mecánicas en un sistema de partículas y sus condiciones generales de equilibrio a partir de los requisitos de estabilidad de cada partícula. Esta idea lo condujo a pensar que las partículas eran los consumidores y los productores, que las fuerzas mecánicas eran las “fuerzas de mercado” (oferta y demanda por los productos), y que los precios eran los que “movían” estas fuerzas hacia las “asignaciones de equilibrio” que eran aquellas en las que la oferta de productos igualaba su demanda.

En su última edición (1900) de los *Éléments*, WALRAS escribía fervorosamente a favor del método matemático en economía:

(...) Poco después de su publicación, el Theory de JEVONS y el mío fueron traducidos al italiano, así como los primeros trabajos de WHEWELL y COURNOT. Después en Alemania, el libro de GOSSEN, al principio, se unió a trabajos ya conocidos de THÜNEN y de MANGOLDT. Después entonces en Alemania, Austria, Inglaterra, Italia y los Estados Unidos ha aparecido un considerable número de trabajos de economía matemática. La escuela que se está abriendo camino ahora no tendrá dificultad alguna en determinar, entre todos los sistemas, cuál debe constituir la ciencia. En cuanto a los economistas que, sin saber matemáticas, o incluso sin saber exactamente en qué consisten las matemáticas, ya han decidido que éstas no pueden servir para elucidar los principios económicos, dejémosles seguir su camino repitiendo que “la libertad humana nunca podrá introducirse en ecuaciones” o que las matemáticas hacen abstracción de los roces que lo son todo en las ciencias sociales y otras gentilezas de tanto peso como éstas.

(...) En cualquier caso, el que esta conversión sea más rápida o lenta, ni es asunto nuestro, ni debe preocuparnos. Hoy día es perfectamente claro que la economía política, como la astronomía y la mecánica, es una ciencia tanto empírica como racional. Y nadie puede reprochar a nuestra ciencia el haber tardado tanto tiempo en unificar el carácter racional y el empírico. La astronomía de KEPLER y la mecánica de GALILEO necesitaron de cien a ciento cincuenta

²También llamado “mercado competitivo”, es decir, donde ninguna persona, aisladamente, tiene influencia económica sobre los precios de los bienes.

o doscientos años para convertirse en la astronomía de NEWTON y LAPLACE, y en la mecánica de D'ALEMBERT y LAGRANGE.

(...) *El siglo XX, que no se encuentra lejos, hará sentir la necesidad incluso en Francia, de poner las ciencias sociales en manos de hombres de cultura amplia, acostumbrados a razonar tanto inductivamente como deductivamente y que se encuentren familiarizados con el razonamiento y la experiencia práctica. Entonces la economía matemática adquirirá un rango parejo al de la astronomía y la mecánica matemáticas, y ese día se hará justicia a nuestro trabajo.*" (Prólogo, págs. 133–35)

Pero, a pesar de haber *estructurado* el gran modelo de equilibrio general de mercado competitivo mediante un inmenso sistema de ecuaciones lineales y no-lineales, que debían resolverse simultáneamente para los mercados de consumo, producción, capital y moneda, el aporte de WALRAS a la utilización de *herramientas* matemáticas en la economía fue ninguno: afirmaba, por ejemplo, que un número de ecuaciones con el mismo número de incógnitas implicaba la existencia de solución, y jamás utilizó eficientemente el cálculo diferencial ni mucho menos los multiplicadores de Lagrange, los determinantes o los vectores.³ Sin embargo, esto es secundario aquí, pues *el problema de equilibrio general de mercado planteado matemáticamente por él, sería el que abriría definitivamente el camino a la formalización de la economía, es decir, a aquello que hoy llamamos economía matemática. Fue el verdadero hilo conductor a través del cual se estableció la actual conexión economía–matemáticas.*

3. Influencias poswalrasianas

VILFREDO PARETO [1848–1923], quien fuera alumno y sucesor de WALRAS en la Universidad de Lausanne (Suiza), afirmaba en su *Cours d'économie politique* (1896–97):

"La más grande contribución del profesor WALRAS a la discusión económica fue su descubrimiento de un sistema general de ecuaciones que expresan el equilibrio económico. No puedo, por mi parte, dejar de admirar suficientemente esta porción de su trabajo, y debo agregar que estoy completamente en desacuerdo con él respecto a lo que tiene que decir en su trabajo titulado Études d'économie sociale. El profesor WALRAS piensa que es posible obtener ciertas deducciones económicas a partir de principios metafísicos de jurisprudencia. Esta opinión merece respeto, pero no puedo aceptarla (...)." (pág. 491)

³Al parecer fue FISHER (1912) el primero en introducir las dos últimas herramientas mencionadas.

Este tipo de afirmaciones del influyente economista italiano haría que se sesgara el estudio de WALRAS sólo a la teoría pura (*Éléments* (1874–77)), dejando de lado sus trabajos en economía social (1896) y aplicada (1898), los que WALRAS apreciaba como inseparables de sus *Éléments*, y sin los cuales su obra, su gran sistema, no podría entenderse a cabalidad. Sin embargo, PARETO, ingeniero de formación, utilizaría eficientemente las matemáticas de su profesión, incluyendo allí el cálculo en varias variables para estudiar al consumidor y al productor en equilibrio económico y además probar, aunque anticipado por el mismo WALRAS, que la asignación competitiva tenía cierta característica de eficiencia (conocida como optimalidad de PARETO (1906)).⁴

La actitud de PARETO hacia el trabajo de WALRAS, sería parcialmente responsable de que, en adelante, el estudio de la economía se dividiera entre las aproximaciones normativa y positiva y, además, allanó el camino para que falsearan el modelo original de equilibrio general, presentándolo como la restauración de la teoría liberal económica. Hicieron del mercado competitivo eficiente, la base objetiva científica para comparar todo tipo de problemas sociales y económicos: si una política económica fallaba, entonces la razón era que no cumplía con alguno de sus principios de mercado del modelo “walrasiano”. Obviamente, el modelo paretiano fue el germen de un programa de investigación sobre el cual WALRAS no podría haber coincidido.

Después de WALRAS y PARETO, en el período comprendido entre la primera y la segunda guerra mundial, es decir, fundamentalmente en los últimos 1920’s y casi durante toda la década de los 30’s, la teoría del equilibrio general recibió mucho ímpetu en Italia con el trabajo de la escuela de Lausanne conformada por AMOROSO, ANTONELLI, PIETRI-TONELLI, BONINSEGNI, SENSINI, LA VOLPE, PALOMBA y FOSSATI, entre otros.

Ellos adoptaron las técnicas matemáticas más avanzadas disponibles en su época: no solo el cálculo diferencial e integral sino, inclusive, técnicas como el cálculo de variaciones, el análisis funcional y la teoría de grupos, buscando en el análisis dinámico una respuesta a la necesidad de mayor realismo en la teoría paretiana, pues aseguraban que los fenómenos económicos eran intrínsecamente dinámicos, y que la estática de WALRAS y PARETO era sólo un necesario primer paso. Sin embargo, esta línea de investigación tuvo poco éxito, no solo por haber sido escrita, en general, en italiano y en francés en revistas europeas, sino porque en los Estados Unidos los trabajos sobre dinámica y expectativas de JOHN HICKS predominaban.⁵

⁴Aunque no hay rastro en su *Manuel* (1906) del uso de los multiplicadores de Lagrange, y tampoco parece haber advertido que era falso que el conteo de ecuaciones garantizara solución al sistema de equilibrio general de WALRAS.

⁵Cabe mencionar, en este punto, los importantes aportes de LOUIS BACHELIER (1900), a quien suele asociarse con los primeros avances en la teoría del movimiento browniano en los mercados financieros, con lo que anticiparía por más de setenta años el uso de las *martingalas* en la representación matemática de un mercado eficiente. También debemos

El premio Nobel de Economía (1972), el inglés JOHN HICKS [1904–1989], con su clásico *Value and Capital* (1939), trajo la obra de PARETO (más no la de WALRAS) a la tradición anglosajona y, posteriormente, a la norteamericana. Aunque reconoció la importancia de los *Éléments* de WALRAS, también afirmaba que si de estudiar el problema del equilibrio general se trataba, era mejor ir a PARETO o a otros.

“El trabajo de WALRAS sobre teoría monetaria, y sus relativamente no-interesantes escritos sobre economía aplicada, no nos pueden detener aquí. Es en economía pura en donde se encuentra su interés, y el descubrimiento de las condiciones de equilibrio estático bajo competencia perfecta fue su logro central.” HICKS (1934, pág. 345)

HICKS también recurrió esencialmente al cálculo diferencial e integral, pero, a diferencia de sus antecesores, en sus procesos de optimización para consumidores y productores, utilizó eficientemente (muy cercano a como nosotros lo hacemos hoy) el método de los multiplicadores de Lagrange, los criterios de determinantes para garantizar la estabilidad del equilibrio de competencia perfecta y las condiciones de segundo orden para funciones cóncavas, entre otros. Y todo esto lo hizo sin dudar en el poder del método matemático en economía.

Aún así, y a pesar de considerar que la aparición de *Value and Capital* fue un evento económico importante, pues fue allí que, por primera vez, la aproximación al problema del equilibrio general “walrasiano” fue escrita en inglés de manera sistemática y coherente, algunas críticas con respecto a sus matemáticas sí llegaron. El famoso economista vienés OSKAR MORGENSTERN [1902–1977] al hacer un análisis detallado del libro clásico de HICKS advierte el hecho de que éste todavía estuviera “contando ecuaciones e incógnitas” para determinar la existencia del equilibrio competitivo. Inclusive cita un comentario ocasional que le hiciera el famoso matemático húngaro JOHN VON NEUMANN en los primeros 1940’s con respecto a los trabajos de HICKS: le decía que si “esos libros” estaban todavía a la vista en cien años, muchos creerían que fueron escritos en la época de NEWTON, por sus pobres matemáticas. Además, le aseguraba que la economía estaba millones de millas atrás, de otras ciencias tales como la física (MORGENSTERN, 1976, pág. 810). Y en esto, no hay duda, VON NEUMANN tenía la razón.

Por su parte, y casi contemporáneo de HICKS, el matemático y economista norteamericano PAUL SAMUELSON [1915–2009] (también premio Nobel de Economía (1970)), en su clásico *Foundations of Economic Analysis* de 1947,

referirnos aquí a desarrollos paralelos, aunque, en principio, independientes de la corriente principal de investigación en equilibrio económico, como lo fueron en los 1920’s, los trabajos de FRANK P. RAMSEY sobre criterios generales para la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre y para determinar el “mejor” sistema de impuestos a la renta, utilizando las técnicas de la optimización dinámica, entre otros.

avanzó sobre los desarrollos de HICKS (1939) en equilibrio general,⁶ en particular en su análisis de estabilidad y unicidad del equilibrio “walrasiano”, entre otras áreas de la economía. En su momento fue, quizás, el economista con mayor conocimiento, preocupación e interés por la aplicación de las matemáticas a la economía, utilizando sin limitación alguna los recursos del álgebra lineal, del cálculo diferencial e integral de varias variables, de la teoría de sistemas dinámicos y de algunos modelos de optimización dinámica. No obstante, SAMUELSON (1962) reconoció el origen de todo:

“Hoy puede haber poca duda de que la mayoría de la teoría literaria y matemática que aparece en nuestras revistas profesionales es más de origen de WALRAS que de cualquier otro (y hago énfasis en el adjetivo “literario”).” (pág. 3)

De otro lado, cabe resaltar, además, que SAMUELSON invirtió el influyente punto de vista marshalliano con respecto al método matemático. MARSHALL estaba interesado en desarrollar conceptos más precisos, y para ello los expresaba en forma matemática pero solo si sentía que era de ayuda en entender el problema económico. SAMUELSON, por su parte, comenzaba con un sistema formal y trataba de deducir todas sus implicaciones. La economía matemática le debe el llamar la atención sobre este (muy) importante problema metodológico dentro de la corriente principal de la teoría económica. En este sentido, quizás, podríamos decir que SAMUELSON y el economista francés MAURICE ALLAIS [1911–] fueron los primeros economistas matemáticos (en la plenitud del término) en la historia del pensamiento económico.

ALLAIS, independiente académicamente de la tradición anglosajona y norteamericana, ingeniero de formación, y más cercano al pensamiento de WALRAS que al de PARETO, publicaría en 1943 su trabajo por el que más se le conoce: *A la Recherche d'une Discipline Économique*. Y aunque allí recorrió, con matemática prudente pero útil, un amplio espectro de la teoría económica, el Comité Nobel de 1988 sólo lo reconoció como un continuador del

“ (...) desarrollo de WALRAS y PARETO, al proveer formulaciones matemáticas crecientemente rigurosas del equilibrio de mercado y de las propiedades de eficiencia de los mercados. (...) Sobre la base de modelos matemáticos de planeación y elección de los consumidores y las firmas, introdujo una formulación muy general de las condiciones de equilibrio de mercado.” (pág. 1)

Pero igual que sucediera con WALRAS, sus trabajos matemáticos integrados de capital, moneda y crédito dentro del sistema de equilibrio general, de elección

⁶Haciendo las primeras aplicaciones a la teoría del comercio internacional y a la teoría del crecimiento económico.

bajo riesgo y de análisis de series de tiempo económicas fueron parcialmente ignorados, y por ello, SAMUELSON se lamentaba:

“Si sus primeros trabajos hubieran sido en inglés, toda una generación de teoría económica habría tomado un curso diferente.”
(CLARKE (1988), pág. 132, citando a SAMUELSON)

4. La Guerra Fría

Cuando la Segunda Guerra Mundial (1938–1945) estaba por finalizar, la teoría económica entró en la fase de matematización intensiva que hoy conocemos, y que ha transformado profundamente la profesión: era el comienzo de la gran formalización de la economía. En 1928 VON NEUMANN [1903–1957] había comenzado a desarrollar la que actualmente se conoce como **teoría de juegos** (o **teoría de interacciones**) y que consolidó en el clásico *Theory of Games and Economic Behavior* (1944) junto con OSKAR MORGENSTERN, buscando, en buena medida, que fuera un instrumento matemático apropiado para desarrollar una teoría de la Guerra Fría.

Por haber tenido esto también notables aplicaciones a la economía, la teoría de juegos de VON NEUMANN y MORGENSTERN se convirtió, en aquel momento, en el más grande aporte de la economía a la matemática. De hecho, se erigió como la *primera herramienta matemática propia de la economía*, y al principio pareció que con ello la economía se despegaba de la física. Pero aunque pronto se notó que mantenía el presupuesto de agentes individuales optimizadores buscando establecerse alrededor de un equilibrio, y que, por tanto, continuaba estando inspirada por la mecánica racional de finales del siglo XIX, de todas maneras esta teoría de juegos primitiva sería fuente de importantes aplicaciones de la teoría de optimización sobre conjuntos convexos empleando los teoremas *minimax* de VON NEUMANN (1928),⁷ además de haber creado las nociones de función cuasicóncava y función cuasiconvexa (NEUMANN (1928)), que son conceptos matemáticos de origen económico.

De otro lado, pero también desafortunadamente, el trabajo en teoría de juegos no-cooperativos realizado por NEUMANN y MORGENSTERN se restringió a juegos de suma cero (“yo gano exactamente lo que usted pierde”), y esto le dio, en aquel entonces, un aire de aridez como herramienta de aplicación a problemas económicos en los que el “yo gano–usted gana” de la escuela austriaca (CARL Menger, FRIEDRICH VON HAYEK y LUDWIG VON MISES, principalmente) podría ser también la voluntad normativa.⁸ La extensión de estos resultados a juegos de suma no-cero fue llevada a cabo por el premio Nobel

⁷Véanse, por ejemplo, las aplicaciones a la teoría de la Guerra Fría (AUMANN, MASCHLER y STEARNS (1995)).

⁸Por ejemplo, los estudios de problemas ya planteados de oligopolio (COURNOT (1938)) y competencia monopolística (CHAMBERLIN (1933)).

de economía (1994) JOHN NASH [1928–] en 1950 (bajo el **concepto de equilibrio de Nash** (1950b)), recurriendo, por primera vez, de manera explícita en la economía matematizada, a la teoría de puntos fijos (BROUWER (1912), KAKUTANI (1941)). Hoy en día, la teoría de juegos ocupa un lugar central y paradigmático en la teoría económica, pues se ha intentado capturar con ella diversos fenómenos económicos que el modelo “walrasiano” no abarca, particularmente aquellos en los que las interacciones entre los agentes económicos importan.

El segundo modelo fue el **análisis insumo–producto** del economista (entonces soviético) WASSILY LEONTIEF [1905–1999] quien recibió el premio Nobel en 1973. Esta técnica económica, también basada en el álgebra lineal, constituye una adaptación de la teoría “walrasiana” del equilibrio general, concentrada en la idea de que una economía está dedicada a la producción de bienes intermedios: un cambio en el nivel de producción de un bien final (digamos, una casa) implica cambios en la producción de los bienes intermedios asociados a su producción (ladrillos, cemento, acero, vidrios, etc.) y, a su vez, en los insumos utilizados para la producción de estos insumos intermedios, etc., pues para LEONTIEF, el mundo real era de profundas relaciones interindustriales multidireccionales. Su trabajo más reconocido en análisis insumo–producto fue *Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States* (1936), en donde construyó las primeras tablas numéricas (matrices) de insumo–producto para los Estados Unidos. Éstas, llevando al límite las posibilidades computacionales de los 1930, se convertirían en una herramienta cuantitativa que rápidamente ganaría un espacio en la literatura económica y, por consiguiente, en la práctica de la reconstrucción de la Europa de la posguerra.

LEONTIEF fue un matemático empírico apasionado por los datos. Sus últimos escritos contienen numerosos comentarios sobre las dificultades de teorizar *a priori* en economía, sobre la falta de atención de los economistas a la calidad de las estadísticas que usan en los trabajos empíricos, sobre la escasez de investigación en las técnicas econométricas y, sobre todo, en la necesidad de invertir en una adecuada recolección de datos si se desea alcanzar un mejor entendimiento de la vida real. De hecho, cabe mencionar aquí que a partir de 1930, y como reacción al que consideraban “excesivo proceso de formalización matemática”, surgió un movimiento de “revancha” que promovía estudiar datos estadísticos y construir modelos descriptivos y predictivos, en lugar de reducir los fenómenos económicos a teoremas: era el nacimiento de la **econometría**. Precisamente en 1930 se fundaba la *Econometric Society* por IRVING FISCHER

y RAGNAR FRISCH (este último, premio Nobel de economía en 1969), dando origen a un campo fundamental y central en la ciencia económica moderna.^{9,10}

Pero la organización de estrategias durante y después de la Segunda Guerra Mundial, también dio origen a otros modelos importantes para el desarrollo de la formalización en economía, teniendo casi todos ellos como pioneros a matemáticos profesionales. Aunque en 1939, los matemáticos rusos L. KANTOROVICH (premio Nobel de economía en 1975) y W. Karush, tenían algunos avances en problemas de optimización lineal (Karush (1939), KANTOROVICH (1939)), sería el matemático norteamericano GEORGE DANTZIG [1914–2005], quien en *Programming in a Linear Structure* (1949), junto con miembros de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, e inspirados parcialmente en LEONTIEF, desarrollarían las ideas centrales de lo que hoy conocemos como **programación lineal**.

La necesidad de organizar y despachar tropas y abastecimientos, condujo a “programar” (de allí el término “programación” que lleva el método) horarios de entrenamiento, ofertas logísticas, y desplazamiento de tropas. DANTZIG mecanizó esto, introduciendo entonces estructuras lineales (y, por tanto, de convexidad) y una técnica de solución (“método simplex”), recurriendo a los primeros computadores conocidos hasta entonces (DANTZIG (1949b)). Durante casi un año, él y sus colegas estudiaron miles de situaciones tomadas de la experiencia de la Segunda Guerra Mundial, y mostraron que muchas podían (con cierta aproximación) convertirse al formato de la programación lineal, con excepción de aquellas en las que la no-convexidad era esencial. En el mismo año de 1949, DANTZIG entraría en contacto con el matemático y economista TJJALLING KOOPMANS [1910–1985] (premio Nobel en 1975) quien se interesaría en el modelo de programación lineal como herramienta conveniente en un problema entonces central en la teoría económica: la distribución eficiente de recursos.

El **análisis de actividades** de KOOPMANS (*Efficient Allocation of Resources* (1951)) es un modelo lineal de aproximación al problema original “walrasiano”, liberándolo, por primera vez, de la herramienta paretiana del cálculo diferencial y adentrándolo en la lógica, en el análisis de conjuntos convexos y en la topología. Este modelo presenta la típica división metodológica entre consumidores y productores donde cada sector está descrito mediante ciertos

⁹Curiosamente, sería también FRISCH el que inventara los términos “macroeconomía” y “microeconomía” que hoy utilizamos.

¹⁰Sin embargo, los editores de la revista la *Econometric Society* (*Econometrica*) encargaron la realización de algunos *surveys* sobre temas que habían sido tratados matemáticamente, entre ellos sobre equilibrio general, ciclos económicos y técnicas estadísticas (Marschak (1933), Tinbergen (1935), HICKS (1935) y FRISCH (1936)), además de algunos artículos sobre “economistas matemáticos” famosos ya desaparecidos: Roy sobre COURNOT (1933), HICKS sobre WALRAS (1934), BOWLEY sobre EDGEWORTH (1934) y AMOROSO sobre PARETO (1938), entre otros. También aparecieron artículos importantes en la tradición paretiana tales como HICKS (1937), HOTELLING (1938), SAMUELSON (1941) y LANGE (1942).

postulados (o axiomas) que “delimitan un universo de discurso lógico en el cual el único criterio de validez es el de la implicación partiendo de ellos” (KOOPMANS (1957, pág. 47)). Aquí introduce la “metodología axiomática” en economía matemática, que por entonces estaba en boga debido a la búsqueda de una fundamentación lógica para todas las matemáticas (BOURBAKI (1939)). Además, en el modelo de análisis de actividades, se demuestra la eficiencia del equilibrio “walrasiano” inspirado en los teoremas *minimax* de NEUMANN (1928) y también en algunos avances de la programación lineal ya logrados para entonces por DANTZIG y su grupo del Pentágono.

5. Kenneth Arrow y Gérard Debreu

Pero el desarrollo más formal y general del modelo de equilibrio de mercado “walrasiano” es el conocido **modelo Arrow–Debreu** presentado por KENNETH ARROW [1921–] y GÉRARD DEBREU [1921–2004], en *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy* (1954). Allí, bajo “condiciones mínimas”, se garantiza la existencia del equilibrio general competitivo, algo que había estado por fuera del alcance de todos los economistas desde el pionero WALRAS.

Sin embargo, la primera prueba de existencia de equilibrio (aunque bajo fuertes hipótesis) fue la del matemático alemán ABRAHAM WALD [1902–1950], quien escapando de la Alemania nazi, llegó a la Universidad de Columbia donde, basado en sus artículos de 1935 y 1936, dio las primeras pautas del modelo a su estudiante KENNETH ARROW (premio Nobel en 1972 junto con JOHN HICKS). El trabajo de WALD además de los teoremas de existencia de equilibrios de Nash mediante criterios de puntos fijos, y sus propios desarrollos sobre la *Teoría de la Elección Social* (ARROW (1951)) le permitieron adaptar las herramientas matemáticas y hacerlas apropiadas al problema competitivo.

Por su parte, el matemático francés GÉRARD DEBREU, premio Nobel en 1983, llegó al problema a través de ALLAIS, quien fuera su maestro. Los resultados de ARROW y DEBREU eran tan suficientemente similares que decidieron publicarlos en 1954 conjuntamente. Después vendrían generalizaciones de estos trabajos por parte, fundamentalmente, de DEBREU. Éste publicaría en 1959 su clásico *Theory of Value* en el que amplía los resultados de 1954 y en donde, imitando lo realizado por NASH (1950a) y KOOPMANS (1951), también aplica el método axiomático bourbakiano (BOURBAKI (1939)). Los conceptos a los que recurrieron muestran bien esta influencia: conjuntos convexos, relaciones binarias, topología, correspondencias, teoremas de punto fijo, análisis real, teoría de la medida y geometría diferencial.

6. Las matemáticas del “buen economista”

Como decíamos antes, la formalización en economía trajo rigor y claridad de hipótesis al pensamiento económico hasta el punto de creer en una *ciencia*

económica, y quizás ese era el objetivo original de los pioneros COURNOT, WALRAS, JEVONS y MARSHALL.

Sería WALRAS (1874–77) el primero en plantear que se requería de un “gran modelo base” para entender el problema del tránsito de una economía agrícola a una capitalista: era el modelo de equilibrio general bajo competencia perfecta, la primera gran estructura económica diseñada para numerosos agentes. *Esta es, quizás, la razón subyacente por la cual tardó tanto la formalización matemática de la economía con respecto a la de la física: el paso de una economía de pequeñas contabilidades a una de intrincadas relaciones económicas y sociales de grandes cantidades de individuos, ocurrida en los siglos XIX y XX, teniendo como motores principales, las necesidades de estudio del mercado bajo competencia perfecta (WALRAS) y de las interacciones económicas y sociales (NEUMANN y MORGENSTERN).*

Sin embargo, estos propósitos, originalmente científicos, serían fuertemente alimentados y reorientados por razones puramente políticas: buscar sustento formal al desarrollo del capitalismo emergente, al libre mercado, y a los requerimientos de las guerras y de las etapas de posconflicto. Todo ello, no hay duda, realizado por la entrega de premios Nobel a matemáticos y economistas como FRISCH (1969), SAMUELSON (1970), ARROW y HICKS (1972), LEONTIEF (1973), KOOPMANS y KANTOROVICH (1975), ALLAIS (1988) y NASH (1994), entre otros¹¹.

Y una consecuencia de esta historia científica y política es, precisamente, las matemáticas que hoy sabemos y “requerimos” en nuestras Facultades de Economía: son, únicamente, las que resuelven el problema del equilibrio general competitivo (determinístico y estocástico) y de la teoría de juegos (clásica). No requerimos de nada más, a excepción de las herramientas desarrolladas por la econometría, pues la economía keynesiana y sus derivados no han necesitado de ninguna matemática adicional, salvo de un manejo apropiado de las expectativas. Por ello, hoy en día, un “buen economista”, en general, requiere (además de las técnicas econométricas) solo de una parte de las matemáticas de la física newtoniana (es decir, una parte de las matemáticas de ingeniería) para entender los modelos mecánicos de competencia perfecta y de aplicación de la teoría de juegos (oligopolio, competencia monopolística, etc.). Es decir, para “saber economía”.

7. Problemas económicos sin matemáticas apropiadas

*“Como dijera Schumpeter mucho antes de Thomas Kuhn:
No se puede destruir una teoría con un hecho aberrante.
Se necesita una nueva teoría para destruir una vieja teoría.”*
SAMUELSON (1987, pág. 110)

¹¹Algo que todavía viene sucediendo en la última década.

Repetidamente se escuchan posiciones a favor y en contra de que es una positiva y benigna “mano invisible” (ADAM SMITH (1776)) la que conduce al agente económico a promover objetivos que no están dentro de sus intenciones pero que sí representan “intereses de la sociedad”. SMITH y sus seguidores (incluyendo la escuela austríaca) veían las instituciones (en particular, el mercado) como el resultado del flujo de acciones individuales, aunque era claro que no entendían cuál era el *modus operandi* de aquella creación no intencional de instituciones sociales ni tampoco de las características específicas de esos procesos de creación. Y la consecuencia es que, aún hoy en día, no existe un solo argumento sólido que garantice que este “orden espontáneo” sea necesariamente beneficioso a la sociedad.

Al tratar de explicar el fenómeno de la mano invisible, muchos economistas comenzaron a pensar que ésta sugería cierta clase de optimización local conducente a optimización global. El resultado más desarrollado de este intento lo conocemos hoy como el modelo de equilibrio general de ARROW y DEBREU (1954), con el que el individualismo metodológico y la visión de la *economía como máquina*, habían ganado un espacio en la investigación. Pero quizás lo que más impresiona a primera vista de este modelo es que los precios de equilibrio se determinan sin referencia a los detalles institucionales de la organización de mercado. El modelo coloca todo el énfasis en el problema de decisión y ninguno en los resultados de la interacción entre agentes. Precisamente esta falta de especificidad sobre cómo interactúan los agentes, da origen a cierta “indeterminación” del comportamiento de equilibrio: el teorema Sonnenschein-Mantel-Debreu (1972,1974) establece que en toda economía de intercambio¹² con más agentes que bienes, *cualquier precio* es de equilibrio, si especificamos adecuadamente las demandas de esos agentes.

De manera que afirmar que el modelo Arrow-Debreu responde a la pregunta de ADAM SMITH, es falso; y si se pretende que sea el sustento teórico de políticas económicas de libre mercado como mecanismo de distribución eficiente de recursos, se falsea el modelo. De hecho, *el tipo de mercado del modelo Arrow-Debreu es una pálida representación, no sólo del modelo original de WALRAS, sino de cualquier mercado real*¹³.

Y es a partir de ésto que se observa que las matemáticas tradicionales de la economía **no** han permitido aún, entender bien algunos problemas, entre los que se cuentan, por ejemplo, los de especificación de interacciones socioeconómicas (el teorema Sonnenschein-Mantel-Debreu es un anticipo de este problema que

¹²Es decir, una economía sin sector productivo.

¹³Este evento nos recuerda la historia que alguna vez leímos sobre cierta persona que perdió su billetera en un cuarto grande que estaba completamente oscuro, excepto por una minúscula luz en una esquina. Mientras el personaje en cuestión buscaba la billetera, alguien le preguntó “¿y por qué la buscas sólo en esa esquina?” y la respuesta fue clara: “pues porque aquí hay luz”.

surge en el modelo de equilibrio general); los mecanismos de mediación institucional (cómo crear mecanismos que medien entre competencia y cooperación); las organizaciones jerárquicas institucionales (ignoradas casi totalmente por la tradición neowalrasiana que ha colocado los problemas *históricos* en un segundo plano de interés); el problema de la inconsistencia temporal (que surge cuando se van tomando decisiones a medida que “pasa el tiempo”, y no desde el principio para todo el horizonte temporal); las economías en desequilibrio (necesidad de replantear los conceptos de equilibrio económico al notar que tanto los equilibrios del modelo Arrow–Debreu como los equilibrios de Nash, son puntos fijos de alguna transformación); y el problema de agregación (por ejemplo, mientras los modelos keynesianos y algunos de sus derivados, emplean relaciones *ad hoc* agregadas como sus hipótesis primitivas, la macroeconomía neoclásica recurre a agentes individuales como hipótesis primitivas y después observa las relaciones **agregadas** emergentes. Pero los resultados **no coinciden** (véase, por ejemplo, SARGENT (1987))).

Bajo esta perspectiva, la ciencia económica ha venido evolucionando desde la predicción mediante “leyes” en el sentido tradicional, a un concepto más sofisticado y profundo: la *regularidad* (o “nueva ley”) en sus múltiples variables. Una teoría económica que, consciente de la no–posibilidad de **repetición** en eventos económicos, busque **explicar** y **entender** comportamientos a través de las **regularidades** de sus variables, y no de “leyes” determinísticas. Pero para ello, quizás, se requiera de nuevas matemáticas o, al menos, de matemáticas ya creadas pero que hemos ignorado recurrentemente.

8. Posibles alternativas

Además de seguir estudiando los modelos de equilibrio general y de teoría de juegos clásica, en las últimas dos décadas se vienen abriendo otras perspectivas, entre las que se cuentan de manera importante, las siguientes:

- a) *Modelos evolutivos*. Se basan en un paralelo entre la biología moderna y la economía. Un ejemplo de esto es la teoría de juegos evolutivos (SAMUELSON (1997)) en donde se estudian comportamientos tales como las dinámicas estocásticas del replicador, de transmisión vertical (padres e hijos), de transmisión horizontal (amigos), y oblicuas (institucionales) (GINTIS (2000), MAGNUSSON & OTTONSSON (1997), COMPTE & POSTLEWAITE (2004)).
- b) *Modelos de complejidad*. No existe una definición exacta de “complejidad”, aunque podemos decir que los sistemas complejos son sistemas heterogéneos de agentes cuyo comportamiento es interdependiente y puede describirse mediante un proceso estocástico que presenta al menos una de las siguientes características (ARTHUR *et al.* (1997), BROCK & DURLAUF (2001)):
 - **No–ergodicidad**: Un sistema es no–ergódico si cualquier afirmación sobre la probabilidad condicional que describe el sistema, no caracteriza el comportamiento promedio ni el de largo plazo. Un ejemplo estándar

es cuando un *shock* momentáneo afecta el comportamiento de largo plazo del sistema.

- **Transición de fase:** Un sistema presenta transición de fase si muestra importantes cambios cualitativos de su comportamiento agregado ante pequeños cambios en sus parámetros. Por ejemplo, si calentamos un hierro magnetizado, esta característica desaparece a partir de cierta temperatura.
- **Propiedades emergentes:** Son propiedades que existen a un más alto nivel de agregación que la descripción original del sistema. Por ejemplo, el hielo es una propiedad emergente del agua en la forma de alinearse colectivamente las moléculas; y la magnetización es una propiedad emergente del hierro cuando se alinean los espines de los átomos individuales.
- **Universalidad:** Una propiedad es universal si su presencia es robusta a especificaciones alternativas de la microestructura del sistema. Por ejemplo, la magnetización es universal en el sentido de que su presencia en el hierro ocurre para un amplio rango de especificaciones de los espines entre átomos.

Todo esto ha dado origen, por ejemplo, a áreas bien identificadas de investigación empírica (MANSON (2001)) como son los estudios históricos (*path dependence*) (DAVID (2000), ARTHUR (1994), MAGNUSSON & OTTONSSON (1997)), la economía financiera (BLUME & DURLAUF (2005)), las dinámicas estocásticas de equilibrios competitivos, los rendimientos crecientes a escala (ARTHUR (1994)), las economías de alta tecnología (THORE (1995)), las economías de redes (Internet, etc.) (ARMSTRONG & SAPPINGTON (2007), ECONOMIDES (2007)) y la desigualdad del ingreso (ARTHUR (1995), DURLAUF (2006)).

- c) *Econofísica*. Básicamente desarrollada en las dos últimas décadas como herramienta de la economía financiera, esta área busca establecer la relación economía–mecánica estadística, pues gran cantidad de herramientas y conceptos utilizados en física, han encontrado aplicación allí: estadísticas no–extensivas, transiciones de fase, paseos aleatorios (*random walk*), curvas maestras, etc., son solo algunos ejemplos. Con estos objetivos, es claro que hay fronteras muy difusas entre complejidad y econofísica (GALLEGATI *et al.* (2006)).
- d) *Modelos de comportamiento (Behavioral Economics)*. Esta área (aunque en su base no es nueva dentro de la literatura económica) busca aumentar el poder explicativo de los modelos económicos incluyendo allí *fundamentos psicológicos* más realistas expandiendo la noción de utilidad y, en general, ampliando las fronteras de la teoría de la decisión (KAHNEMAN, DIENER & SCHWARTZ (1999)). Allí se viene recurriendo inclusive, a evidencia neurocientífica (CAMERER, LOEWENSTEIN & PRELEC (2005)) y a algoritmos de procedimiento específico (RUBINSTEIN (1988)).

9. Conclusiones

El desarrollo de las matemáticas en economía y, en particular, el paralelo entre física y economía (véase la figura 1), le debe mucho al “descubrimiento” de la función de utilidad¹⁴, pues podría pensarse que ésta es a la teoría económica formalizada lo que la “existencia” de la fuerza gravitacional fue a la física newtoniana. Además, así como cualquier irregularidad con respecto a la mecánica clásica era considerada una “anomalía”, también en economía cualquier irregularidad con respecto al modelo competitivo ha sido considerada una “imperfección” (imperfecciones del mercado), y este pensamiento siempre ha estado presente desde los pioneros de la “revolución” marginalista (COURNOT, MENGER, JEVONS, MARSHALL y WALRAS) hasta los modernos defensores neoclásicos con sus matemáticas similares a las de la física newtoniana.

Física		Economía
<i>Partículas</i>	→	<i>Agentes</i>
<i>Fuerzas</i>	→	<i>Demanda y oferta</i>
<i>Potencial</i>	→	<i>Función de utilidad</i>
<i>Velocidad</i>	→	<i>Marginalidad</i>
<i>Aceleración</i>	→	<i>Rendimiento</i>
<i>Principio de optimización</i>	→	<i>Agentes optimizadores</i>
<i>Equilibrio</i>	→	<i>Equilibrio</i>
<i>Centro de masa</i>	→	<i>Agente representativo</i>
<i>Rozamiento</i>	→	<i>Interacciones</i>

FIGURA 1. Paralelo Física-Economía

La economía ya desarrolló su primera herramienta matemática propia (la teoría de juegos) tratando de entender el resultado de interacciones económicas tales como el duopolio y la competencia monopolística, aunque este modelo podría asimilarse a una teoría de “rozamientos económicos”. Sin embargo, afortunada o infortunadamente, existen numerosos problemas que, hasta hoy, no han podido ser atacados satisfactoriamente con teoría de juegos clásica y tampoco con extensiones o variaciones de los modelos “walrasianos”. Es entonces la oportunidad (y la obligación) de ir, paso a paso, construyendo nuevas herramientas matemáticas que nos permitan ir comprendiendo, es decir, entendiendo las regularidades de esos problemas. En economía y, en general en todas las ciencias, todo lo que nos permita **entender** estas regularidades, debería ser bienvenido, y tal posibilidad la podemos ir realizando ahora de manera cautelosa, avanzando mediante inducción empírica, mientras vamos solidificando evidencia que nos permita proveer de teoría bien justificada matemáticamente, ya sea con las matemáticas que hoy conocemos, o con las que la economía pueda generar a

¹⁴Es decir, a esa extraña función que, de alguna forma, mide el “deseo” y la “satisfacción” que el consumo le produce a las personas.

partir de sus propias necesidades y problemas. Al fin y al cabo, ese fue el mismo camino seguido por la física.

Referencias

- [1] ALLAIS, MAURICE, *À la recherche d'une discipline économique*. Paris: Imprimerie Nationale, 1943.
- [2] AMOROSO, LUIGI, *Vilfredo Pareto*. *Econometrica* **6** (1) (1938), 1–21.
- [3] ARMSTRONG, MARK & SAPPINGTON, DAVID, *Recent Development in the theory of Regulation*. Contenido en *Handbook of Industrial Organization*, Vol. 3. Amsterdam: Elsevier, 2007, 1557–1700.
- [4] ARROW, KENNETH, *Social Choice and Individual Values*. New Haven: Yale University Press, 1951.
- [5] ARROW, KENNETH, *General Economic Equilibrium: Purpose, Analytic Technique, Collective Choice*. Nobel Memorial Choice, December 12, 197. New Haven: Yale University Press, 1972.
- [6] ARROW, KENNETH & DEBREU, GÉRARD, *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*. *Econometrica* **22** (3) (1951), 265–290.
- [7] ARTHUR, BRIAN, *Complexity in Economic and Financial Markets*. *Complexity* **1** (1) (1991), 20–25.
- [8] ARTHUR, BRIAN, *Increasing Returns and Path Dependence in the Economy*. Ann Arbor: Michigan University Press, 1994.
- [9] ARTHUR, BRIAN; DURLAUF, STEVEN & LANE, DAVID, *The Economy as an Evolving Complex System II*. SFI Studies in the Sciences of Complexity. Redwood City: Addison–Wesley, 1997.
- [10] AUMANN, ROBERT; MASCHLER, MICHAEL; & STEARNS, RICHARD, *Repeated Games with Incomplete Information*. Cambridge: MIT Press, 1995.
- [11] BACHELIER, LOUIS, *Théorie de la spéculation*. Paris: Gauthier-Villars, 1900.
- [12] BECCARIA, CESARE, *Tentativo Analitico sui Contrabbandi*. Estratto dal Foglio Periodico Intitolato: II Caffè (Vol. 1 Brescia), 1764.
- [13] BLUME, LAWRENCE & DURLAUF, STEVEN, *The Economy as an Evolving Complex System, III: Current Perspectives and Future Directions*. Contenido en *SFI Studies in the Sciences of Complexity*, Vol. 3. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- [14] BOURBAKI, NICOLAS, *Éléments de Mathématiques*. Paris: Hermann, 1939.
- [15] BOWLEY, ARTHUR, *Francis Ysidro Edgeworth*. *Econometrica* **36** (144) (1934), 647–657.
- [16] BROCK, WILLIAM & DURLAUF, STEVEN, *Discrete Choice with Social Interactions*. *Review of Economic Studies* **68** (2) (2001), 235–260.
- [17] BROUWER, LUITZEN E. J., *Invarianz des n-dimensionalen Gebletz*. *Mathematische Annalen* **71** (1936), 305–313.
- [18] CAMERER, COLIN, LUEWENSTEIN, GEORGE & PRELEC, DRAZEN, Eds. *How Neuroscience can Inform Economics*. *Journal of Economic Literature* **43** (1) (2005), 9–64.
- [19] CANTILLON, RICHARD, *Essay on the Nature of Commerce in General*. (Publicado originalmente en 1730.) London: Transation Publishers, 1955.
- [20] CEVA, GIOVANNI, *De re Nummeraria, Quoad Fieri Potuit Geometrice Tractata*. Mantuae: 4to. 60 págs., 1711.
- [21] CHAMBERLIN, EDWARD, *Theory of Monopolistic Competition*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1933.
- [22] CLARKE, PETER, *The Keynesian Revolution in the Making, 1924–1936*. Oxford: Clarendon Press, 1988.
- [23] COASE, RONALD, *Marshall on Method*. *Journal of Law and Economics* **18** (1) (1975), 25–31.

- [24] COMPTE, OLIVIER & POSTLEWAITE, ANDREW, Eds. *Confidence-Enhanced Performance*. American Economic Review **94** (5) (2004), 1536–1557.
- [25] COURNOT, AUGUSTIN, *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. London: MacMillan, 1838.
- [26] DANTZIG, GEORG, *Programming in a Linear Structure*. Econometrica **17** (1) (1949), 73–74.
- [27] DANTZIG, GEORG, *Programming of Interdependent Activities II: Mathematical Model*. Econometrica **17** (3/4) (1949), 200–211.
- [28] DAVID, PAUL, *Path Dependence, its Critics and the Quest for “historical economics”*. Cheltenham, England: Elgar Publishing, 2000.
- [29] DEBREU, GÉRARD, *The Theory of Value, An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. New Haven and London: Yale University Press, 1959.
- [30] DEBREU, GÉRARD, *The Mathematization of Economic Theory*. The American Economic Review **81** (1) (1991), 1–7.
- [31] DURLAUF, STEVEN, *Poverty Traps*. Coeditor con S. BOWLES & K. HOFF. Princeton: Princeton University Press, 2006.
- [32] ECONOMIDES, NICHOLAS, *The Economics of the Internet*. Contenido en el *New Palgrave Dictionary of Economics*. London: Macmillan, 2007.
- [33] EDGEWORTH, FRANCIS, *New and Old Methods of Ethics*. London: James Parker, 1877.
- [34] EDGEWORTH, FRANCIS, *Mathematical Psychics*. London: Kegan Paul, 1881.
- [35] FISHER, IRVING, *Elementary Principles of Economics*. New York: Cosimo, Inc., 2007 [1912].
- [36] FRISCH, RAGNAR, *Annual Survey of General Economic Theory: The Problem of Index Numbers*. Econometrica **4** (1) (1936), 1–38.
- [37] GALLEGATI, MAURO; KEEN, STEVE; LUX, THOMAS & ORMEROD, PAUL, *Worrying Trends in Econophysics*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **370** (2006), 1–6.
- [38] GINTIS, HELBERT, *Game Theory Evolving*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2000.
- [39] HICKS, JOHN, *Leon Walras*. Econometrica **2** (4) (1934), 338–348.
- [40] HICKS, JOHN, *Annual Survey of Economic Theory: The Theory of Monopoly*. Econometrica **3** (1) (1935), 1–20.
- [41] HICKS, JOHN, *Mr. Keynes and the Classics: A Suggested Interpretation*. Econometrica **5** (2) (1937), 147–159.
- [42] HICKS, JOHN, *Value and Capital*. Oxford: Clarendon Press, 1939.
- [43] HOTELLING, HAROLD, *The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utilities Rates*. Econometrica **6** (3) (1938), 242–269.
- [44] ISNARD, ACHILLES, *Traité des richesses*. Londres, Lausanne: F. Grasset et Cie., 1781.
- [45] JEVONS, WILLIAM S., *The Theory of Political Economy*. New York: A. M. Kelley, 1871.
- [46] KAHNEMAN, DANIEL; DIENER, ED & SCHWARTZ, NORBERT , Eds. *Well-being: The Foundations of Hedonic Psychology*. New York: Russell Sage Foundation University Press, 1999.
- [47] KAKUTANI, SHIZUO, *A Generalization of Brouwer’s Fixed Point Theorem*. Duke Mathematical Journal **8** (3) (1991), 457–459.
- [48] KANTOROVICH, LEONID, *The Mathematical Method of Production, Planning and Organization*. Leningrad: Leningrad University Press, 1939.
- [49] KANTOROVICH, LEONID, *Las matemáticas en la economía: logros, dificultades, perspectivas*. Conferencia en homenaje a A. Nobel, 1975.
- [50] KARUSH, WILLIAM, *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*. M. Sc. Dissertation, Department of Mathematics. Chicago: University of Chicago, 1939.

- [51] KOOPMANS, TJALLING, *Efficient Allocation of Resources*. *Econometrica* **19** (4) (1951), 455–465.
- [52] KOOPMANS, TJALLING, *Three Essays on the State of Economic Science*. New York: McGraw–Hill, 1957.
- [53] LANGE, OSCAR, *The Foundations of Welfare Economics*. *Econometrica* **10** (3/4) (1942), 215–228.
- [54] LEONTIEF, WASSILY, *Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States*. *The Review of Economics and Statistics* **18** (3) (1936), 105–125.
- [55] MALTHUS, THOMAS, *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson, 1798.
- [56] MANSON, STEVEN, *Simplifying Complexity: A Review of Complexity Theory*. *Geoforum* **32** (3) (2001), 405–414.
- [57] MAGNUSSON, LARS & OTTONSSON, JAN, *Evolutionary Economics and Path Dependence*. Cheltenham, England: Elgar Publishing, 1997.
- [58] MANTEL, ROLF, *On the Characterization of Aggregate Excess Demand*. *Journal of Economic Theory* **7** (3) (1974), 348–353.
- [59] MARSCHAK, JAKOB, *Annual Survey of Statistical Information: The Branches of National Spending*. *Econometrica* **1** (4) (1933), 371–386.
- [60] MARSHALL, ALFRED, *Principles of Economics*. London: Macmillan, 1890.
- [61] MIROWSKI, PHILIP, *The When, the How and the Why of Mathematical Expression in the History of Economic Analysis*. *Economic Perspectives* **5** (1991), 145–157.
- [62] MONSALVE, SERGIO, *Matemáticas Básicas para Economistas, Volumen 0: Fundamentos*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2009.
- [63] MONSALVE, SERGIO, *Matemáticas Básicas para Economistas, Volumen 1: Álgebra lineal*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2009.
- [64] MONSALVE, SERGIO, *Matemáticas Básicas para Economistas, Volumen 2: Cálculo*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2009.
- [65] MONSALVE, SERGIO, *Matemáticas Básicas para Economistas, Volumen 3: Optimización y dinámica*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2009.
- [66] MORGENSTERN, OSKAR, *he Collaboration Between Oskar Morgenstern and von Neumann on the Theory of Games*. *Journal of Economic Literature* **14** (3) (1976), 805–816.
- [67] NASH, JOHN, *Equilibrium Points in n -Person Games*. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **36** (1) (1950), 48–49.
- [68] NASH, JOHN, *The Bargaining Problem*. *Econometrica* **18** (2) (1950), 155–162.
- [69] PARETO, VILFREDO, *Cours d'économie politique*. (2 vols.) Lausanne: F. Rouge; Paris: Pichon, 1896.
- [70] PARETO, VILFREDO, *Manual of Political Economy*. Traducción de la edición italiana de 1927. New York: Augustus M. Kelley, 1906.
- [71] POINSOT, LOUIS, *Éléments de statique*. Paris: Bachelier, 1803.
- [72] QUESNAY, FRANÇOIS, *Le tableau économique*. (Publicado originalmente en 1759.) New York: Kelley, 1972.
- [73] RAMSEY, FRANK P., *Truth and Probability*. Contenido en RAMSEY, *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essay*, Chap. 7, 1931, 156–198.
- [74] RICARDO, DAVID, *On the Principles of Political Economy and Taxation*. London: Cambridge University Press, 1817 [1950].
- [75] RUBINSTEIN, ARIEL, *Similarity and Decision-Making Under Risk (Is There a Utility Theory Resolution to the Allais Paradox?)* *The Journal of Economic Theory* **46** (1988), 145–153.
- [76] ROY, RENÉ, *Cournot et L'École Mathématique*. *Econometrica* **1** (1) (1933), 13–22.
- [77] SAMUELSON, LARRY, *Evolutionary Game Theory and Equilibrium Selection*. Cambridge: MIT Press, 1997.

- [78] SAMUELSON, PAUL, *The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics*. *Econometrica* **14** (3) (1941), 187–200.
- [79] SAMUELSON, PAUL, *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1947.
- [80] SAMUELSON, PAUL, *Economists and the History of Ideas*. *American Economic Review* **52** (1) (1962), 1–18.
- [81] SAMUELSON, PAUL, *How Economics has Changed*. *The Journal of Economic Education* **18** (2) (1987), 107–110.
- [82] SARGENT, THOMAS, *Macroeconomic Theory*. Second Edition. San Diego: Academic Press, 1987.
- [83] SMITH, ADAM, *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. London: W. Strahan, 1776.
- [84] SONNENSCHNIG, HUGO, *Market Excess Demand Functions*. *Econometrica* **40** (3) (1972), 549–563.
- [85] TINBERGEN, JAN, *Annual Survey: Suggestions on Quantitative Business Cycle Theory*. *Econometrica* **3** (3) (1935), 241–308.
- [86] VAN DEN BERG, RICHARD, *At the Origins of Mathematical Economics: The Economics of A.N. Isnard (1748-1803)*. London – New York: Routledge, 2006.
- [87] VON NEUMANN, JOHN, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. *Mathematische Annalen* **100** (1928), 295–320.
- [88] VON NEUMANN, JOHN & MORGENSTERN, OSKAR, *Theory of Games and Economic Behavior*. London – Princeton: Princeton University Press, 1944.
- [89] VON THÜNEN, JOHANN H., *Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft and Nationalökonomie*. Hamburg: Perthes, 1826.
- [90] WALD, ABRAHAM, *Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen*. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **6** (1935), 12–20.
- [91] WALD, ABRAHAM, *Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre II*. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **7** (1936), 1–6.
- [92] WALRAS, LÉON, *Éléments d'économie politique pure (ou Théorie de la richesse sociale)*. Imprimerie L. Corbaz, Lausanne; Guillaumin, Paris; H. George Bale, 1874-1877.
- [93] WALRAS, LÉON, *Études d'économie sociale (ou Théorie de la répartition de la richesse sociale)*. Lausanne: F. Rouge, 1896.
- [94] WALRAS, LÉON, *Études d'Économie Politique Appliquée (ou Théorie de la Production de la Richesse Sociale)*. Lausanne: F. Rouge, 1898.
- [95] WALRAS, LÉON, *Éléments d'économie politique pure (ou Théorie de la richesse sociale) (4th. ed.)*. Lausanne: Rouge, 1900.
- [96] WALRAS, LÉON, *Économique et mécanique*. *Bulletin de la Société Vaudoise de Sciences Naturelles* **45** (166) (1909), 313–325.
- [97] WHEWELL, WILLIAM, *Mathematical Exposition of some Doctrines of Political Economy*. *Cambridge Philosophical Transactions* **9** (1828), 128–144.

(Recibido en septiembre de 2009. Aceptado para publicación en mayo de 2010)

SERGIO MONSALVE
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
 UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
 BOGOTÁ, COLOMBIA, AV. CARRERA 30 No. 45–03
e-mail: esmonsalveg@unal.edu.co
 ANGÉLICA CHAPPE
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

