Teoremas en acto y Praxeologías de los profesores de Matemáticas

Theorems-in-act and Praxeologys of the Mathematics teachers

Patricia Sureda
psureda@exa.unicen.edu.ar

M. Rita Otero
rotero@exa.unicen.edu.ar

UNICEN-Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina

RESUMEN

Se identificaron algunos teoremas en acto pertenecientes a los esquemas que dirigen la práctica docente de los profesores de matemática. El análisis de entrevistas, y el estudio de las organizaciones matemáticas y didácticas que efectivamente se llevaban a cabo en el salón de clases, permite identificar al teorema de la "subestimación del alumno" como un teorema central en los esquemas de los profesores, que no propicia el aprendizaje significativo de sus alumnos, sino el aprendizaje mecánico.

Palabras clave: *Análisis didáctico; aprendizaje significativo; enseñanza de funciones*

ABSTRACT

In this work, we identify some theorems-in-act belonging to the schemes that govern the teaching practice of mathematics teachers. The analysis of interviews, the study of the mathematical organization and those related to teaching that actually took place in the classroom, allowed us to identify the theorem of underestimation of the student as a central postulate in the teaching´ structures taken into account. This underestimation doe's not foster meaningful learning in their students- it only favors mechanical learning.

Key words: *Didactic analysis; meaningful learning; teaching functions*

INTRODUCCIÓN

Las acciones de los profesores de matemática en el aula se pueden describir mediante los constructos teóricos: praxeología matemática y praxeología didáctica (Chevallard, 1999). Dichas praxeologías constituyen un conjunto de prácticas –frecuentemente espontáneas- que pueden ser entendidas en términos de esquemas. Para Vergnaud (1996) son los conceptos y teoremas en acto presentes en esos esquemas los que dirigen la acción del profesor en una situación de enseñanza. Es decir, son los teoremas en acto los que dirigen las praxeologías que efectivamente se llevan a cabo en el aula. En este sentido, es posible vincular la actividad matemática y didáctica del profesor con los teoremas en acto.

Aunque las praxeologías didácticas de los profesores no responden a un cuerpo teórico, sino más bien a una práctica espontánea, se considera que no son el producto de la casualidad, por el contrario, son resultados de un largo proceso de construcción que se inicia en la propia experiencia de alumno. Sin embargo, aunque algunos esquemas y las prácticas que de ellos derivan son viables en la escuela secundaria, favoreciendo en aprendizaje mecánico en lugar del aprendizaje significativo de parte de los alumnos. Por esta razón, el poder comprender cómo inciden los teoremas en acto de profesores de escuela secundaria en situaciones de clase concretas, es un primer paso para modificarlos.

En esta investigación se consideran los esquemas relativos al sistema didáctico. Es decir, a la construcción del saber matemático, al aprendizaje de los alumnos y las tareas del profesor.

Uno de los supuestos centrales de esta investigación es que al momento de estudiar las acciones de los profesores en el aula, ni las teorías didácticas, ni los fundamentos psicológicos permiten por si solos explicar los fenómenos que se producen en la enseñanza. Por tal razón se decidio, adopta una relación de cooperación entre los constructos teóricos psicológicos y didácticos. A continuación, se presenta una breve descripción de los referenciales teóricos adoptados.

Dimensión Cognitiva

- *La Teoría de los Campos Conceptuales*

Los conceptos clave de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1996) son, además del propio concepto de campo conceptual, los conceptos de esquema, situación, invariante operatorio (teorema en acto y concepto en acto), y su propia concepción de concepto.

- *Esquema*

Vergnaud (1996) lo define como *"la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada"*, pues son los esquemas (los comportamientos y su organización) evocados en el sujeto por una situación o por un significante (representación simbólica), los que constituyen el sentido de esa situación o de ese significante para ese individuo (Vergnaud, 1996). Así, el sentido es para Vergnaud, una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes. Por otro lado, una situación dada o un cierto simbolismo no evocan en el individuo todos los esquemas disponibles. Esto significa que el sentido de una situación particular, no es "el sentido" para ese individuo en particular, así como no es el sentido de un símbolo particular. Se trata de un subconjunto de los esquemas que el sujeto posee, o de los esquemas posibles (ibid).

Consecuentemente, existirán situaciones para las cuales los sujetos disponen en su repertorio cognitivo de competencias que funcionan exitosamente y que se automatizan, y habrá otro tipo de situaciones para las cuales los sujetos no disponen de esas competencias y deberán evocar varios esquemas a la vez; reformular unos, reorganizar otros. En conclusión, lo que es invariante es la organización del comportamiento y no la acción resultante.

A pesar de lo dicho, no se teoriza sobre el aprendizaje de las matemáticas sólo a partir de las situaciones, sino que se considera el sentido de las situaciones y de los símbolos, suponiendo como eje central de la teoría, la acción del sujeto en situación y la organización de su conducta. De aquí la importancia atribuida al esquema.

Un esquema, es una totalidad organizada, que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Esto es posible porque el esquema comporta:

> - invariantes operatorios (conceptos-en-acción y teoremas-en-acción) que pilotan el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación, y la recogida de información sobre la situación a tratar;
> - anticipaciones del fin a lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales;
> - reglas de acción del tipo "si... entonces..."que permiten generar la serie de acciones del sujeto;
> - inferencias (o razonamientos) que permiten calcular las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto (Vergnaud, 1996, p. 15).

- *Invariantes operatorios -conceptos en acto y teoremas en acto*

La base conceptual, implícita o explícita, de los esquemas son los *invariantes operatorios, conceptos en acción y los teoremas en acción*, que permiten obtener la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más adecuada para abordar una situación (Vergnaud, 1996). En consecuencia, las decisiones didácticas en situación que tome un profesor en una cierta clase de Matemáticas, van a depender del esquema activado, pero más específicamente de los *conceptos en acción* y *teoremas en acción* que disponga el sujeto, acerca del sistema didáctico.

El problema es que estos invariantes, los *teoremas en acto* y *conceptos en acto* son largamente implícitos. Así, ni un concepto en acto es de hecho un concepto, ni un teorema en acto es un teorema, ya que los conceptos y teoremas científicos son explícitos y susceptibles a la discusión acerca de su pertinencia y verdad. Esta distinción es relevante para la didáctica debido a que la transformación de *conceptos-útiles* en *conceptos-objetos*, es un proceso decisivo para la conceptualización de lo real. En otras palabras la nominalización es una operación lingüística -por medio de palabras, enunciados, símbolos y signos- esencial en esta transformación; pues no hay debate acerca de la verdad o falsedad de un enunciado totalmente implícito.

Así, como los *teoremas en acto* presentes en los esquemas de los profesores son implícitos, es necesario reconocerlos en las praxeologías matemáticas y didácticas que llevan a cabo en sus propias prácticas. Pues si se quiere que quienes se ocupan de la formación y capacitación de docentes, tomen conciencia de los *teoremas en acto* y las implicaciones que estos tienen sobre dichas prácticas, es necesario comprender cómo inciden los *teoremas en acto* de los docentes en situaciones de clase concretas.

- *La Teoría del Aprendizaje Significativo*

En el plano cognitivo, esta teoría se ocupa específicamente de estudiar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de conceptos científicos, a partir de conceptos previamente formados.

El aprendizaje significativo se refiere al proceso por el cual una persona relaciona cierta información nueva, con algún aspecto relevante, ya existente en su estructura cognitiva. Es decir, los sujetos aprenden a partir de lo que ya saben. Así, el conocimiento previo, es la variable que más influye en el aprendizaje.

Para que se pueda lograr aprendizaje significativo, es necesario que se cumplan las siguientes tres condiciones:

- *Significatividad lógica del material:* que debe cumplir con dos condiciones. Primero, contar con una estructura interna organizada, que sea susceptible de dar lugar a la construcción de significados. Y segundo, cuando el profesor presenta los conceptos, siguiendo una secuencia lógica y ordenada. Es decir, es tan importante el contenido, como la forma en que éste es presentado.

- *Significatividad psicológica del material:* Los contenidos deben resultar comprensibles para el alumno. Éste debe "conectar" el conocimiento presentado con conocimientos previos, que ya estén incluidos en su estructura cognitiva. Es decir, el alumno debe poseer ideas *inclusoras* en su estructura cognitiva con las cuales relacionar la nueva información. Sí esto no fuera así, el alumno *guardará* la información en su memoria para contestar un examen y olvidará después, y para siempre, ese contenido.

- *Actitud favorable del alumno:* Aunque además de querer *aprender,* también es necesario que *pueda aprender* (significación lógica y psicológica del material). Sin embargo, no puede haber aprendizaje significativo si el alumno no quiere aprender.

<u>Dimensión didáctica</u>

- *La teoría antropológica de lo didáctico*

Teniendo en cuenta que nuestro interés se centra, tanto en el estudio de la práctica didáctica de cuatro profesores de Matemática, como en la organización del contenido de Matemáticas que efectivamente se reconstruye en sus aulas. Se presenta a continuación, algunos elementos teóricos de la Teoría Antropológica Didáctica (en adelante TAD).

- *Praxeologías*

Esta teoría admite que toda actividad humana realizada de manera regular, se puede describir por medio de una *praxeología*. Etimológicamente este concepto proviene de la unión de dos términos: praxis que hace referencia al *saber hacer* y logos, que se identifica con el *saber* (Chevallard, 1999). Así, toda organización praxeológica estará compuesta por dos bloques. Un primer bloque *practico-técnico*, que mediante los *tipos tareas* que se estudian y las *técnicas* que se construyen para solucionar, forman el *saber hacer*. Y un segundo bloque *tecnológico-teórico* que corresponde al *saber* y está formado por el *discurso tecnológico* y las *teorías,* el primero permite entender las técnicas y las segundas interpretar dichas técnicas y fundamentar las tecnologías.

Teniendo en cuenta estos dos bloques, se describe la actividad docente mediante las siguientes organizaciones praxeológicas:

a. Praxeología Matemática, en adelante Organización Matemática (OM). Refiere a los *tipos de tareas*, *técnicas*, *tecnología* y *teorías* que hacen vivir el saber en una clase de Matemática donde se estudia el tema. Aquí, es importante señalar que las nociones mencionadas son doblemente relativas. En primer lugar son relativas a la institución de referencia. Esto significa que lo que es considerado como un tipo de tarea -técnica, tecnología o teoría- en una institución, puede no serlo en otra (Bosch *et al*, 2003). En segundo lugar, son relativas a la función que desempeñan en una actividad Matemática determinada.

b. Praxeología Didáctica, en adelante Organización Didáctica (OD). Es la que permite dar cuenta de la reconstrucción de una Praxeología Matemática. Así, cada vez que se lleva a cabo un *proceso de estudio* en el aula, forzosamente entra en juego una Praxeología Didáctica. Según Bosch y otros (2003), las tareas didácticas de los profesores se pueden organizar en dos grandes categorías mutuamente dependientes. Una categoría agrupa las tareas relativas a la *concepción y organización de los dispositivos de estudio*; y a la *gestión* de sus respectivos *entornos*. Y otra en la que se ubican las tareas relativas a la *ayuda al estudio*, y en particular a la *dirección del estudio y la enseñanza* (Ibíd). La realización de cada una de estas tareas didácticas, se lleva a cabo mediante una o más técnicas didácticas, y "teóricamente" cuenta con la elaboración de un discurso tecnológico teórico que la justifique. Sin embargo, el estudio de estos profesores permiten inferir que la actividad didáctica de los profesores está más ligada a praxeologías espontáneas, construidas a lo largo de años de experiencia e intuición, que a un cuerpo tecnológico teórico.

Otro punto de este trabajo, y esencial para la TAD, es examinar en toda organización didáctica, la calidad y la cantidad del trabajo autónomo que se le exige a los alumnos. Pues es necesario partir de la responsabilidad que se debe dar al estudiante para que tenga un "verdadero papel que desempañar", y propiciar un buen rendimiento, en términos de aprendizaje. Sin embargo, en la actualidad una de las dificultades didácticas más comunes que tienen los profesores de Matemática es "darle un lugar a los alumnos", es decir, crear un *topo* apropiado para él.

- Momentos Didácticos

Al considerar diversos procesos de construcción Matemática, es posible detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos. Esto es, dimensiones que, independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole; estructuren cualquier proceso de elaboración Matemática. A cada una de estas dimensiones, Chevallard (1999) las denomina *momento didáctico:* Por esta razón, la noción de *momento didáctico* es utilizada no tanto en el sentido cronológico, como en el sentido de dimensión de la actividad.

Los seis momentos didácticos propuestos por Chevallard (1999) son el momento del primer encuentro con la organización que está en juego; la exploración del tipo de tareas y la elaboración de una técnica relativa a este tipo de tareas; la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica; el trabajo de la técnica; el momento de la institucionalización; y el momento de la evaluación.

Interrogantes de la Investigación

¿Qué Teoremas en Acto dirigen las acciones didácticas de los profesores de Matemática con relación a la construcción del saber, al aprendizaje del alumno y a la tarea del profesor?

¿Qué indicadores de los teoremas en acto de los profesores se encuentran en la organización Matemática y didáctica que llevan a cabo?

¿Dichos teoremas en acto, dirigen acciones didácticas que propician aprendizaje significativo?

MÉTODO

Se estudiaron cuatro profesores de Matemática que se desempeñan en la Escuela Secundaría pública de la Provincia de Buenos Aires, mediante la metodología del estudio de caso. La selección de los profesores se centró en dos características deseables para favorecer el estudio: la calidad de la información y la posibilidad de cooperación de los docentes. Ellos tienen distintos tipos de formación y distinta antigüedad en la profesión. Así, sus trayectorias como docentes cubren todo el espectro, ya que uno está pronto a jubilarse (en adelante P1), uno acaba de recibirse y recién está comenzando su vida profesional (en adelante P2), y dos tienen cerca de 30 años de experiencia (en adelante P3 y P4). En cuanto a sus formaciones académicas, dos de los profesores seleccionados se formaron en ingeniería (P1 y P3), y dos como profesores de Matemática (P2 y P4).

En todos los casos, se trata de docentes cuyas clases no se basan en un libro de texto que exigen adquirir a los alumnos. Siendo “la carpeta del alumno” el único recurso del saber disponible para él (característica general entre los profesores de Matemática). Los profesores generan sus materiales para el estudiante (texto) mediante la práctica del “dictado” que acaba por completarse mediante anotaciones en el pizarrón y/o resolución de las tareas. Por esta razón, en esta investigación, el análisis didáctico-matemático se realizó a partir de las carpetas de los alumnos.

La indagación se planteó en dos fases. Por un lado, una fase discursiva acerca de su propia práctica docente; y por otro, una fase actuativa de la misma práctica. La primera consistió en una entrevista en profundidad con cada uno de los cuatro profesores, durante la cual se los colocó en situaciones de enseñanza para provocar una reflexión acerca de su propia práctica docente. La segunda se centró en analizar los trabajos de sus estudiantes. Así, la exploración de los teoremas se realizó a partir de dos fuentes relativas al profesor: por un lado, se analizó el contenido de su discurso en la entrevista. Esto se utilizó para inferir posibles teoremas. Por otro lado, con el objeto de contrastar algunos teoremas y detectar otros, se emplearon los registros de sus clases que permitieron reconstruir las organizaciones Matemáticas y didácticas puestas en acto.

Descripción de categorías y análisis

Cada una de las entrevistas fue de carácter individual, con una duración aproximada de treinta minutos. Una vez que se realizó la trascripción escrita de las entrevistas, se segmentó cada una de ellas en episodios, en los cuales los turnos de habla entre investigador y profesor se identificaron con un número secuencial. El análisis de las entrevistas se centro en el contenido.

Por otra parte, los registros de clase se analizaron mediante una tabla de doble entrada, en la que se consideraba tanto los aspectos relativos a la Organización Matemática (OM), como a la Organización Didáctica (OD) (Chevallard, 1999). Ambas organizaciones reflejan las acciones del profesor y son indicadores de sus teoremas en acto.

A continuación se presenta el encabezado de la tabla 1 que se utilizó como instrumento, para el análisis de los registros de cada profesor.

Cuadro 1. Instrumento metodológico para la investigación

Unidad	Actor Principal	Momento predominante	Tareas Didácticas	Descripción	Tipos de problemas/ tareas Matemáticas	Técnicas	Noción	Lenguaje	Justificación

Luego, toda esa información se sintetizó en la tabla 2. Las columnas se ordenaron de arriba hacia abajo según la importancia de los aspectos predominantes.

Cuadro 2. Instrumento metodológico para el análisis

P	OD				OM			
	Actor P.	Momento	Tareas D.	Lenguaje	Noción	Justificación	Tareas	Técnicas
1	Profesor	I	GTD$_1$ Definir	Verbal y escasos símbolos.	Función lineal. Teoría de la proporción. Proporciones. Proporción directa. Ecuaciones.	Visual ostensiva.	TG$_1$	1.τNL 2.τGL
		Tτ	GTD$_2$ Proponer Tareas	Verbal, Numérico, Simbólico.				
	Alumno	Tτ	Rutinizar τ	Numérico, Gráfico				
2	Profesor	I	GTD$_1$ Definir	Verbal y Simbólico	Punto en el plano. Función. Función Lineal. Pendiente de una recta. Recta que pasa por dos puntos.	Visual ostensiva.	TG$_1$ TP	1.τNL 2.τGL τPL
		Tτ	GTA$_1$ Ejemplificar	Verbal, Numérico, Simbólico Gráfico				
		Tτ	GTD$_2$ Proponer Tareas	Verbal, Numérico, Simbólico	Función cuadrática		TG$_1$	1.τAC
	Alumno	Tτ	Rutinizar τ	Numérico, Simbólico, Gráfico.				
3	Profesor	I	GTD$_1$ Definir.	Verbal y Simbólico.	Función. F. Polinómica. F. L Haz de rectas. Ec. recta que pasa por dos puntos. R. paralelas y perp.	Visual ostensiva. Inducción empírica.	TG$_1$ TA$_8$	3.τGL 3.τAL
		Tτ	GTA$_1$ Ejemplificar.	Los cuatro				
		I	GTA$_2$ Proposi-cional.	Verbal y Simbólico.	Función cuadrática F. Resolvente. Ec. Bicuadradas		TG$_1$ TA$_8$ TN$_1$ TP	2.τNC 3.τAC 1.τAC 2.τAC (2.1) (2.2)
	Alumno	Tτ	Rutinizar τ	Numérico, Simbólico, Gráfico.				
4	Profesor	I	GTD$_1$ Definir.	Verbal	Función. Función Lineal.	Visual ostensiva. Inducción empírica.	TG$_1$	3.τGL
		Tτ	GTA$_1$ Ejemplificar	Verbal				
		Tτ	GTD$_2$ Proponer Tareas	Verbal, Numérico, Simbólico	Función Cuadrática.		TG$_1$	2.τNC
	Alumno	Tτ	Rutinizar τ	Los cuatro				

La columna *Actor Principal* muestra que el lugar predominante en la clase lo ocupa el profesor, mientras que el lugar del alumno se reduce a copiar y rutinizar técnicas.

El *Momento Predominante* se refiere a los seis momentos didácticos descriptos por Chevallard (1999). En los cuatro casos predomina el momento del Primer Encuentro (PE) y el momento del Trabajo de la técnica (TT) que se lleva a cabo mediante ejemplos y tareas.

Los *tipos de tareas didácticas* corresponden únicamente a los géneros de tareas que son propios del profesor como *director de estudios*. Se identificaron como predominantes, las tareas de *Definición - Ejemplificación - Formulación y propuesta de Tareas/ Técnicas*. La secuencia de estos tipos de tareas es recurrente en todas, y cada una de las clases.

En la columna *Lenguaje* se consideraron exhaustivamente los modos semióticos utilizados por los casos considerados. Estos fueron: *Verbal* (oral o escrito); *Gráfico* (cualquier tipo de gráfico reconocidamente matemático); *Simbólico; Numérico* (cuentas con números); *Pictórico* (dibujos a mano libre). Estos tipos de lenguaje son predominantes en cada una de las instancias. El lenguaje verbal permanece “casi” ausente en las tareas que realiza el alumno, pues no se le requiere ningún tipo de justificación ni reflexión acerca de su trabajo -reducido a la manipulación de técnicas.

Predominan las justificaciones: *Visual Ostensiva* (se muestra el objeto) e *Inducción Empírica* (generalización a partir de ejemplos).

Los *Tipos de Tareas y Técnicas* relativas a las funciones trabajadas se categorizaron exhaustivamente para cada uno de los casos considerados, y refiere sólo a ellos. Esta descripción al igual que las *Nociones,* muestran que el estudio del saber se lleva a cabo mediante organizaciones puntuales, reduciendo el estudio de los “temas” Función, Función Lineal y Función Cuadrática a la rutinización de técnicas.

Teoremas en acto

Los teoremas en acto fueron clasificados en: relativos a la construcción del saber; relativos al alumno y relativos al docente. En esta investigación se circunscribe a los teoremas en acto comunes a los cuatro casos estudiados, y se debe tener en cuenta que los nombres asignados a cada uno de ellos es una elección propia, que actúa a modo de identificación, pero bien podrían haber sido nombrados de otra manera.

Según este análisis, los teoremas en acción que subyacen a las acciones Matemáticas y didácticas de estos profesores son los presentados en la tabla 3.

Cuadro 3. Teoremas en Acto

Con relación a la construcción del saber	**Con relación al aprendizaje del alumno**	**Con relación a la tarea del profesor**
(TS1)- El significado no depende del uso, sino que el uso se rige por el significado.	(TA)- Teorema de Subestimación del alumno.	(TP)- La actividad esencial del profesor en el aula es explicar el saber a los alumnos.
(TS2)- Cada noción matemática empieza de cero.		

Con relación a la construcción del Saber

(a) *Teorema acerca de cómo se adquiere un concepto matemático (TS1):* En general, la actividad de los profesores considerados gira en torno de una definición que se dicta o se copia. Desde éste punto de vista, la definición contiene al significado, refiere a él y es esto lo que permite el “uso” del objeto y no a la inversa. Este teorema esta muy relacionado con la concepción platónica del conocimiento[1]. Para estos profesores, los objetos matemáticos se presentan, se “muestran” al alumno, se explican; como si el significado fuera intrínseco a ellas y fuera suficiente comprenderlas para

1 Para más detalles sobre la concepción platónica del conocimiento matemático véase, Klimosky & Boido; 2005

poder aprender. Por el contrario, es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver, como un concepto adquiere sentido para el alumno (Vergnaud, 1996).

Este teorema (TS1) permite, entre otros, explicar el hecho de que los profesores no ofrezcan situaciones apropiadas para la conceptualización.

(TS1) "El significado no depende del uso, sino que el uso se rige por el significado"

Este teorema (TS1) se puede advertir en episodios como los siguientes:

Profesor A- E102- Un determinado tema. Explico. Hago ejercicios, primero yo hago uno o dos (...).

Profesor B- E24- Supongamos que querés enseñar números enteros, vos primero empezás con una introducción, después seguís con un ejemplo, después le das la aplicación práctica.

Profesor D- E62- ... Porque antes nosotros les dábamos las herramientas, y después de acuerdo a lo que seguía estudiando, iba a saber aplicar esas herramientas que les dábamos. **E64-** Bueno, después nos dijeron: Aparte de las herramientas hay que decirle en que las tienen que aplicar. Pero yo como profesora de matemáticas no sé en todo lo que la puede aplicar. Que sé yo, yo no soy técnica.

Es posible relacionar cada teorema con un conjunto de indicadores presentes en la OM y OD, según se describe en la tabla 4.

Cuadro 4. Indicadores Matemáticos y Didácticos de TS1

Indicadores de TS1 presentes en la OM	Indicadores de TS1 presentes en la OD
- Los conceptos se enseñan a través de definiciones. Así, las definiciones parecen garantizar claridad, precisión y ser una vía privilegiada de acceso al conocimiento matemático. Sin embargo, en una aparente contradicción, las que ellos proponen están lejos de lo considerado matemáticamente correcto en el saber sabio. Es decir, resultan incompletas o están matemáticamente mal.[1] - El significado de un objeto matemático se reduce a su definición. Ellas son el único elemento de referencia disponible para los alumnos. Inmediatamente después se establece una técnica que presupone al objeto previamente definido.	- El primer encuentro de los alumnos con el saber matemático coincide con la instancia de definición. Así las definiciones adquieren un carácter iluminador. -La instancia de definición es propia del profesor y en correspondencia con TS1, necesariamente precede al uso del objeto (concepción platónica y no pragmática del significado). Esta instancia es predominante y recurrente clase a clase.

(b)*Teorema relativo a la construcción del conocimiento Matemático (TS2):* La segmentación didáctica descripta (*Definición - Ejemplificación - Formulación y propuesta de Tareas/ Técnicas*), no provee un espacio en el que se pueda llevar a cabo momentos en los que se integren las nociones abordadas. Si existen aspectos en común entre temas, no se hace explicito, antes se deposita en el alumno la responsabilidad de "atrapar" por intuición, las filiaciones y rupturas que hay entre cada una de las nociones, de las tareas y de las técnicas institucionalizadas.

Así, la enseñanza de la Matemática parece reducirse a la enseñanza sucesiva de temas. Donde el comienzo y el final de cada uno, debe quedar claro para alumno. Sin embargo, el problema no reside en que los profesores cumplan con la obligación institucional de que "ciertos contenidos *deben* ser enseñados". Sino en la consecuencia que acarrea la secuencia didáctica descrita, que no es otra que la que Chevallard (1999) denominó "autismo temático".

2 Por ejemplo: "Una función cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0ax^2 + bx + c = 0$ "

La sensación que trasmiten estos profesores en la entrevista, es como si ellos estuvieran presos a ella. Como una manera de enseñar impuesta y no una elección.

(TS2) "Cada noción matemática empieza de cero"

Se encontró evidencia de su presencia en los siguientes episodios:

Profesor A- E20- Vos sabes que matemática es una cadenita, si falta un eslabón no podes seguir con la cadena.

Profesor B- E20. Pero en matemáticas, vos siempre estas arrancando con un tema desde cero. Temas que a veces los chicos jamás vieron en la vida y por eso cuesta un poco más.

Profesor C- E76- [...] no se si hay algún tema difícil, porque en un tema que te parece fácil, por ahí tienen dificultad. Y otro tema que para mi tendría que ser difícil ¿viste? Ellos, lo pescan al vuelo.

Profesor D- E172- Hay temas que necesitas más, hay temas que necesitas menos. Es verdad y vos lo manejas con el grupo. Si vos ves que todo el grupo va, va, va, bueno listo, ya esta, pasa a otra cosa. Si ves que cuesta y tenes que volver, buscas mas ejercitación o problemas.

Las columnas Instancia, Momento, Noción, Tareas y Técnicas permiten validar este teorema mediante los siguientes indicadores.

Cuadro 5. Indicadores Matemáticos y Didácticos de TS2

Indicadores presentes en la OM	Indicadores presentes en la OD
- La "tematización" del saber, se lleva a cabo mediante el estudio de organizaciones puntuales. - Dicha "tematización" se produce debido a la institucionalización sucesiva de nociones aisladas; y a la rutinización de técnicas puntuales aisladas de su sentido original y convertidas en ejercicios muertos que empiezan y acaban en sí mismos.	- Los momentos que predominan en las clases son: Primer encuentro -siempre coincidente con la definición- y el Trabajo de la técnica. Esto deviene en aprendizaje mecánico.

Teoremas en acto respecto al Alumno

De muchas maneras, en diversos episodios y situaciones concretas, los profesores emplean un teorema en acto, que afirma y supone limitaciones fuertes del alumno para aprender Matemática, a saber: incapacidad de razonar lógicamente, desinterés por aprender, dificultad con el lenguaje, carencia de conocimientos previos, ausencia de anclajes “reales” para las nociones matemáticas abstractas, etc. Esto nos lleva a formular el Teorema de la subestimación del alumno, que permite comprender diversos fenómenos didácticos y sintetizar otros teoremas, de los cuales por razones de espacio no se pueden incluir aquí.

(TA) Teorema de Subestimación del alumno

“Los alumnos carecen de aptitudes básicas para aprender matemática significativamente –pensamiento lógico, capacidad de abstracción, interés, competencia lingüística, etc. -”

Profesor A- E10. [...] aparte al chico no le importa nada. Ni matemática, ni física, ni lengua, ni historia... **E32**. Fracasan porque no razonan y no les interesa. En todo los temas. Salvo que un tema sea absolutamente mecanizado. **E118.** Le damos análisis porque me figura. ¿Cómo le vas a dar análisis matemático? ¿Cómo le vas a dar derivada, límite, integrales? Sí el pobre chico no sabe despejar. Anda a buscar un chico que despeje del segundo miembro un denominador, pero no te lo hacen ni disfrazados de mono.

Profesor B- E112. Lo cultural también influye porque ya te predispone mal, [...] entonces cuando vos entras en el salón, la mala predisposición ya los cierra a ellos en la mente. Vos queres enseñar y ellos se cierran. -Yo no entiendo. Pero no saben siquiera que es lo que no entienden.

Profesor C- E12. [...] generalmente suelen no interpretar consignas, porque no tienen vocabulario. En la actualidad yo creo que e fracaso en matemática se acentúa mucho porque los chicos no tienen cultura de lectura escrita, ellos todo lo que saben es porque lo ven en televisión. Pero no leen textos. **E16.** Fracasan porque fallan en el razonamiento lógico **E18.** Fracasan porque no hay hábito de estudio.

Profesor D- E16- (...) Es porque la base es mala, es porque te lo ven ya grandes.

Los indicadores de este teorema se hallan presente en toda la tabla. Aquí algunos de ellos.

Cuadro 6. Indicadores Matemáticos y Didácticos de TA.

Indicadores de TA presentes en la OM	**Indicadores de TA presentes en la OD**
- Las definiciones, que son realizadas en lenguaje verbal con escasos símbolos matemáticos, suelen contener errores matemáticos. Parece ser que en su afán por simplificarlas terminan "olvidando" aspectos relevantes del concepto. - Predomina la validación Visual Ostensiva. Los objetos matemáticos son mostrados sin génesis, justificación o referencia matemática. Una de las razones es la limitación aparente de los alumnos para seguir los razonamientos lógicos o para acceder a estas "realidades evidentes", absolutas, perfectas, incuestionables. - Autismo Temático. El saber es atomizado en pequeñas porciones, "los temas" que empiezan y terminan en cada clase. El resultado son las técnicas puntuales y la mecanización, entendidos como el único conocimiento que el alumno es capaz de "aprender". - Instalan la repetición mecánica de ejercicios.	- El actor principal de la clase es el profesor, él define, ejemplifica, propone tareas, y es el único que determina qué está bien y qué está mal. Es decir, no le deja al alumno el espacio para decidir, justificar o validar sus producciones. - La secuencia los profesores seleccionan el contenido en términos de fácil-difícil, en lugar de relevante-no relevante, ignorando significados matemáticamente importantes[2]. - La ejemplificación tiene un lugar predominante en la secuencia didáctica. Debido a que las tareas que los alumnos deberán resolver, refieren a él. En otras palabras los profesores proponen una tarea y luego la resuelven bajo la mirada de los alumnos. - Se trabaja de manera secuencial y paso a paso, entronizando los procesos que van de lo particular a lo general. - La tarea del alumno se reduce a copiar y reproducir exitosamente las técnicas institucionalizadas.

2 Por ejemplo, aunque se "define" pendiente y se insinúan interpretaciones geométricas y trazados de gráficas que deberían servir para dar sentido a esta noción, se ignora tanto la idea de variación como el hecho de que en un modelo lineal la pendiente es constante.

Teoremas en acto respecto del profesor

Los teoremas acerca del saber, del alumno y del profesor son complementarios y están estrechamente relacionados. Al igual que en la sección anterior, se formula en esta investigación un teorema que intenta sintetizar una variedad de otros teoremas y acciones recurrentes del profesor en la clase. Los profesores cumplen a rajatabla con una misión que ellos suponen que tienen y que los alumnos les demandan: explicar. Este fenómeno al que se ha llamado "la metáfora del profesor explicador" es fácilmente contrastable, pregúntese a un estudiante qué requisitos debe tener un buen profesor y se escuchará enseguida que "debe saber explicar". Obviamente nadie dirá que el profesor tiene que ser un preguntador, alguien que está más interesado en las preguntas que en las respuestas, porque el papel de explicador, el de facilitador se ha impuesto en la institución escolar y también más allá de sus fronteras. Se formula el teorema como sigue:

TP "La actividad esencial del profesor en el aula es explicar el saber a los alumnos"

Entre otros, este teorema se pone de manifiesto en los siguientes episodios:

Profesor A- E8. El profesor de Matemática tiene que estar en el frente, tiene que explicar (…).

Profesor B- E26. Y uno a medida que va explicando le va pidiendo participación a los chicos, que eso es el juicio de valor, si ellos están aprendiendo o no.

Profesor D- E170: Yo me tengo que quedar tranquila de que se fue entendiendo, que después tenga que explicar algo más que quiera repasar, si bárbaro. Pero hay chicos que les falta ganas.

Profesor - E156. (...) Tiene que haber un método que vos le puedas explicar. Yo se que muchas veces tendrás que explicar cinco veces lo mismo y buscar otra forma más de explicar ¡pero te tienen que entender! Si vos posees los conocimientos, tenés que encontrar la forma de transferirlos y que no sea una forma ni aburrida, ni que parezca un castigo, ni nada por el estilo. No quiere decir que me vaya a constituir en el animador de la clase, nada más lejos de mí porque yo soy bastante autoritaria. Pero pienso que se puede de alguna forma u otra vencer esa resistencia y explicar, y que te entiendan**.**

Cuadro 7. Indicadores Matemáticos y Didácticos de TP

Indicadores de TP presentes en la OM	**Indicadores de TP presentes en la OD**
- Como la tarea del profesor consiste en explicar, antes de las tareas define y brinda ejemplos. Al alumno le debe quedar claro lo que debe hacer.	- Se hace evidente en los registros que el actor principal y comunicador del saber, es el profesor.

CONCLUSIONES

Con respecto a la primera pregunta, se identificó un sistema de teoremas en acto que subyacen a las acciones didácticas de estos profesores. Sus componentes son: con relación a la construcción del saber **(TS1)-** “El significado no depende del uso, sino que el uso se rige por el significado”, **(TS2)-** “Cada noción matemática empieza de cero”; relacionado con el aprendizaje del alumno **(TA)-** “Teorema de Subestimación del alumno”; y vinculado a la tarea del profesor **(TP)-** “La actividad esencial del profesor en el aula es explicar el saber a los alumnos”.

Respecto a la segunda pregunta, las acciones Matemáticas y Didácticas que son indicadores de los teoremas aparecen estrechamente relacionadas, lo que indica que estos teoremas tienen carácter sistémico. Así, puede decirse que esta manera de ejercer el oficio de profesor ha sido aprendida significativamente. Estas relaciones se visualizan en el Organigrama de la figura 1.

En el centro del sistema se ubicó el Teorema de la Subestimación del Alumno (TA) que subyace a las primeras decisiones del profesor acerca de cómo encarar la enseñanza. Sus acciones son coherentes con las carencias atribuidas al alumno para aprender Matemática y solidarias con el resto de los teoremas. Si el alumno carece de abstracción, de pensamiento lógico, de interés, etc.; el afán de explicar, de atomizar el saber y el papel otorgado a la presentación del objeto matemático mediante una definición, cobran sentido y resultan viables en la institución escuela media -aunque ninguna de estas acciones conduce al aprendizaje significativo, sino al prendizaje mecánico.

En cuanto a los indicadores del teorema de subestimación del alumno (TA) presentes en la OD, es destacable el papel predominante del profesor y su afán por reducir el lugar del alumno a tareas que le permitan desenvolverse con confianza y generen alguna certeza de éxito, esto es, la manipulación de técnicas.

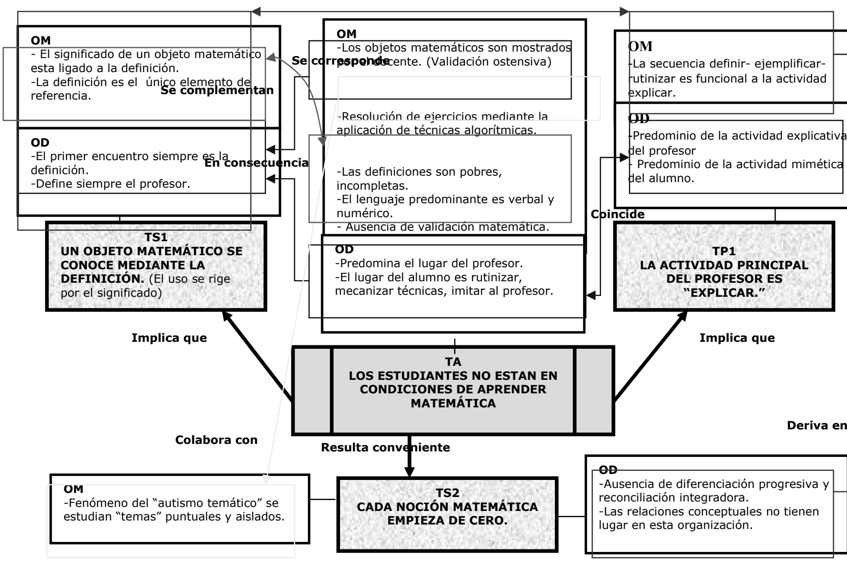

Figura 1. Relaciones entre los Indicadores de los Teoremas

Las conexiones que unen los diversos recuadros muestran la correspondencia entre los indicadores del teorema de subestimación del alumno con los indicadores en la organización didáctica del teorema del profesor explicador y del teorema relativo al significado **(TS1)**. Así, la definición es una instancia muy relevante en la clase y una de las principales acciones del profesor. Ninguna de estas acciones propicia el aprendizaje significativo entre los alumnos, ni resuelve las carencias que los profesores les atribuyen.

De manera similar los indicadores en la organización Matemática del teorema de subestimación son coherentes con los indicadores del resto de los teoremas. Por lo tanto:

- Los profesores "muestran" los objetos matemáticos, esa es la única validación, con el propósito de evitar el uso de la lógica a fin de facilitar la compresión del alumno **(TS1).** El objeto matemático es introducido con una definición que esta exclusivamente a cargo del profesor. Esta actividad ostensiva, asume al significado como intrínseco a la definición y presupone la existencia de los objetos matemáticos.
- Luego, las acciones de enseñanza consisten fundamentalmente en la manipulación de técnicas algorítmicas que son funcionales al proceso de atomización del saber **(TS2)**. Esta enseñanza basada en las técnicas no conducen a facilitar entre los estudiantes el aprendizaje significativo, por el contrario, revaloriza el aprendizaje mecánico.

En síntesis, mientras los profesores conserven el teorema en acto de la subestimación del alumno, sólo estarán en condiciones de propiciar el aprendizaje mecánico de los contenidos de matemáticas entre los estudiantes.

Para terminar, resta decir que a pesar que estos resultados provienen de un estudio de caso, es posible advertir que los teoremas descriptos permanecen intactos en muchos profesores de la escuela secundaría, aún en profesores formados en los marcos teóricos que invitan a propiciar el aprendizaje significativo entre sus alumnos, y la construcción de conceptos.

REFERENCIAS

AUSUBEL, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning.* New York: Grune and Stratton

BOSCH, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). “El profesor como director de procesos de estudios. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas”;. *Recherches en Didactique des Mathématiques 23 (1)*, 79 – 136

CHEVALLARD, Y. (1999). L´ ánalyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19 (2)* , 221-266

KLIMOVSKY, G., & BOIDO, G. (2005). Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción. Buenos Aires: A-Z

RUIZ, J. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. Bilbao: Universidad de Deusto

VERGNAUD, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Revista Perspectivas XXVI (1)*

VERGNAUD, G. (2007). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. *Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática. ISBN 978-950-658-183-1.* Tandil