EDUCATION ISSUES /
ASPECTOS EDUCACIONALES

MATERIALES INTERACTIVOS PARA LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL USANDO EL MÉTODO SIMPLEX

M. J. García-Ligero y P., Román, P[1].
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Granada (España)

ABSTRACT
In this paper we present educational interactive materials for a pleasant learning of the resolution of a Linear Programming Problem using the Simplex method. First of them provides, through an example, the steps involved in the graphic resolution of a Linear Programming Problem with two variables. The following materials correspond to the different steps to solve a Linear Programming Problem: Transformation of a Linear Problem to standard form, Construction of the first Simplex table and Simplex Algorithm.

RESUMEN
En este trabajo presentamos materiales docentes interactivos para un aprendizaje ameno de la resolución de un problema de Programación Lineal mediante el método Simplex. En el primero se proporciona, mediante un ejemplo, los pasos a seguir en la resolución gráfica de un problema de Programación Lineal con dos variables. Los siguientes materiales se corresponden con las distintas fases a seguir desde el planteamiento de un problema de Programación Lineal hasta su resolución: Transformación de un problema de Programación Lineal general a forma estándar, Construcción de la primera tabla del Simplex y Algoritmo Simplex.

KEY WORDS: Linear programming, Simplex method, Interactive materials.

MSC: 90C05, 97C80, 97D40.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad los sistemas educativos en Europa y, en particular en España, están sufriendo un cambio drástico motivado, en parte, por la utilización de nuevas tecnologías y, por otra, por la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior el cual conlleva un aumento del trabajo personal de- sarrollado por el alumno. Por ello, numerosos esfuerzos se han realizado para la adaptación de la docencia de la Investigación Operativa a las nuevas tendencias de aprendizaje; podemos citar, en el ámbito del sistema educativo español, el desarrollo de entornos virtuales de enseñanza (Cobo [1] y Cobo Ortega y Gómez García [2]) en la Universidad de Cantabria (España) y, en general, el sitio web “The Simplex Place” [3] de la Universidad de Melbourne (Australia).

En este sentido, nuestra tarea en los últimos años también ha ido dirigida a la adaptación de la docencia de la Investigación Operativa a las nuevas tecnologías. El trabajo que presentamos va dirigido a alumnos que van a tomar contacto por primera vez con la Investigación Operativa y el mundo de la optimización, y en nuestro caso en concreto, a alumnos de segundo curso de la titulación Diplomado en Estadística de la Universidad de Granada. Por esta razón, en una primera fase, nos hemos centrado en el estudio de problemas de Programación Lineal (P. L.), punto de arranque en el estudio de esta materia y, en concreto, a su resolución mediante el método Simplex. Nuestro objetivo ha sido la realización de materiales interactivos de apoyo sobre cuestiones concretas que ayuden a nuestros alumnos a salvar las principales dificultades encontradas y adquirir destrezas para la resolución de un problema de P. L. En la sección 2

[1] {mjgarcia, proman}@ugr.es

se describen con detalle los materiales realizados y está estructurada en varias subsecciones. En la subsección 2.1. proponemos materiales relativos a la resolución gráfica de ejemplos concretos de un problema de P.L. con los que pretendemos que los alumnos tengan una visión geométrica del problema lineal, familiarizándose visualmente con conceptos básicos como región factible, conjunto convexo, punto extremo, que son claves para el desarrollo del método Simplex. En las subsecciones 2.2-2.4 se presentan materiales relativos a la resolución de un P.L. mediante el método Simplex. La transformación de un problema de P.L. a forma estándar se trata en la subsección 2.2. El material realizado permite al alumno seleccionar el tipo de problema y el tipo de restricciones de que dispone y se le indica cómo actuar y el procedimiento de resolución. En la subsección 2.3 se presenta un material relativo a la construcción de la tabla inicial del Simplex, que muestra al alumno cómo disponer los elementos necesarios en la tabla inicial y cómo identificar las variables básicas y solución básica inicial. Finalmente, la subsección 2.4 muestra el material relativo a la resolución interactiva del Simplex. En él se guía al alumno en los pasos a seguir en la resolución de ejemplos concretos pudiendo seleccionar en cada paso el nivel de detalle en las explicaciones mostradas.

Dichos materiales han sido realizados con Microsoft Power Point 2003 y están disponibles para los alumnos en dicho formato así como sus versiones en flash (obtenidas mediante un conversor apropiado).

El trabajo finaliza con una sección de conclusiones en la que comentamos nuestra experiencia en la aplicación de los materiales presentados para el aprendizaje de los estudiantes.

2. MATERIALES INTERACTIVOS

2.1. Resolución gráfica de un problema de Programación Lineal

En este material se proporciona, en diversos ejemplos que cubren las diversas situaciones que pueden presentarse en la práctica (inexistencia de solución, solución óptima única y no única en los casos de regiones factibles acotadas y no acotadas), los pasos a seguir en la resolución gráfica de un problema de P.L. con dos variables (representación de la región factible, identificación de los puntos extremos y, por último, la obtención de la solución). En este caso se pretende no sólo que el alumno aprenda el mecanismo de la resolución sino también que se familiarice con conceptos básicos y comprenda visualmente el mecanismo del algoritmo Simplex.

Así, en primer lugar, después de seleccionar un ejemplo de una de las posibles situaciones que pueden aparecer (ver figura 1), se le muestra su enunciado y el alumno puede seleccionar cada uno de los pasos citados. Nos centramos en el caso de solución óptima única y región factible acotada (ver figura 2) para mostrar con detalle su desarrollo. En la construcción de la región factible se van dibujando, paso a paso, cada uno de los semiespacios que constituyen las restricciones del problema y se finaliza obteniendo la intersección de todos ellos (ver figura 3). Una vez construida la región factible que, en este caso, es un conjunto convexo acotado, el siguiente paso para determinar la solución es la obtención de sus puntos extremos, la cual puede verse en la figura 4. Finalmente, la solución al problema puede obtenerse mediante la evaluación de la función objetivo en los puntos extremos o bien, mediante el desplazamiento de la función objetivo por la región factible. Se consideran las dos opciones que se muestran en las figuras 5 y 6.

2.2. Transformación de un problema de Programación Lineal a forma estándar.

El primer paso para la resolución de un problema de P. L. mediante el algoritmo Simplex es su transformación a forma estándar mediante el cambio, si es necesario, a un problema de maximizar y/o la incorporación, en su caso, de variables excedentes y artificiales además de las de holgura. Debido a la dificultad que suelen encontrar los alumnos para realizar tal transformación y decidir el algoritmo adecuado para resolver el problema transformado, se ha realizado una segunda aplicación interactiva en la que el alumno puede seleccionar en primer lugar el tipo de problema al que se enfrenta (figura 7) y, a continuación el tipo de restricciones de la que dispone (figura 8). En todo momento se le guía mediante los pasos a seguir para transformar el problema de partida a uno en forma estándar y, finalmente el procedimiento que debe aplicar en cada caso. En la figura 9 puede verse una situación de un problema de partida de tipo minimizar y con restricciones únicamente del tipo menor o igual; en este caso se le indica como transformar el problema a uno de tipo maximizar, cómo transformar las restricciones de menor o igual en igualdades mediante la incorporación de variables de holgura y, por último, se le indica que puede resolver el problema transformado mediante el algoritmo Simplex. Por otra parte, en la figura 10 se plantea un problema de maximizar con los tres tipos de restricciones posibles. En este caso, se le indica cómo debe actuar ante cada una de las posibles restricciones: incorporar un variable de holgura por cada restricción de menor o igual, una variable artificial por cada restricción en igualdad y una excedente y una artificial por cada una del tipo mayor o igual. Finalmente, se le indica que debe aplicar el método de la M o el método de las dos fases para resolver el problema transformado.

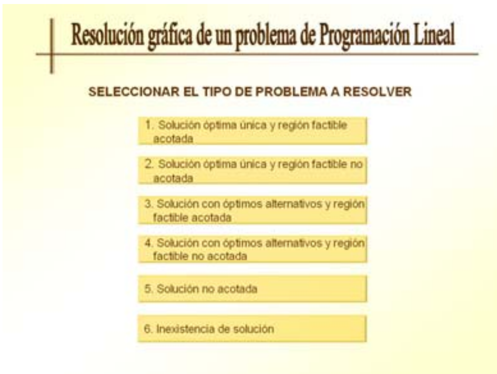


Figura 1: Selección del tipo de problema para su resolución gráfica**.**

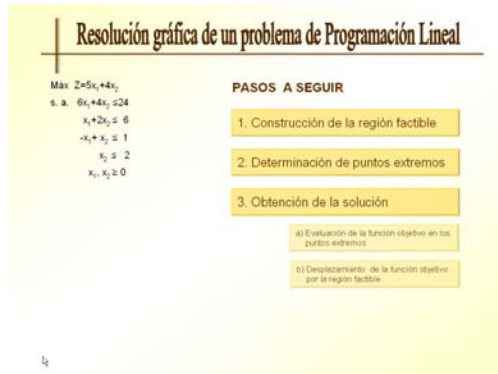


Figura 2: Pasos a seguir en la resolución gráfica de un problema de Programación Lineal.

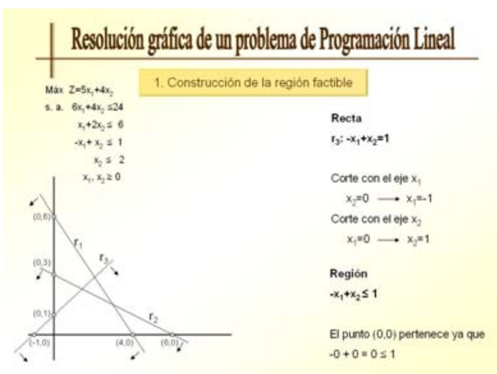


Figura 3: Un paso en la construcción de la región facti ble de un problema de Programación Lineal.

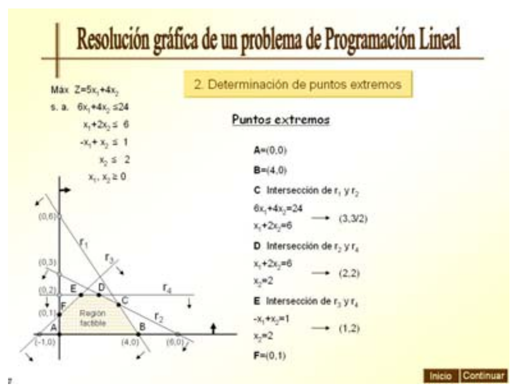


Figura 4: Determinación de los puntos extremos en un problema de Programación Lineal.

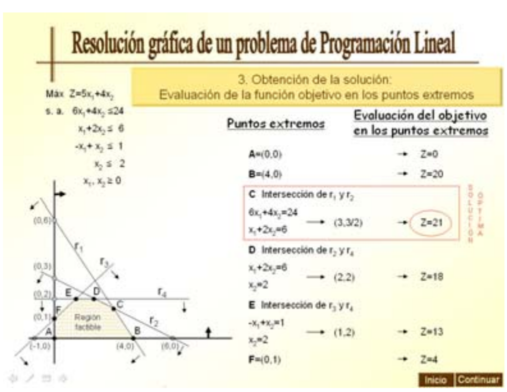


Figura 5: Obtención de la solución de un problema de P. L. mediante la evaluación de la función objetivo en los puntos extremos.

Figura 6: Obtención de la solución de un problema de P. L. mediante el desplazamiento de la función objetivo por la región factible.

Figura 7: Selección del tipo de problema para la transformación de un problema de P. L. a forma estándar.

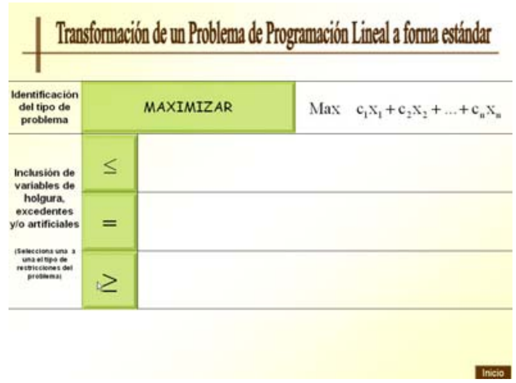


Figura 8: Selección del tipo de restricciones para la transformación de un problema de P. L. a forma estándar.

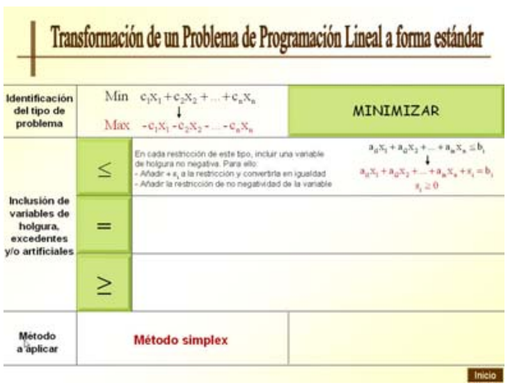


Figura 9: Indicación de los pasos a seguir para tranformar un problema de P.L. (de minimizar y con restricciones de menor o igual) a forma estándar.

Figura 10: Indicación de los pasos a seguir para transformar un problema de P.L. (de maximizar y con los tres tipos de restricciones**)** a forma estándar.

2.3. Construcción de la tabla inicial del método Simplex.

Una vez que el alumno ha adquirido la destreza para transformar cualquier problema de Programación Lineal a forma estándar se enfrenta con el problema de su resolución y el primer paso que debe llevar a cabo es la construcción de la primera tabla del Simplex. Por ello, el siguiente material interactivo que hemos realizado muestra de una forma visualmente atractiva (con desplazamientos interactivos) cómo disponer los elementos necesarios para la construcción de dicha tabla inicial, identificando las variables básicas y la solución básica inicial. Se han distinguido los siguientes pasos: determinación del número de filas y columnas de la tabla (figura 11), rellenado del interior de la tabla con las tasas de uso y coeficientes de las variables introducidas (figura 12), inclusión de los costos (figura 13), identificación de las variables básicas (figura 14), identificación de los costes básicos (figura 15) y, finalmente, identificación de la solución básica inicial (figura 16).

2.4. Resolución interactiva del Simplex.

El último de los materiales docentes interactivos que presentamos consiste en la resolución interactiva de ejemplos concretos de un problema de P.L. mediante el método Simplex. De la misma forma que en el caso de la resolución gráfica el alumno selecciona en primer lugar el tipo de ejemplo concreto, del cual se le va a guiar de forma interactiva en su resolución, entre los disponibles asociados a cada una de las posibles situaciones que se pueden presentar.

Debido a las múltiples posibilidades que hay, hemos optado por mostrar de forma detallada un ejemplo con solución óptima única y, al final, comentaremos cómo se tratan algunas de las otras situaciones.

Figura 11: Determinación del número de filas y columnas en la construcción de la tabla inicial del método Simplex.

Figura 12: Rellenado de la tabla inicial del Simplex con las tasas de uso y coeficientes de las nuevas variables.

Figura 13: Inclusión de los costos en la tabla inicial del método Simplex.

Figura 14: Identificación de las variables básicas en la tabla inicial del método Simplex.

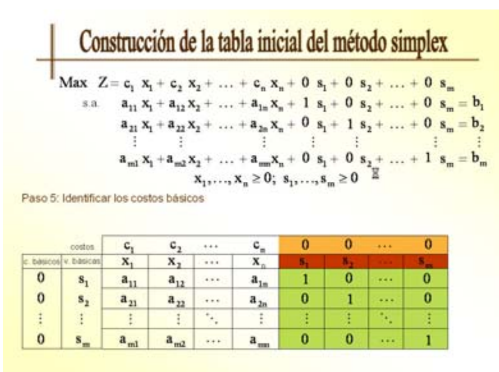


Figura 15: Identificación de los costos básicos en la tabla inicial del método Simplex.

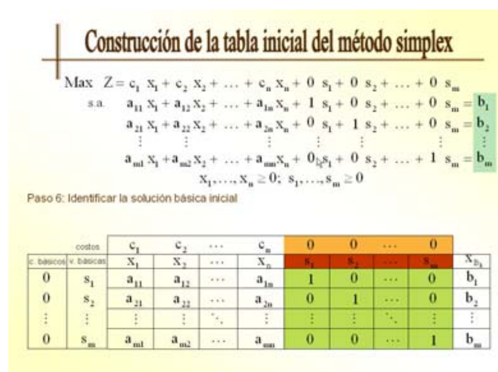


Figura 16: Identificación de la solución básica inicial en la tabla inicial del método Simplex.

Así, partiendo de la tabla inicial para dicho problema la primera cuestión que se plantea al alumno es si la solución básica factible inicial es óptima, ante la cual puede seleccionar dos opciones: si el alumno cree que es capaz de responder a esta pregunta debe elegir el botón *Continuar y comprobar*, o bien, no sabe, en cuyo caso debe seleccionar el botón *Necesito ayuda* (figura 17). Si el alumno selecciona la opción *Continuar y comprobar*, se le suministra la solución, sin detalles, a la pregunta propuesta (figura 18); si por el contrario selecciona *Necesito ayuda*, se le explica de forma detallada y con animaciones cómo realizar los cálculos necesarios y comprobar las condiciones necesarias para llegar a la respuesta adecuada (figuras 19, 20, 21 y 22). Además en el primer caso puede optar por la opción *Volver* si comprueba que su respuesta no era la adecuada y debe seleccionar el botón *Necesito ayuda*.

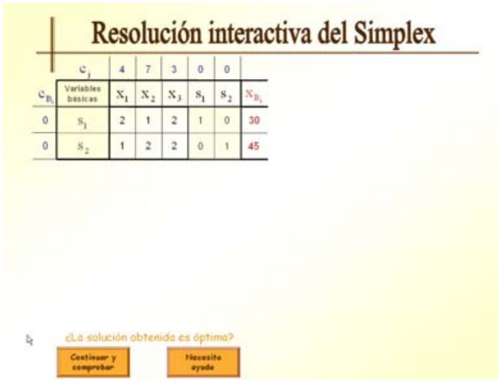


Figura 17: Opciones para obtener si una solución obtenida es óptima en la aplicación del método Simplex.

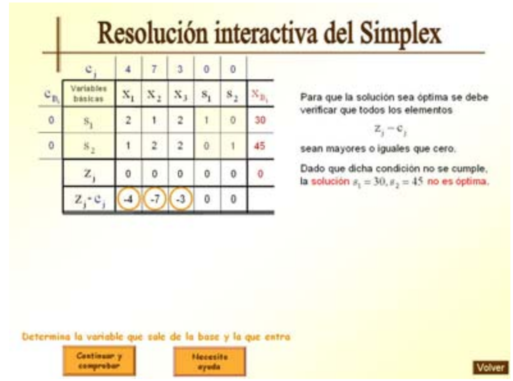
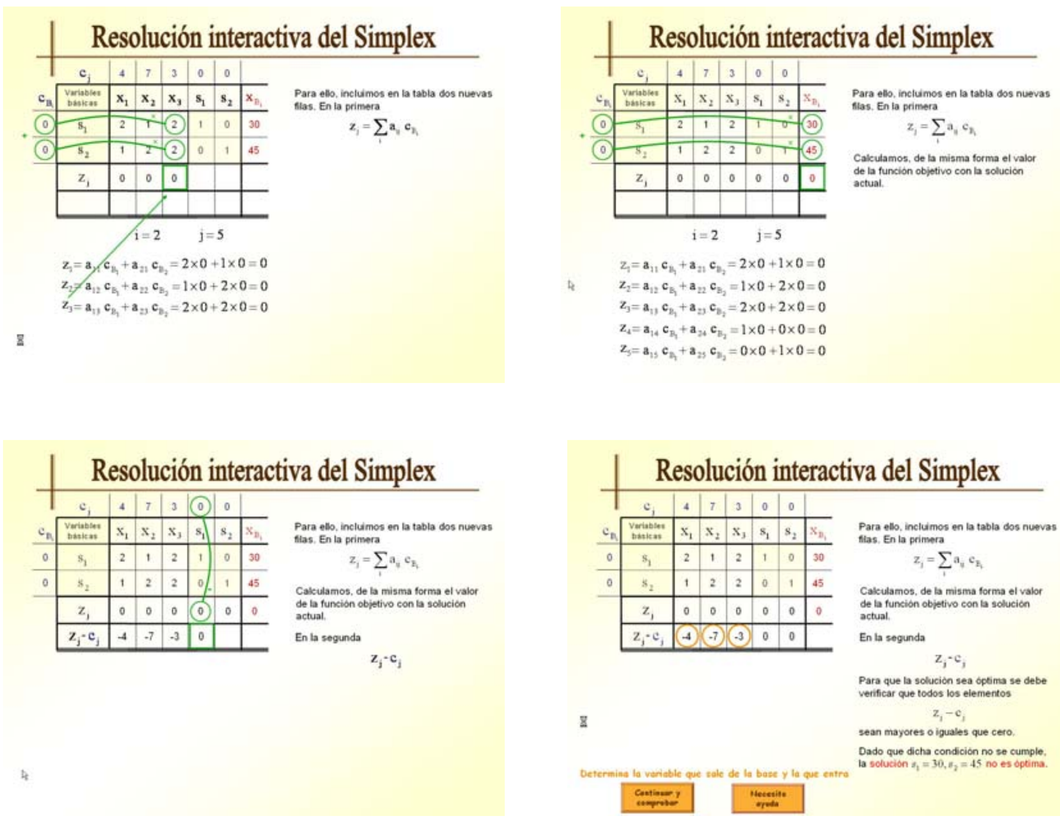


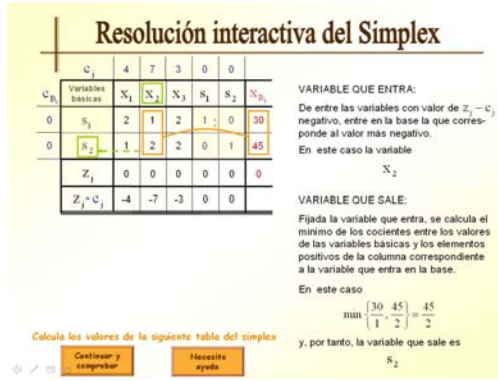
Figura 18: Explicación obtenida al seleccionar la opción *Continuar y comprobar* en la pantalla mostrada en la fig. 17.



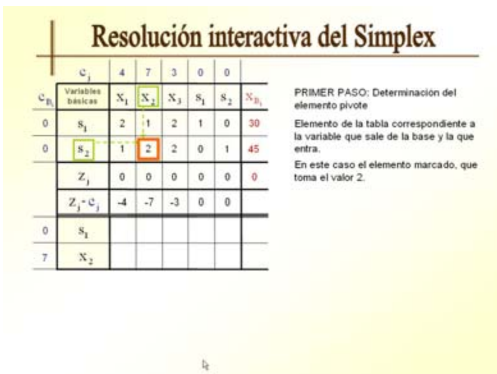
Figuras 19, 20, 21 y 22: Pasos de la explicación detallada y animada que se obtiene si se selecciona la opción *Necesito ayuda* en la pantalla mostrada en la figura 17.

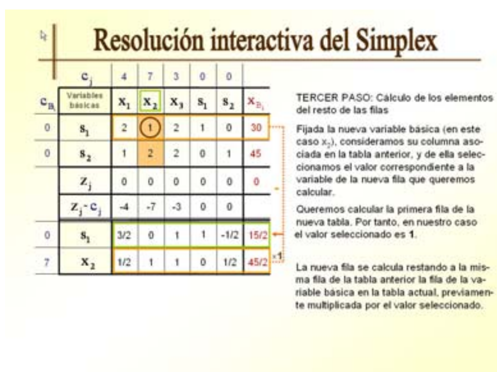
Dado que en este caso, la solución básica factible inicial no es óptima, el siguiente paso que debe realizar el alumno es la búsqueda de una nueva solución básica factible y, para ello, determinar la variable que sale de la base y la que entra. De nuevo al alumno se le plantean las opciones *Continuar y comprobar* y *Necesito ayuda* (figuras 18 y 22). En este caso mostramos solamente la explicación detallada y animada correspondiente a la opción *Necesito ayud*a (figuras 23 y 24).

Una vez determinadas tanto la variable que entra como la que sale de la base, el siguiente paso para la resolución del problema planteado es la obtención de la nueva tabla del Simplex asociada a las nuevas variables básicas (cambio de base en una iteración del método Simplex). En la figura 24 se muestra una de las pantallas en las que al alumno se le pide que resuelva esta cuestión y de nuevo se le ofrecen las posibilidades ya citadas. De nuevo mostramos solamente la explicación detallada y animada asociada a la opción *Necesito ayuda* (ver figuras 25, 26 y 27).



Figuras 23 y 24: Pasos de la explicación detallada y animada que se obtiene si se selecciona la opción *Necesito ayuda* en las pantallas mostradas en la figuras 18 y 22.





Figuras 25, 26 y 27: Pasos de la explicación detallada y animada que se obtiene si se selecciona la opción *Necesito ayuda* en la pantalla mostrada en la fig. 24.

Finalmente, cuando se le solicita al alumno, en una de las iteraciones del método Simplex, que compruebe si la solución es óptima siendo la respuesta afirmativa, la pantalla que aparece es la que se muestra en la figura 28.

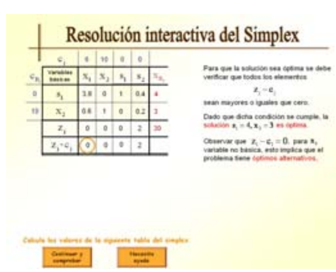
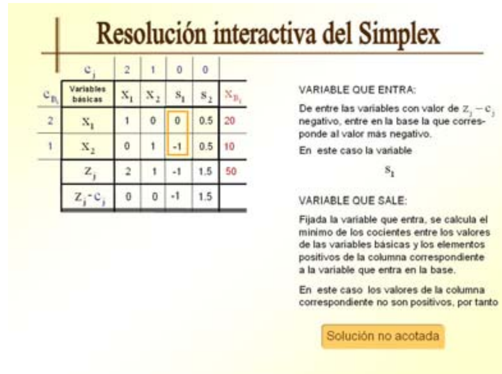


Figura 28: Verificación de la optimalidad de una solución un problema de P. L.

Figuras 29 y 30: Verificación de la optimalidad de soluciones alternativas de de un problema de P. L.

Si la solución es óptima pero hay soluciones alternativas, en las figuras 29 y 30 se muestra el desarrollo final de la resolución.Por último, el caso de un problema con solución no acotada se muestra en las figuras 31 y 32.



Figuras 31 y 32: Verificación de la obtención de solución no acotada de un problema de P. L.

Notemos que el caso de infactibilidad no se contempla ya que en esta primera fase se tratan problemas de P. L. en forma canónica de maximizar que siempre tienen al menos la solución trivial nula.

3. CONCLUSIONES

El material que presentamos en este trabajo ha sido utilizado por los alumnos de la titulación de Diplomado en Estadística durante los cursos académicos 2007/08 y 2008/09. La aplicación de los materiales desarrollados ha contribuido en gran medida al aprendizaje y compresión de los conceptos básicos de Programación Lineal de forma más amena al método tradicional, así como a la adquisición de destrezas en la resolución de un problema de Programación Lineal mediante el método Simplex. Los alumnos han valorado positivamente la utilidad de los materiales diseñados para el estudio de esta asignatura. Además nosotros hemos observado que cuestiones que siempre habían sido difíciles de asimilar les han resultado más fáciles de entender. Concretamente, hemos comprobado que los alumnos han mejorado notablemente en la resolución gráfica de un P. L. respecto a otros años. Otro material que ha contribuido positivamente al aprendizaje ha sido el de la Transformación de un problema a forma estándar. Este, mediante su repetida utilización, ha hecho que los alumnos sean capaces de transformar rápidamente el problema de que dispone para su posterior resolución así como identificar el método a utilizar. Por último, la resolución interactiva de ejemplos concretos de aplicación del método Simplex ha contribuido de forma notoria a la mecanización de los pasos a seguir hasta la obtención de la solución a un problema de P.L.

La buena acogida por los alumnos nos ha animado a continuar con el desarrollo de nuevos materiales que sirvan de apoyo para el estudio de la Investigación Operativa.

RECEIVED JUNE, 2008
REVISED JUNE 2009

REFERENCIAS

[1] COBO, A. (2006): Experiencias educativas en la red Internet: Elaboración de tutoriales interactivos multimedia. *V Jornadas ASEPUMA*, (http://www.uv.es/asepuma/V/12.pdf).

[2] COBO ORTEGA, A. y GÓMEZ GARCÍA, P. (2004) Uso de un entorno virtual de enseñanza para el desarrollo de un modelo de aprendizaje colaborativo con procesos innovadores de evaluación. *XII Jornadas de ASEPUMA, 2004.* (http://www.um.es/asepuma04/comunica/cobo_gomez.pdf)

[3] http://www.ifors.ms.unimelb.edu.au/tutorial/simplex/index.html Página web de “The Simplex Place” de la Universidad de Melbourne (Australia).