

COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS Y ENTORNOS INTERACTIVOS

JESÚS MURILLO, PETRA MARÍA ARNAL Y GUILLERMINA MARCOS

RESUMEN. En el presente artículo, tomando en consideración las ideas sobre competencia matemática que se plantean en el RD 1631/2006 de contenidos mínimos de la ESO, las ideas que en relación a la alfabetización matemática se contemplan en la evaluación PISA (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes) y en los Estándares Curriculares de Matemáticas y de Evaluación (NCTM - National Council of Teachers of Mathematics), se presenta una metodología en un entorno interactivo para ampliar las habilidades geométricas y comunicativas, diseñada para lograr la alfabetización matemática (Mathematical Literacy), dicha alfabetización o competencia matemática general se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Un buen nivel en el desempeño de estas capacidades muestra que un estudiante está matemáticamente alfabetizado o letrado. Además proporciona una herramienta de apoyo para el aprendizaje de la geometría.

ABSTRACT. In this paper, taking into consideration the ideas of *mathematical competence* that arise in RD 1631/2006 of minimum content of the ESO (Obligatory Secondary Education), the ideas related to *mathematical literacy* covered by the PISA (Programme for International Student Assessment) assessment and mathematical and assessment curriculum Standards (NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)), there is a methodology in an interactive environment to enhance geometric and communicative skills, designed to achieve *mathematical literacy* (*Alfabetización Matemática*), this mathematical literacy or competence usually refers to *the analyze, reason and communicate effectively abilities of students when they set out, formulate and solve mathematical problems in a variety of domains and situations*. A good level in the performance of these capabilities shows that a student is mathematically literate and lettered. It also provides a tool for assessing learning in geometry.

Competencia: *Pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado.*

DRAE

1. INTRODUCCIÓN

En el presente artículo se toman en consideración, las ideas sobre *competencia matemática* que se plantean en el RD 1631/2006 de contenidos mínimos de la ESO¹, las consideraciones que en relación a la *alfabetización matemática* se contemplan en la evaluación PISA² y en los Estándares Curriculares de Matemáticas y de Evaluación (NCTM³).

Las competencias básicas, son aquellas que el alumno debe alcanzar al finalizar la etapa educativa. Aparecen definidas por el Real Decreto 1631/2006.

La incorporación de competencias básicas al currículo permite poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos.

Planteamos finalmente una metodología, en un entorno interactivo, encaminada a conseguir la *alfabetización matemática* (*Mathematical Literacy*), dicha alfabetización o competencia matemática general se refiere a *las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones*. Un buen nivel en el desempeño de estas capacidades muestra que un estudiante está matemáticamente alfabetizado o letrado.

2. CURRÍCULO DE ESO Y COMPETENCIAS BÁSICAS

Hay un cambio, al menos formal, en la concepción del currículo, con la incorporación de las competencias básicas.

Se entiende por **currículo** de la Educación Secundaria Obligatoria el conjunto de objetivos, **competencias básicas**⁴, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación⁵ de esta etapa educativa.

En la regulación de las enseñanzas mínimas, tiene especial importancia la definición de las competencias básicas que el alumnado debe alcanzar al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria.

Son aquellas competencias que debe haber desarrollado un joven o una joven al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.

Su logro deberá capacitar a los alumnos y alumnas para su realización personal, el ejercicio de la ciudadanía activa, la incorporación a la vida adulta de manera satisfactoria y el desarrollo de un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.

¹Educación Secundaria Obligatoria

²Programme for International Student Assessment-Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes

³National Council of Teachers of Mathematics

⁴En el Anexo I del del RD 1631/2006 se fijan las competencias básicas que los alumnos y las alumnas deberán haber adquirido al final de esta etapa.

⁵Los criterios de evaluación de las materias serán referente fundamental para valorar tanto el grado de adquisición de las competencias básicas como el de consecución de los objetivos.

Los objetivos⁶ de la Educación Secundaria Obligatoria se definen para el conjunto de la etapa. En cada materia se describe el modo en que contribuye al desarrollo de las competencias básicas, sus objetivos generales y, organizados por cursos, los contenidos y criterios de evaluación. Los criterios de evaluación, además de permitir la valoración del tipo y grado de aprendizaje adquirido, se convierten en referente fundamental para valorar la adquisición de las competencias básicas.

La inclusión de las competencias básicas⁷ en el currículo pretende:

- Integrar los diferentes aprendizajes, tanto informales como formales.
- Permitir a todos los estudiantes integrar sus aprendizajes, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando les resulten necesarios en diferentes situaciones y contextos.
- Orientar la enseñanza, al permitir identificar los contenidos y los criterios de evaluación que tienen carácter imprescindible y, en general, inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Con las áreas y materias del currículo se pretende que todos los alumnos alcancen los objetivos educativos y, consecuentemente, también que adquieran las competencias básicas. Sin embargo, no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de ciertas competencias.

Cada una de las áreas contribuye al desarrollo de diferentes competencias y, a su vez, cada una de las competencias básicas se alcanzará como consecuencia del trabajo en varias áreas o materias.

El trabajo en las áreas y materias del currículo para contribuir al desarrollo de las competencias básicas debe complementarse con diversas medidas organizativas, metodológicas y funcionales, imprescindibles para su desarrollo.

2.1. Ocho competencias básicas. En el marco de la propuesta realizada por la Unión Europea, y de acuerdo con las consideraciones que se acaban de exponer, se han identificado *ocho competencias básicas*:

1. Competencia en comunicación lingüística
2. Competencia matemática
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico
4. Tratamiento de la información y competencia digital
5. Competencia social y ciudadana
6. Competencia cultural y artística
7. Competencia para aprender a aprender
8. Autonomía e iniciativa personal

El currículo se estructura en torno a áreas de conocimiento y es en ellas en las que han de buscarse los referentes que permitirán el desarrollo de las competencias en esta etapa. Así pues, en cada área se incluyen referencias explícitas acerca de su contribución a aquellas competencias básicas a las que se orienta en mayor medida. Tanto los objetivos como la propia selección de los contenidos buscan asegurar

⁶En el Anexo II RD 1631/2006 se fijan los objetivos de las diferentes materias, la contribución de las mismas a la adquisición de las competencias básicas.

⁷Ver Anexo I del RD 1631/2006

el desarrollo de todas ellas. Los criterios de evaluación, sirven de referencia para valorar el progreso en su adquisición.

Competencia matemática. *Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.*

Forma parte de la competencia matemática *la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones*; aspectos que aumentan la posibilidad de poder seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito académico como en el laboral, favoreciendo la participación real en la vida social.

Asimismo esta competencia implica *el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos* (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) *en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información.*

En definitiva, *la competencia matemática supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento* (como la inducción y la deducción, entre otros) *y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos.*

Resumiendo, *supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.*

3. MARCO TEÓRICO DE LA EVALUACIÓN PISA

PISA define así la competencia matemática:

Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y *utilizar y relacionarse con* las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de *la vida de los individuos* como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

Una de las capacidades esenciales que comporta el concepto de competencia matemática es la habilidad de plantear, formular e interpretar problemas mediante las matemáticas en una variedad de situaciones o contextos.

La definición que hace PISA de la competencia matemática concuerda con las teorías más amplias e integradoras sobre la estructura y el uso del lenguaje.

Considerar las matemáticas como un lenguaje implica que los alumnos deben conocer los rasgos estructurales presentes en el discurso matemático (los términos, hechos, signos, símbolos, procedimientos y habilidades) y aprender a utilizar esos conceptos para resolver problemas no rutinarios en una variedad de contextos.

Es importante destacar, que se puede saber mucho sobre los rasgos estructurales de las matemáticas sin que ello suponga que se posee un verdadero conocimiento de la estructura de las matemáticas o que se saben utilizar esos rasgos para resolver problemas.

3.1. Procesos matemáticos: Matemización. La evaluación PISA estudia la capacidad de los alumnos para analizar, razonar y comunicar ideas matemáticas de forma efectiva al plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en distintas situaciones. La solución de problemas requiere que los alumnos hagan uso de las habilidades y competencias que han adquirido a lo largo de su escolarización y a través de sus propias experiencias vitales.

En la evaluación PISA ese proceso fundamental que emplean los alumnos para resolver los problemas que plantea la vida real se denomina *matemización*, que se puede caracterizar atendiendo a cinco aspectos esenciales:

1. *Enunciado del problema en la vida real*

El proceso de matemización se inicia con un problema presente en la realidad

2. *Enunciado del problema en términos matemáticos*

En el segundo paso, *la persona que desea resolver el problema trata de identificar las matemáticas pertinentes al caso y reorganiza el problema según los conceptos matemáticos que han sido identificados.*

3. *Elección del modelo*

Implica una progresiva abstracción de la realidad. Existen diferentes modos de abstraer la realidad, esto es, de formular el problema en términos estrictamente matemáticos eligiendo un determinado modelo.

“Estos tres pasos nos llevan desde el problema del mundo real al problema matemático”.

4. *Resolución del problema dentro del modelo elegido*

Se trata de manipular el modelo mediante los procedimientos adecuados intentando determinar la solución.

5. *Contrastar y verificar la solución en el mundo real*

El quinto paso supone responder a la pregunta: qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo real.

En la Figura 1 se recogen los cinco pasos o aspectos fundamentales del proceso de Matemización.

3.2. Organización del área de Matemáticas. PISA. Para una mejor organización y descripción del área de Matemáticas, se consideran tres componentes:

1. *Las situaciones o contextos* en que se sitúan los problemas. La situación es la parte del mundo del estudiante en la que se localizan las tareas que

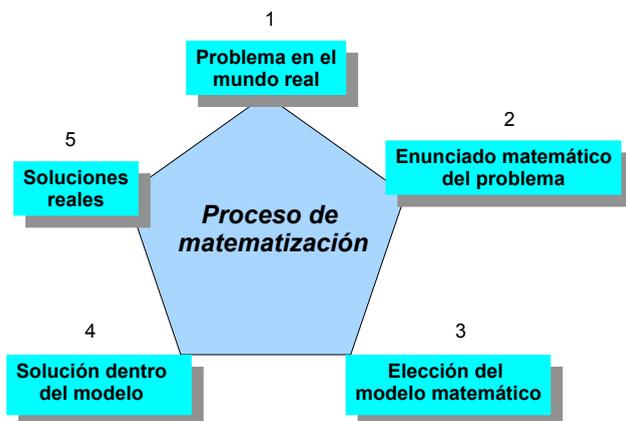


FIGURA 1. El ciclo de la matematización.

se le plantean, la situación más cercana al alumno es su propia vida personal. Se definen y utilizan cuatro tipos de situaciones: *personal, educacional/profesional, pública y científica*.

2. *El contenido matemático* que hay que utilizar para resolver los problemas y que se organiza de acuerdo con ciertas ideas clave. Viene determinado por los distintos tipos de problemas que surgen de la interacción con los fenómenos de la vida cotidiana y que se basan en una determinada concepción sobre la manera en que los contenidos matemáticos se presentan a las personas. Las ideas clave elegidas reflejan el punto de vista de contemplar las matemáticas como una ciencia de las regularidades, que en los ámbitos del *espacio y la forma, el cambio y las relaciones y la cantidad* serían conceptos esenciales de cualquier descripción de las matemáticas y formarían parte del núcleo de cualquier currículo en todos los niveles educativos. Además es necesario considerar el campo de la incertidumbre desde una perspectiva matemática y científica. De esta manera, la teoría de la probabilidad y la estadística dan lugar a la cuarta idea clave: *la incertidumbre*.

Conjuntamente, estas cuatro ideas clave (Espacio y Forma, Cambio y Relaciones, Cantidad e Incertidumbre) toman en consideración el desarrollo histórico, el área de contenido y recogen los elementos básicos de los currícula escolares, dando lugar cada una de ellas a una categoría.

Si contemplamos este enfoque desde el punto de vista curricular que suelen seguir la mayoría de los centros educativos, posiblemente resulte un poco extraño; sin embargo en su conjunto, las ideas clave engloban en toda su amplitud los temas matemáticos que se espera que aprendan los estudiantes.

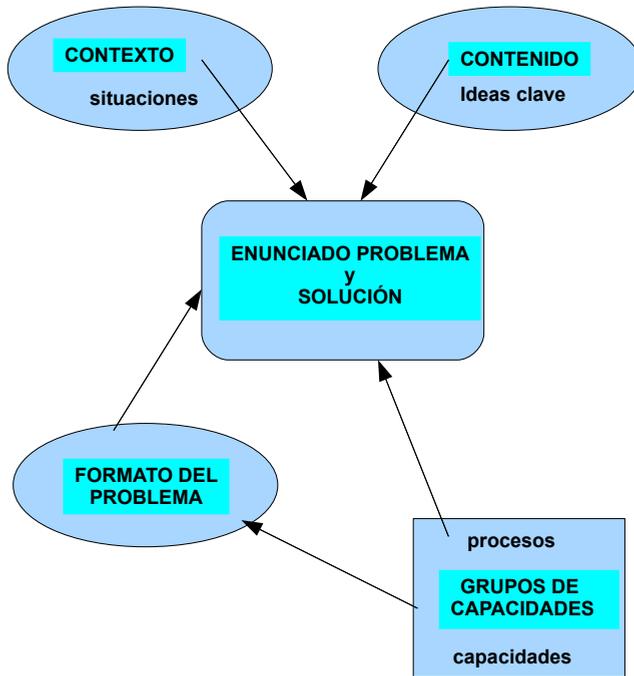


FIGURA 2. Elementos del área de matemáticas.

En la Figura 2, las ideas clave aparecen representadas en la parte superior derecha del diagrama. A partir de ellas, se extraen los contenidos que se utilizan para resolver un problema.

Las flechas que enlazan los recuadros del contexto y el contenido con el del problema muestran el modo en que el mundo real (incluidas las matemáticas) conforma un problema.

3. *Capacidades*. Para referirse a los procesos matemáticos que aplican los alumnos al tratar de resolver problemas se emplea el término *capacidades matemáticas*. Tres grupos de capacidades condensan los distintos procesos cognitivos necesarios para resolver los diversos tipos de problema.
 - cálculos sencillos o definiciones del tipo más habitual en los exámenes escolares,
 - conexiones que deben establecerse entre ideas y procedimientos para resolver problemas comunes,
 - razonamientos, generalizaciones y comprensión de conceptos, que exigen de los alumnos la realización de análisis, la identificación de los elementos matemáticos de una situación y el planteamiento de sus propios problemas.

Las capacidades, deben activarse para establecer conexión entre el mundo real donde se generan los problemas y las matemáticas, para de esa forma poder resolver los problemas.

El ámbito de los procesos de este marco aparece representado primero en el cuadrado grande, donde figuran las capacidades matemáticas generales, y luego en el cuadrado más pequeño, que representa los tres grupos de capacidades.

Las capacidades específicas que requiere la solución de un problema dependerán de la naturaleza del problema y se verán reflejadas en la solución que se dé al mismo. La flecha que va desde los grupos de capacidades al enunciado del problema y solución, representa las interacciones entre ellos

Es importante señalar que las tres componentes que se acaban de describir son de distinta naturaleza, constituyendo *las capacidades el núcleo mismo del concepto de competencia matemática*. Únicamente los estudiantes que dispongan de determinadas capacidades se encontrarán en condiciones de resolver con éxito los problemas que se les planteen. Evaluar la competencia matemática supone, por tanto, determinar hasta qué punto poseen los alumnos una serie de capacidades matemáticas concretas que puedan aplicar de forma productiva a aquellas situaciones que llevan implícito un problema.

3.3. Procesos matemáticos: Matematización. La resolución de problemas requiere que los alumnos hagan uso de las habilidades y competencias que han adquirido a lo largo de su escolarización y a través de sus propias experiencias vitales.

En la evaluación PISA ese proceso fundamental que emplean los alumnos para resolver los problemas que plantea la vida real se denomina **matematización**. En el apartado 3.1 que se ocupaba de las bases teóricas del marco PISA de evaluación de las matemáticas se esbozaba una descripción de la matematización en cinco pasos. En la Figura 1 se recogen esos pasos.

3.4. Capacidades–Competencias. Un individuo que tenga que emplear de forma satisfactoria la matematización dentro de una gran variedad de situaciones y contextos, intra y extramatemáticos, necesita poseer una serie de capacidades matemáticas que, tomadas en su conjunto, conforman el concepto superior de competencia matemática.

Cada una de estas capacidades puede dominarse en mayor o menor grado. Las distintas fases del proceso de matematización recurren a estas capacidades de un modo diferente.

Para identificar y analizar estas capacidades, PISA ha optado por recurrir a ocho capacidades matemáticas características que, en su forma actual, se basan en la obra de Niss (1999) y de sus colegas daneses.

1. *Pensamiento y razonamiento*. Consiste en plantear preguntas características de las matemáticas: “¿Hay...?”, “En tal caso, ¿cuántos...?”, “¿Cómo

- puedo hallar...?”); conocer los tipos de respuesta que las matemáticas ofrecen a esas preguntas; distinguir entre distintos tipos de asertos (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionales); y comprender y saber manejar el alcance y los límites de los conceptos matemáticos que hagan al caso.
2. *Argumentación.* Comporta entender en qué consisten las pruebas matemáticas y qué las diferencia de otro tipo de razonamientos matemáticos; seguir y evaluar cadenas de argumentaciones matemáticas de distintos tipos; tener un sentido heurístico («¿Qué puede o no puede suceder y por qué?»), así como crear y expresar argumentaciones matemáticas.
 3. *Comunicación.* Consiste en la capacidad de expresarse de muy diversas maneras sobre temas de contenido matemático, tanto de forma oral como escrita, así como comprender las afirmaciones orales o escritas expresadas por otras personas sobre esas mismas materias.
 4. *Construcción de modelos.* Comporta estructurar el campo o la situación para la que se ha de elaborar un modelo; traducir la realidad a estructuras matemáticas; interpretar modelos matemáticos en función de la realidad; trabajar con modelos matemáticos; validar un modelo; reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados; comunicar opiniones sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las propias limitaciones de tales resultados); y supervisar y controlar el proceso de construcción de modelos matemáticos.
 5. *Planteamiento y solución de problemas.* Consiste en plantear, formular y definir distintos tipos de problemas matemáticos (por ejemplo, problemas «puros», «aplicados», «abiertos» y «cerrados»), así como la capacidad de resolver diversos tipos de problemas matemáticos de distintas maneras.
 6. *Representación.* Comporta la capacidad de descodificar, codificar, traducir, interpretar y distinguir distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticas; las interrelaciones que existen entre las diversas representaciones; y la elección y alternancia entre distintos tipos de representación según las situaciones y objetivos.
 7. *Utilización de operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico.* Comporta descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico; comprender sus relaciones con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal; hacer uso de expresiones y asertos que contengan símbolos y fórmulas; emplear variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
 8. *Empleo de material y herramientas de apoyo.* Comporta conocer y saber emplear toda una serie de materiales y herramientas de apoyo (incluidas las herramientas de las tecnologías informáticas) que pueden contribuir a la realización de la actividad matemática, así como conocer las limitaciones de dichos materiales y herramientas.

Para poder describir y presentar las capacidades de los estudiantes, así como sus puntos fuertes y débiles, es necesario adoptar cierto tipo de estructura. Una de las formas de lograrlo, consiste en definir una serie de grupos de capacidades basados en el tipo de exigencias cognitivas que se requieren para resolver los distintos tipos de problemas matemáticos.

3.4.1. *Grupos de capacidades: Variables y niveles de complejidad.* Para describir las actividades cognitivas que engloban estas capacidades, PISA ha optado por elaborar **tres grupos de capacidades**: el grupo de *reproducción*, el grupo de *conexiones* y el grupo de *reflexión*. Seguidamente se definen los tres grupos de capacidades y se tratan las distintas formas de interpretar cada una de las capacidades dentro de los grupos.(Figura 3).

REPRODUCCIÓN	CONEXIÓN	REFLEXIÓN
<ul style="list-style-type: none"> • Contextos familiares • Conocimientos ya practicados • Aplicación de algoritmos estándar • Realización de operaciones sencillas • Uso de fórmulas elementales. 	<ul style="list-style-type: none"> • Contextos menos familiares • Interpretar y explicar • Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación • Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios 	<ul style="list-style-type: none"> • Tareas que requieren comprensión y reflexión • Creatividad • Ejemplificación y uso de conceptos • Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos • Generalizar y justificar resultados obtenido

FIGURA 3. Grupos de capacidades según complejidad.

- *El grupo de reproducción.* Comportan básicamente la reproducción de conocimientos que ya han sido practicados. Incluyen, por tanto, los tipos de conocimiento que suelen practicarse en las evaluaciones estándar y en las pruebas escolares. Entre estas capacidades se cuentan el conocimiento de los hechos y de las representaciones de problemas más comunes, la identificación de equivalentes, el recuerdo de objetos y propiedades matemáticas conocidas, la utilización de procesos rutinarios, la aplicación de algoritmos y habilidades técnicas estándar, el manejo de expresiones que contienen símbolos y fórmulas conocidas o estandarizadas y la realización de operaciones sencillas.
- *El grupo de conexiones.* Las capacidades del grupo de conexiones se cimantan sobre la base que proporcionan las capacidades del grupo de *reproducción*, pero abordan ya problemas cuyas situaciones no son rutinarias, aunque sigan presentándose en unos marcos familiares o casi familiares.
- *El grupo de reflexión.* Para este tipo de capacidades, se requiere que el alumno aporte un elemento de reflexión sobre los procesos que se necesitan o se emplean en la resolución de un problema. Están por tanto relacionadas con las estrategias de resolución de los estudiantes.

Una completa descripción de estos grupos de capacidades así como ejemplos de ejercicios pueden encontrarse en PISA(2005). Los datos empíricos muestran mayor riqueza de niveles que el planteamiento teórico en tres categorías. Los mejores alumnos muestran en su actividad distintos niveles (véase la Figura 4)

Niveles Competencias	1	2	3	4	5	6
Pensar y razonar	Responder a cuestiones en contextos muy conocidos		Responder a cuestiones en contextos poco familiares		Responder a cuestiones complejas en multitud de contextos	
Argumentar y Justificar				Elaborar argumentos basados en acciones	Formular razonamientos desarrollados	Elaborar argumentos desde su propia reflexión
Comunicar	Describir resultados obtenidos	Realizar explicaciones sencillas			Comunicar conclusiones con precisión	
Modelizar				Usar modelos explícitos en situaciones concretas	Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones	
Resolver problemas	Resolver con datos sencillos		Seleccionar y aplicar estrategias sencillas		Seleccionar, comparar y evaluar estrategias	Generalizar resultados de problemas
Representar	Leer datos de tablas o figuras	Usar un único tipo de representación	Conocer y usar diferentes sistemas	Vincular diferentes sistemas, incluido el simbólico		Relacionar y traducir con fluidez diferentes sistemas
Lenguaje Simbólico	Realizar operaciones básicas	Usar algoritmos y fórmulas elementales	Aplicar procedimientos descritos con claridad	Representar por símbolos situaciones reales		Dominar con rigor el lenguaje simbólico

FIGURA 4. Niveles según grado de complejidad.

4. LOS ESTÁNDARES CURRICULARES DE MATEMÁTICAS Y DE EVALUACIÓN

La toma de decisiones en nuestra vida cotidiana es un hecho natural, debemos decidir entre múltiples decisiones, eligiendo aquella que más nos beneficia; es necesario utilizar numerosas herramientas, que exigen unas determinadas competencias de cálculo y conocimiento matemático y un determinado nivel de comprensión matemática, en definitiva estamos en un mundo matemático. El nivel de razonamiento matemático y la capacidad de resolución de problemas necesario en el lugar de trabajo han aumentado de manera espectacular. La falta de competencia matemática elimina muchas posibilidades de encontrar un buen trabajo.

En una sociedad democrática debemos posibilitar que todos los estudiantes que acceden a nuestras aulas sean capaces de utilizar las matemáticas en su vida personal y en su lugar de trabajo, de acuerdo con las nuevas exigencias de la Sociedad de la Información, independientemente de las diferentes capacidades, necesidades e intereses. Todos los estudiantes deberían tener la oportunidad de entender el poder y la belleza de las matemáticas. Los estudiantes necesitan aprender un nuevo conjunto de conceptos básicos de matemáticas que les permitan calcular con fluidez y resolver problemas con creatividad.

Los Estándares de Matemáticas describen un proceso en el que posibilita que todos los estudiantes tengan acceso a una enseñanza de las matemáticas rigurosa y de alta calidad.

Se pueden considerar a los Estándares como una respuesta de la comunidad educativa matemática a los nuevos retos de la sociedad, planteando reformas y nuevas exigencias en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas con dos claras tareas:

1. Plantear una visión coherente de lo que significa poseer cultura matemática en la Sociedad de la Información, donde la matemática se desarrolla vertiginosamente y aumentan día a día sus aplicaciones a los más diversos campos.
2. Crear un conjunto de estándares para guiar la revisión del currículo matemático escolar y la evaluación asociada a esta posición.

Currículo. Es un plan operativo que detalla *qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, cómo deben alcanzar los alumnos estos objetivos curriculares, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen su conocimiento matemático y el contexto en el que se desarrolla el proceso enseñanza-aprendizaje.*

Evaluación. Se pretende evaluar tanto el desarrollo académico del alumno como el el programa curricular, poniendo el foco de interés en la información que las medidas de evaluación proporcionan al profesorado para llevar a cabo acciones posteriores de mejora.

Estándar. Es una afirmación–declaración que puede ser utilizada para juzgar la calidad de un currículo matemático o de métodos de evaluación. Así, los estándares son declaraciones de principios sobre qué tiene valor y qué no lo tiene.

Una gran parte de los países desarrollados han experimentado un cambio desde la sociedad industrial a la sociedad de la información, que ha originado que las exigencias de conocimientos matemáticos de los estudiantes sean distintas, planteando también una evolución de los objetivos sociales de la educación, que exigen trabajadores con educación matemática, aprendizaje continuo, oportunidad para todo el mundo, y un electorado bien informado, de manera que el sistema escolar proporcione a todos los ciudadanos recursos para toda la vida.

Las nociones tradicionales de competencia matemática elemental se han visto superadas por exigencias cada vez mayores en cuanto a las destrezas y conocimientos que deben poseer los trabajadores para afrontar los retos del presente y del futuro, en particular la formación matemática de los trabajadores es otra y muy distinta de la necesaria no hace mucho tiempo; como competencias más destacables y de modo resumido, en cuanto a la formación matemática, citamos las siguientes:

- Contemplar las matemáticas como una herramienta para resolver problemas de la vida real
- Capacidad para enfrentarse a problemas abiertos.
- Capacidad para modelizar la realidad a través de las matemáticas
- Capacidad para plantear y resolver problemas con diversas técnicas
- Capacidad de trabajar de forma colaborativa en la resolución de problemas

En definitiva, se trata de garantizar a todos los estudiantes la oportunidad de poseer la cultura matemática mínima y las competencias matemáticas correspondientes que les permitan desenvolverse en la sociedad de la información

Los fines educativos, por tanto, han de tener en cuenta la importancia de la instrucción matemática. Con este propósito, los estándares establecen cinco fines generales para todos los estudiantes:

1. que aprendan a valorar la matemática
2. que se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas
3. que lleguen a resolver problemas matemáticos.
4. que aprendan a comunicarse mediante las matemáticas.
5. que aprendan a razonar matemáticamente.

Si los alumnos realizan las experiencias que se describen en los Estándares, estarán adquiriendo la capacidad de explorar, formular hipótesis y razonar lógicamente, así como la capacidad de usar de forma efectiva diversos métodos matemáticos para resolver problemas imprevistos (*potencia matemática*). Esta noción se basa en el reconocimiento de que *la matemática es algo más que un conjunto de conceptos y destrezas que hay que dominar; también comporta métodos de investigación y razonamiento, medios de comunicación y nociones sobre su contexto*. Además, la potencia matemática supone para todo individuo un desarrollo de la confianza en sí mismo.

De acuerdo entonces con esta idea, debemos considerar el aula como un espacio de exploración de problemas mediante las matemáticas. Los alumnos estudiarían básicamente la misma matemática que se ha enseñado tradicionalmente pero con un enfoque distinto, incidiendo en algunas partes de la matemática a las que, en general, se les ha dado poca importancia en las escuelas y que potencian habilidades de índole general (razonamiento, comunicación, conexiones, . . .)

En definitiva, *la intención de estos objetivos es que los estudiantes se conviertan en personas matemáticamente instruidas*. Esta expresión denota la capacidad de un individuo para explorar, formular hipótesis y razonar lógicamente, así como usar de forma efectiva un determinado número de métodos matemáticos para resolver problemas. Se trata por tanto de integrar básicamente tres características de las matemáticas.

En primer lugar, «saber» matemáticas es «usar» las matemáticas.

En segundo lugar, como las matemáticas son una materia básica para otras disciplinas, en el desarrollo del currículo se deben ofrecer oportunidades para que todos los estudiantes desarrollen una comprensión de modelos, estructuras y simulaciones matemáticas que sean aplicables en muchas áreas de conocimiento.

En tercer lugar, tomar en consideración que la Sociedad de la Información y la ampliación de las áreas donde se utilizan las matemáticas han provocado un crecimiento y un cambio de las mismas matemáticas, es decir, que las propias matemáticas y los cambios tecnológicos son uno de los entornos generadores de nuevas matemáticas.

De hecho, existen dos fuentes inagotables de cuestiones matemáticas nuevas. Una fuente es el desarrollo de la ciencia y la tecnología, que continuamente le piden

ayuda a las matemáticas. La otra fuente es la matemática misma. No obstante, la disponibilidad de calculadoras, ordenadores y otras tecnologías no supone por sí sola que los alumnos adquieran una cultura matemática, pues estos medios constituyen herramientas que simplifican el trabajo rutinario y lo facilitan, pero no resuelven los problemas. Por tanto, las matemáticas escolares se deben basar en las matemáticas básicas que van a necesitar los estudiantes, y no sólo en adquirir destrezas tecnológicas. En cualquier caso, es preciso señalar, que es necesario el aprendizaje de los algoritmos. Los cálculos aproximados pueden, y deben, usarse en combinación con procedimientos que ofrezcan respuestas exactas para anticiparse a cualquier resultado y poder juzgar su validez.

Las actividades que realicen los estudiantes deberían surgir de situaciones de problema, teniendo en cuenta que los aprendizajes genuinos, se producen con una implicación activa por parte de los estudiantes.

El énfasis que hace la enseñanza tradicional en la manipulación de expresiones y la práctica de algoritmos como pasos previos a la resolución de problemas no tiene en cuenta el hecho de que el conocimiento surge a menudo de los mismos problemas. Por consiguiente, podría ser necesario un cambio en las estrategias docentes actuales; el conocimiento debería surgir con frecuencia de la experiencia directa con los problemas.

4.1. Una propuesta para las matemáticas escolares. Una propuesta de Matemáticas Escolares, como la llevada a la práctica en EE.UU. y descrita en los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1991, 2000, 2003), presenta cuatro estándares curriculares en todos los niveles de enseñanza no universitaria:

- *Las matemáticas como resolución de problemas.*
- *Las matemáticas como comunicación.*
- *Las matemáticas como razonamiento.*
- *Las conexiones matemáticas.*

Se observa que existe una clara correspondencia entre estos estándares (juicios de valor) y los criterios asumidos por las autoridades académicas españolas sobre la enseñanza de las matemáticas.

Para una visión completa de **los objetivos** que se plantean con estos estándares (ver Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1991, 2000, 2003))

5. UNA METODOLOGÍA PARA POTENCIAR COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y COMUNICATIVAS

En el nuevo escenario educativo que, con la llegada y masiva utilización de las TIC, ha aparecido, en la llamada Sociedad de la Información, una forma de planificar y elaborar actividades y desarrollar proyectos colaborativos, en el proceso de enseñanza aprendizaje, en los que utilizando estas herramientas se enriquece el proceso formativo individual a través de una construcción social del conocimiento. Establecemos una metodología de trabajo y de análisis que permite potenciar y

estudiar la competencia comunicativa en matemáticas y la competencia geométrica, en un entorno interactivo de aprendizaje soportado por medios informáticos y por TIC, en el que el trabajo se organiza de modo colaborativo, diseñamos los correspondientes instrumentos de análisis e ilustramos su utilización.

La participación activa y efectiva de los alumnos, potenciada por las TIC, fomenta el trabajo colaborativo entre ellos de manera que asumen parte de la responsabilidad de su aprendizaje desarrollando algunas de las funciones que en la enseñanza tradicional están reservados al profesor.

Estos cambios que planteamos en la estructura y el funcionamiento de las enseñanzas, pueden ser entendidos como instrumentos necesarios para una mejora de la calidad de la enseñanza y como una adecuación a las exigencias de la sociedad del conocimiento, de manera que la nueva organización de la actividad docente permita abordar con éxito los desafíos derivados de la innovación en las formas de generar y transmitir el conocimiento.

La importancia de desarrollar la capacidad de comunicarse matemáticamente y del papel del lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas, se ve reflejado tanto en numerosas investigaciones de Didáctica de las Matemáticas (Godino 2001, Nesher 2000, Duval 2001...), como en las orientaciones curriculares de muchos países, en particular en el RD 1631/2006.

5.1. El aprendizaje como actividad social: El modelo de trabajo colaborativo. Siguiendo la línea del constructivismo social, consideramos que si bien el aprendizaje es en principio una actividad individual y personal, ésta no se produce sin las interacciones con los demás.

El saber se contempla como una construcción social. El conocimiento matemático que se enseña en la institución escolar es exterior y anterior al aprendiz, pero sólo se producirá el aprendizaje en la medida que éste sea capaz de interiorizarlo y dotarlo de significado personal. Aquí radica la importancia de los medios y de los procesos que se pongan en juego para poner a los alumnos en contacto con el saber, posibilitando la deconstrucción del saber existente y su posterior reconstrucción por el sujeto que lo aprehende, y es precisamente aquí, en el proceso de apropiación, donde las interacciones sociales juegan un papel fundamental; puesto que la apropiación colectiva puede preceder a la apropiación individual y los conflictos sociocognitivos pueden acelerar ciertas adquisiciones.

En el trabajo colaborativo, la necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento. Los momentos de interacción permiten a los alumnos tomar conciencia del grado de dominio adquirido pero también reconocer lo que todavía no logran hacer solos y los medios de los que disponen para alcanzar ese objetivo.

Estos cambios en la estructura y el funcionamiento de la enseñanza, permiten no sólo una mejora en la calidad de la enseñanza sino también una adecuación a las exigencias de la sociedad del conocimiento, a través de formas de planificar y elaborar actividades y desarrollar proyectos educativos utilizando estas herramientas, que enriquecen el proceso individual a través de una construcción social del conocimiento.

En el diseño e implementación del entorno de aprendizaje, hemos planteado una metodología de trabajo en la que el alumno participa formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento y en el desarrollo de competencias. La función del profesor es intentar modular y guiar el proceso. Para describir esta función, emplearemos el concepto de “andamiaje”; acuñado por Bruner y colaboradores (1975) y retomado por Vygostky (1978), que consideraba que “*las interacciones guiadas por adultos podían ayudar a los niños a desarrollar funcionamiento psicológico superior y que la asistencia de un adulto permitía al niño operar en la zona de desarrollo próximo*”, área situada entre el nivel de lo que un niño puede conseguir por sí solo y el nivel que el mismo niño puede alcanzar con asistencia.

Así, el profesor es quien realiza “*parte de la tarea que el estudiante todavía no puede manejar y le proporciona soporte en forma de sugerencias o ayuda, basadas en una diagnosis correcta del nivel actual del alumno en cuanto a destrezas o dificultades*”.

El andamiaje es un modo cooperativo de resolución de problemas de profesor y alumnos, en el que el soporte se modifica gradualmente hasta que los alumnos se hace cargo de lo suyo y finalmente la ayuda del profesor se desvanece.

El diseño y control de los entornos de aprendizaje debe contribuir a este andamiaje; proporcionando en cada momento más que los aportes necesarios los mínimos necesarios, de manera que se potencia el desarrollo óptimo de los alumnos.

5.2. Geometría y Educación Secundaria. Respecto a la importancia y las ventajas del trabajo sobre Geometría, destacamos que el trabajo geométrico favorece el complejo proceso de interrelaciones entre conceptos, símbolos y objetos reales; permite comprender, recordar, comunicar en relación a los conceptos, construir conceptos nuevos, visualizar, traducir, clasificar, experimentar, aproximarnos al concepto de demostración y promueve además el intercambio, el desarrollo de la creatividad, la crítica y la reflexión.

“Es la complejidad cognitiva subyacente la que proporciona el interés básico de la geometría (...) La geometría, más allá que otras áreas matemáticas, puede ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento. Esta debe ser una tarea esencial para la enseñanza de la geometría. Pero se requiere obtener una práctica amplia y bien balanceada de estos procesos cognitivos subyacentes” (Duval, 2001: pp. 13-14).

5.3. Comunicación y Matemáticas. Como ya hemos señalado anteriormente, la importancia de desarrollar la capacidad de comunicarse matemáticamente y del papel del lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas, se ve reflejado tanto en numerosas investigaciones de Didáctica de las Matemáticas (Godino 2001, Nesher 2000, Duval 2001...), como en las orientaciones curriculares de muchos países. Según los NCTM:

“Organizar y consolidar su pensamiento a través de la comunicación; comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas; analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás y usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión”.

“A medida que los estudiantes van desarrollando una comunicación más clara y coherente (utilizando explicaciones verbales y notaciones y representaciones matemáticas apropiadas), se van convirtiendo en mejores pensadores matemáticos” (NCTM, 2000)

El RD 1631/2006, que establece los contenidos mínimos para la ESO, afirma: *“Las Matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística ya que son concebidas como un área de expresión que utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas. . . El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto” (MEC, 2006: (pp. 677-773).*

El lenguaje matemático, el geométrico en particular, constituye un sistema muy complejo dado su carácter mixto; mixto en el sentido de que incluye un lenguaje natural y un lenguaje simbólico específico en permanente interacción y que a su vez también contiene registros semióticos no lingüísticos como son los gráficos (figuras, diagramas, representaciones geométricas).

Varios investigadores han estudiado en particular, las conexiones entre el discurso escrito y las matemáticas: el discurso escrito como soporte del aprendizaje matemático con alumnos (Morgan, 1998), el discurso escrito y la reflexión crítica (Powell, 1995, 2001), el discurso escrito y las posibilidades de reflexión en la formación del profesorado de matemáticas (Almeida, 2002; Menezes Freitas y Fiorentini, 2004). Si bien, casi todas las investigaciones se centran en la producción de textos escritos en clases presenciales; es cierto que últimamente, ha cobrado importancia el discurso escrito en entornos virtuales, utilizado éste como herramienta para las teleinteracciones con alumnos; especialmente en casos de alumnos deportistas (Figueiras, 2000) o en asistencia hospitalaria (Fortuny y Jiménez, 2000).

Nesher (2000) distingue entre dos acciones: “hablar matemáticamente” y “hablar de matemáticas”. Con el término “hablar matemáticamente” se refiere a usar el lenguaje matemático, aplicándolo a variados contextos, pero teniendo en cuenta su propia sintaxis. Con la expresión “hablar de matemáticas”, se hace referencia al hecho de utilizar el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas. Creemos que esta modalidad comunicativa, favorece el desarrollo de la competencia comunicativa en Matemáticas en particular y la mejora de las capacidades geométricas en general, en tanto que propicia la interacción, el intercambio y la reflexión.

Coincidimos con Nesher en que cuando los alumnos producen este tipo de argumentos, utilizando el lenguaje natural como metalenguaje, desarrollan aprendizaje

matemático; en particular cuando los alumnos comunican sus estrategias geométricas en este modo mixto, desarrollan aprendizaje geométrico.

En nuestro caso, adaptando la expresión “hablar de matemáticas” propuesta por Nesher, a la de “escribir de geometría” para referirnos al proceso de producción de discursos –escritos– en los que los alumnos explican, justifican, describen el procedimiento que han llevado a cabo para la resolución de problemas, empleando el lenguaje natural como metalenguaje.

Debido al formato “enseñanza bimodal”⁸ que implementamos, la producción de discursos escritos juega un rol superador al de “tarea escolar” ya que adquiere una dimensión comunicativa real e imprescindible en las interacciones profesor–alumno y alumno–alumno.

5.4. Metodología. A continuación, una breve descripción de la metodología de trabajo con los alumnos y de análisis del aprendizaje de la Geometría.

Las clases se desarrollan en un aula de Informática, cuyos ordenadores cuentan con programa Cabri, con acceso a Internet y con un navegador.

En el desarrollo diferenciamos tres fases o etapas que denominamos: “*etapa presencial*”, “*etapa correo electrónico*” y “*etapa foro electrónico*”. Dichas etapas, aparecen cronológicamente en el orden en que se han mencionado; no obstante la aparición de una no supone la finalización de la anterior sino que en muchos casos coexisten.

En la primera fase, “*etapa presencial*”, se trabaja con los alumnos sobre el manejo del entorno interactivo y del software correspondiente. Pretendemos que los alumnos aprendan a utilizar el programa y el entorno, a través de la resolución de problemas geométricos de diversa índole (en cuanto a la complejidad y en cuanto a las temáticas geométricas abordadas). Las actividades, se proponen por escrito y las clases son coordinadas por un “*profesor presencial*” que acompaña a los alumnos en el aula.

En una segunda fase, “*etapa correo electrónico*”, se incorpora a las clases, una nueva figura, la del “*profesor virtual*”, y con él una dinámica de trabajo diferente y la necesidad de manejar no sólo Cabri como parte del entorno de aprendizaje y la Geometría como tema, sino también una manera de comunicación e interacción diferente.

En la tercera etapa, “*etapa foro electrónico*”, la dinámica vuelve a cambiar y las interacciones vuelven a incrementarse dado que las actividades se plantean a través de un foro en el que participan alumnos y profesor. En estas dos últimas etapas, los intercambios están mediados exclusivamente por las TIC; se producen a través del correo electrónico, del foro y de la página Web del Proyecto; lo que supone aprender a utilizar esta nueva herramienta para comunicarse. Esta modalidad de comunicación alumno–profesor y alumno–alumno, incluye tanto las actividades como sus resoluciones, las consultas de dudas o solicitudes de ayudas, las réplicas y contrarréplicas e incluso los comentarios personales.

En relación a las actividades propuestas, se establece en las mismas un sistema de “*ayudas progresivas y diversificaciones*” –atender a la diversidad no consiste

⁸Enseñanza presencial y virtual.

en fijar un nivel medio para desarrollar en el curso sino en plantear un entorno que permita, estratégicamente, que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, que cada uno evolucione a partir de su nivel inicial, optimizando su aprendizaje; pero todo esto sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por cada alumno—. así como la idea de *“itinerario de resolución”*.

“Todos los alumnos, independientemente de sus características y circunstancias personales, deben tener oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas. La igualdad no significa que todos deban recibir idéntica instrucción; por el contrario, exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas para proporcionar la posibilidad a todos los estudiantes de obtener logros.” (NCTM, 2000). En el sistema diseñado, todos los alumnos parten de un mismo enunciado, planteado para poner en juego ciertos conceptos y destrezas y que tiende a desarrollar ciertas competencias; pero dicho enunciado inicial se irá adaptando a cada resolutor.

Las “ayudas progresivas” son orientaciones docentes que se administran gradualmente cuando el enunciado inicial no es asequible para el alumno y pretenden convertir dicho enunciado en uno abordable de tal manera que el alumno sea capaz de resolver la actividad. Una ayuda puede consistir, según el caso, en recordar una definición, realizar una sugerencia, proponer un procedimiento, formular una nueva pregunta, reformular la pregunta inicial, aportar un dibujo, etc. Estas ayudas se van aportando gradualmente porque, como hemos mencionado, pretendemos que sean las necesarias pero también las suficientes para resolver el problema. La cantidad y el tipo de ayudas, así como el momento en que se aportan, dependen de cada alumno y cada actividad.

A través de las “diversificaciones” de la actividad inicial, el profesor propone a cada alumno diferentes niveles de profundidad, complejidad y formalización. Las diversificaciones se proponen una vez que la actividad propuesta inicialmente, ya ha sido resuelta correctamente por el alumno. Una diversificación puede consistir en la generalización de resultados, en la demostración de la propiedad involucrada en la resolución, en el análisis de otros casos, en la expresión simbólica de algún resultado, etc. Al igual que las ayudas, las diversificaciones también se van incorporando gradualmente y la cantidad, tipo y momento en que se aportan, dependen de cada alumno.

Con este sistema de “ayudas progresivas y diversificaciones”, cada alumno, sigue su propio itinerario de resolución; todos cumplen con las expectativas básicas propuestas para una actividad que se vuelve asequible a cada resolutor pero también, cada alumno desarrolla al máximo sus potencialidades respecto a ella. Existe un recorrido mínimo realizado por todos, cumpliendo así con las pautas curriculares mínimas planteadas, pero también damos una respuesta a la atención a la diversidad, de manera tal que se permite a cada uno alcanzar el nivel de profundización y formalización más conveniente.

Logramos de esta manera que, en cada momento, todos los alumnos estén trabajando sobre la misma actividad (sobre los mismos contenidos), y evitamos así que los que terminan más rápido avancen hacia otras actividades o tengan que esperar

equiparando sus tiempos al de los que trabajan un poco más lento, tiempo que también pretendemos respetar.

Llamamos “*itinerario de resolución*” a la secuencia recorrida por un alumno en la resolución de una actividad dada, teniendo en cuenta las ayudas que fueron necesarias y las diversificaciones que fueron posibles en cada caso.

Así, si bien el enunciado inicial de las actividades se corresponde en principio con el de “*problemas abiertos*”, como dichos enunciados se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través del sistema de ayudas progresivas y diversificaciones, puede resultar que, según el itinerario de resolución recorrido, una misma actividad termine convirtiéndose en “*problema de aplicación*” o en “*ejercicio algorítmico*” para distintos alumnos (Alsina y otros, 1997).

El análisis del itinerario de resolución recorrido por el alumno, aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de Aprendizaje de la Geometría, estableciendo qué tipo de actividad ha resultado de cada enunciado en cada caso, y evaluar la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

5.4.1. El enfoque por competencias. Hemos asumido, como parte de la metodología de trabajo con los alumnos, el enfoque por competencias:

“El concepto de competencia en el proyecto PISA/ OCDE pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso.” (Rico, 2003: 89-102).

El enfoque por competencias resulta superador del enfoque por objetivos en la medida en que permite evitar la compartimentación artificial de los aprendizajes. Esta perspectiva “*proporciona referencias adaptadas a todos los que quieran tener en cuenta la complejidad de la relación didáctica que supone el hecho de considerar, en el aprendizaje de las matemáticas, los procesos comunicativos –estrategias compartidas con el uso de la lengua natural, del lenguaje matemático y de la argumentación–, el razonamiento, la abstracción, la resolución de problemas, etc.*” (Cobo y Fortuny, 2005: 55-70).

Este enfoque resulta apropiado para dar respuesta al desafío de atender a la diversidad en el aula (véase Figura 5).

5.4.2. Criterio utilizado para la organización de las secuencias de actividades. Las actividades, cumplen ciertas condiciones, para adaptarse a cada una de las tres etapas del proceso y sus correspondientes modalidades comunicativas y para responder al sistema de ayudas progresivas y diversificaciones que hemos propuesto para atender a la diversidad de manera que cada alumno pueda recorrer el “*itinerario de resolución*” más conveniente. Además, hemos asumido ciertos criterios relacionados con el orden en que éstas se presentan, la manera en que se seleccionan a la hora de construir una secuencia didáctica: Las actividades que forman parte de cada una de las secuencias propuestas a los alumnos guardan un orden que respeta criterios de complejidad creciente y resulta acorde a los contenidos y objetivos que se pretenden desarrollar, pero entre unas y otras, se intercalan otras actividades que involucran otros conceptos y procedimientos geométricos; es decir

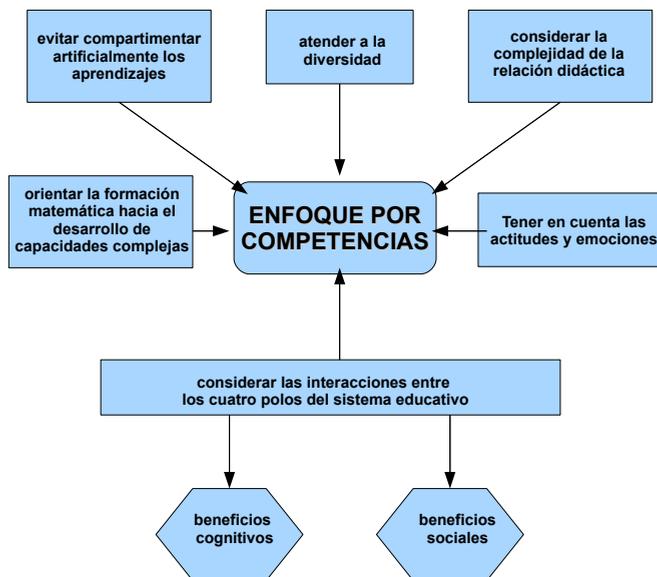


FIGURA 5. Enfoque por competencias.

las actividades seleccionadas para el desarrollo y estudio de un núcleo temático no se presentan de manera consecutiva. La razón de esta “decisión didáctica” radica en el hecho sabido de que los alumnos “aprenden” durante su escolaridad a tipificar las actividades, tendiendo a aplicar los conceptos recién aprendidos a la resolución de las actividades que se proponen a continuación; y de la misma manera a identificar en una secuencia de problemas correlativos los contenidos y procedimientos involucrados en su resolución. Queremos evitar que casi antes de leer una serie de problemas, o con la resolución del primero de ellos, los alumnos puedan realizar afirmaciones del tipo “*estos se hacen con mediatriz*”, “*estos son de Pitágoras*”; porque consideramos que parte de la competencia matemática se relaciona no sólo con disponer de los conceptos y procedimientos necesarios para resolver una situación, sino también, con la capacidad para seleccionar, adaptar y aplicar dichos conceptos y destrezas en contextos escolares y no escolares. Por tal razón, tanto al organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje como el análisis correspondiente del mismo, se han tenido en cuenta estas consideraciones.

5.4.3. *Análisis de los aprendizajes de los alumnos.* Los beneficios producidos en los alumnos, se pueden recoger en un sistema de tres dimensiones: beneficios relativos al aprendizaje de la Geometría (AG), relativos al uso de las TIC y relativos al desarrollo de la capacidad de interacción y comunicación (CC).

Representamos este sistema mediante un tetraedro en cuyos vértices se encuentran cada uno de las dimensiones mencionadas y en el cual se incorpora un cuarto

polo que identifica la tutorización (T). Las aristas de este tetraedro representan las interacciones entre los cuatro polos. (Véase la Figura 6)

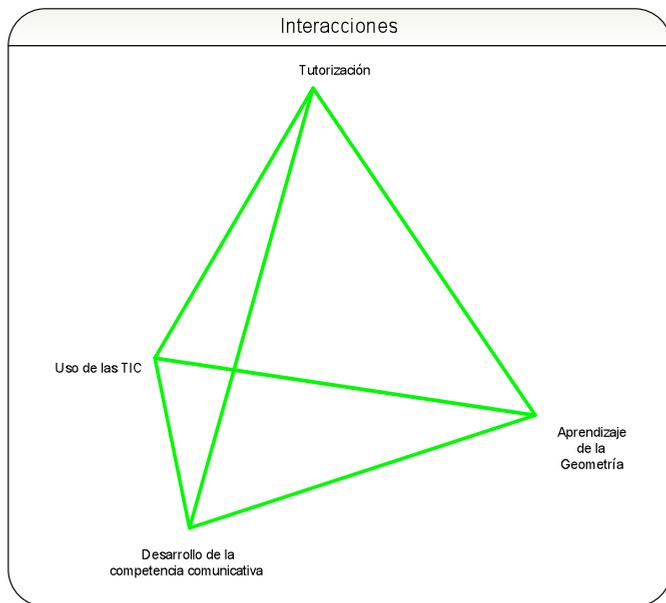


FIGURA 6. Beneficios producidos en los alumnos.

Pensamos que el hecho de que a lo largo del proceso, estas dimensiones no se comporten como polos aislados sino como vértices en permanente interacción con los demás, da lugar a un progreso conjunto y contextualizado en el que las mejoras en cada dimensión se nutren de los progresos de las otras pero a la vez realimentan dicho progreso.

5.4.4. Instrumento para evaluar los Aprendizaje en Geometría (AG). Hemos tomado como punto de partida, la noción de competencia y una categorización general establecidas por el Proyecto PISA (pensar y razonar, argumentar... (véase apartado 3.4)) con sus respectivos indicadores.

La categorización anterior funciona como referencia para confeccionar un instrumento aplicable al proceso concreto llevado a cabo en los alumnos, para cuyo diseño hemos considerado unas componentes más concretas y a su vez hemos decidido aplicarlas a la evolución en relación a unos determinados conceptos, relaciones y destrezas geométricos.

Para analizar, por ejemplo si el alumno “¿Es capaz de poner en juego las competencias necesarias para la resolución de una actividad planteada,?” revisamos el análisis del proceso de resolución de problemas realizado por diferentes autores. Así, encontramos, entre otras, las siguientes propuestas para las fases de resolución de problemas (véase Figura 7).

POLYA (1982)	MASON, BURTON y STACEY (1988)	BRANDSFORD y STEIN (1993)
<ol style="list-style-type: none"> 1. Comprender el problema. 2. Idear un plan de actuación. 3. Llevar a cabo el plan. 4. Mirar atrás. 	<ul style="list-style-type: none"> • Abordaje • Ataque • revisión 	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación • Definición del problema • Exploración • Actuación • Logros

FIGURA 7. Tres propuestas de fases de resolución de problemas.

Los distintos modelos resultan más o menos adecuados según el tipo de estudio que se esté realizando, las edades de los alumnos, los contenidos matemáticos con los que están trabajando, el tipo de problemas, el entorno en el que se resuelven, las interacciones producidas, etc. Teniendo en cuenta estas variables en este caso concreto, identificamos en el proceso de resolución de problemas, componentes e indicadores (véase Figura 8).

Componente	Indicador
Transformación 1: Modelización del problema	<i>Fase 1:</i> ¿Es capaz de convertir un enunciado real en un enunciado matemático? (cuando sea necesario). <i>Fase 2:</i> ¿Es capaz de traducir el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)
Transferencia: Resolución del problema dentro del modelo	¿Es capaz de aplicar y adaptar las estrategias necesarias (producción de variaciones, visualización, medición, construcción, cálculo,...) para resolver el problema? ¿Es capaz de identificar, seleccionar y aplicar los conceptos y relaciones construidos anteriormente para resolver el problema;
Metacognición: Reflexión y control sobre el proceso de resolución.	¿Es capaz de controlar el proceso de resolución y reflexionar sobre él?
Transformación 2: Codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado.	¿Es capaz de comunicar acerca del modelo y de sus resultados dando una solución al problema propuesto?

FIGURA 8. Componentes e indicadores del proceso de resolución.

Las anteriores capacidades son las componentes fundamentales del proceso de resolución de problemas geométricos, entendido desde la noción de competencia, que llevan a cabo nuestros alumnos al resolver problemas. Dichas capacidades no deben entenderse como componentes aisladas y de sucesión cronológica y lineal (por esa razón, preferimos llamarlas componentes en vez de fases o etapas); dado

que los procesos de metacognición hacen posibles las interacciones entre ellas y de esta forma el proceso se hace dinámico y personal en el caso de cada actividad y cada alumno.

Asimismo, entendemos que cada componente incluye actividades tales como las que se ven en la Figura 9.

Componente:	Actividades:
Transformación 1: modelización del problema	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes en el contexto. • Plantear interrogantes. • Representar el problema de una manera diferente. • Comprender la relación entre el lenguaje natural, el lenguaje simbólico y el formal. • Encontrar regularidades, relaciones y patrones. • Reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos. • Traducir el problema a un modelo matemático. • Utilizar herramientas y recursos adecuados.
Transferencia: resolución del problema dentro del modelo	<ul style="list-style-type: none"> • Usar diferentes representaciones. • Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones. • Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos. • Argumentar. • Generalizar.
Metacognición: Reflexión y control sobre el proceso de resolución	<ul style="list-style-type: none"> • Autoreflexionar sobre el proceso y tomar decisiones sobre el mismo. • Conocer las propias limitaciones. • Solicitar ayuda en el momento adecuado y de manera clara y precisa. • Chequear y supervisar la efectividad del plan diseñado para resolver el problema. • Determinar cuando finalizar el trabajo sobre el modelo.
Transformación 2: codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado	<ul style="list-style-type: none"> • Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos • Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados. • Comunicar el proceso y la solución. • Criticar el modelo y sus límites.

FIGURA 9. Tipos de actividades para cada componente.

Esquematizamos este proceso como se muestra en la Figura 10.

La característica de nuestras actividades en cuanto a ser “problemas abiertos” que se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través de

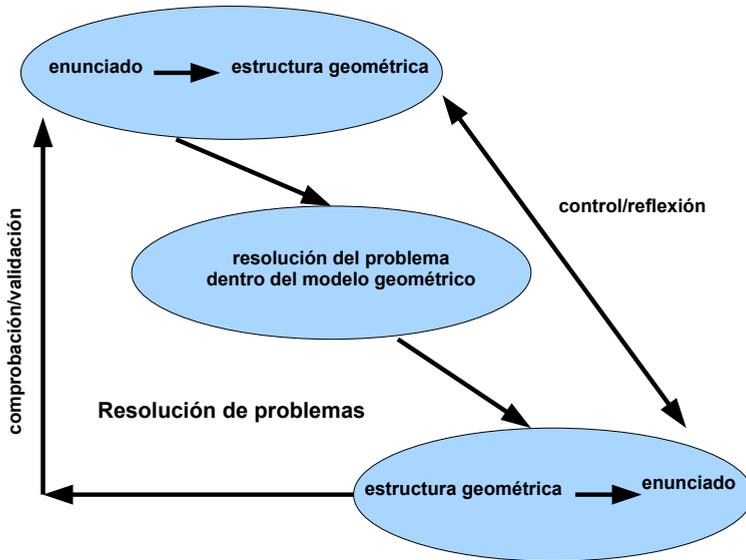


FIGURA 10. Esquema del proceso.

un sistema de “ayudas progresivas y diversificaciones,” hace que cada uno siga su propio “itinerario de resolución”. Es claro entonces que el análisis del “itinerario de resolución” recorrido por el alumno, aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de Aprendizaje de la Geometría y evaluación de la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

Los indicadores para analizar la complejidad de tareas en cada categoría toman en consideración el informe PISA (Rico 2006). De acuerdo con la complejidad de las tareas a realizar, se establecen teóricamente tres categorías. (Figura 3)

En este caso la competencia hace relación a la complejidad de la tarea. En nuestro caso, estos niveles no se tienen en actividades distintas, porque cada actividad “se adapta” al nivel de competencia del alumno en cada momento. Así resulta que una misma actividad puede resultar de primera, segunda o tercera clase según el itinerario que el alumno haya realizado para resolverla; es decir, según la cantidad y tipo de ayudas que haya requerido. A partir de las todas las consideraciones anteriores, establecemos el correspondiente instrumento de análisis.

En base al análisis de cada uno de los indicadores, se establece un nivel general del alumno, nivel que representa el estado general del alumno en relación al Aprendizaje de la Geometría:

– **Nivel Uno (N1):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una Actividad de Primera clase (Reproducción y procedimientos rutinarios). Este nivel se caracteriza por un manejo básico de conceptos y procedimientos rutinarios que le permite resolver solamente “ejercicios algorítmicos”.

– **Nivel Dos (N2)**: Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una Actividad de Segunda clase (Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados). Este nivel se caracteriza por la capacidad de realizar conexiones e integrar conceptos y procedimientos que le permiten resolver “problemas de aplicación”.

– **Nivel Tres (N3)**: Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una Actividad de Tercera clase (Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales). Este nivel se caracteriza por las capacidades de razonamiento, argumentación, intuición y generalización necesarios para resolver “problemas abiertos”

REFERENCIAS

- [1] C. ALSINA, J. M. FORTUNY Y OTROS. *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. España: Síntesis, 1997.
- [2] M. CANALE. *De la competencia comunicativa a la pedagogía comunicativa del lenguaje en Competencia comunicativa*. Madrid: Edelsa, 1995.
- [3] P. COBO, J. M. FORTUNY. *Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving*. Educational Studies in Mathematics, Vol.: 1, 2000.
- [4] K. DEVLIN. *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library, 1994.
- [5] J. DEWEY. *How we think*. Lexington, MA: Heath and Company, 1933.
- [6] R. DUVAL. *La Geometría desde un punto de vista cognitivo*. PMME- UNISON, 2001.
- [7] L. FIGUEIRAS. *Written Discourse in Virtual Environments*. UAB, 2000.
- [8] J. M. FORTUNY, J. JIMÉNEZ. *Teletutorización Interactiva en Matemáticas para asistencia hospitalaria*. Proyecto TIMAH. PIE; Barcelona, 2000.
- [9] H. FREUDENTHAL. *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel, 1973.
- [10] J. GODINO. *Comparación de herramientas teóricas para el Análisis Cognitivo en Didáctica de las Matemáticas*. 2001. http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm.
- [11] MEC. *Diseño Curricular Básico. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC, 1989.
- [12] MECD. *RD 831/2003*. Enseñanzas comunes de la ESO. 2003.
- [13] MECD. *RD 1631/2006*, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. En el Anexo I se fijan las competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación. 2006.
- [14] M. MENEZES FREITAS, D. FIORENTINI. *Comunicación y Formación: el papel de la escritura en la formación inicial de profesores de matemática. XVI Simposio Iberoamericano*. Castellón: Servicio de Publicaciones, 2004.
- [15] C. MORGAN. *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*. Londres: Falmer Press, 1998.
- [16] C. MORGAN. *Assessment of mathematics behaviour: A social perspective*. En *Proceedings of the International Mathematics Education and Society Conference*, P. Gates (Ed.), pp. 277-283. Mathematics Education and Society, Nottingham: Centre for the Study of Mathematics Education, 1998.
- [17] J. MURILLO, G. MARCOS. *Una metodología para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas. Investigación en educación matemática XI*. ISBN: 84-7985-261-5. San Cristóbal de La Laguna, Tenerife. España, 2007.
- [18] NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 2000.
- [19] NCTM. *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Editorial: SAEM THALES, 1991.
- [20] NCTM. *Principios y estándares para la educación matemática* / [traducción, Manuel Fernández Reyes]– Sevilla : SAEM THALES, 2003.

- [21] P. NESHER. *Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático en Matemáticas y educación*. Retos y cambios desde una perspectiva internacional, España: Graó, 2000.
- [22] M. NISS. *Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse*. Uddanneise, 9, 1999.
- [23] OCDE. *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE, 2003.
- [24] G. POLYA. *How to solve it*. Princeton University Press, 1945.
- [25] A. POWELL, J. LÓPEZ. A escrita como veículo de aprendizagem da matemática: Estudo de um caso. *Boletín GEPPEM* **33**, Río de Janeiro, 9–41, 1995.
- [26] PROYECTO PISA. *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: un nuevo marco de evaluación*. OCDE. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE, 2000.
- [27] PISA. *Pisa 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. MEC-INECSE, Madrid, 2005.
- [28] PISA. *Informe español 2006*. Subdirección General de Información y Publicaciones. Madrid. ISBN:978-84-369-4529-4. 2007.
- [29] L. RICO. *Evaluación de competencias matemáticas*. Proyecto PISA/OCDE 2003 en E. Castro y E. De La Torre (eds.), *Investigación en Educación Matemática*, 8º Simposio de la SEIEM, U. da Coruña, 2003.
- [30] L. RICO. Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, nº extraordinario 2006, 275–294, 2006.
- [31] L. RICO. La competencia matemática en PISA. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática* **1**(2), Universidad de Granada, 2007.
- [32] A. SFARD, P. NESHER Y OTROS. Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? *For the Learning of Mathematics* **18**(1), 41–51, 1998.
- [33] L. STEEN (Ed.) *On the shoulders of Giants*. Washington DC: National Academy, 1990.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, SPAIN
Correo electrónico: jmurillo@unirioja.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, SPAIN
Correo electrónico: pearnal@unirioja.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, SPAIN
Correo electrónico: guillermimarcos@yahoo.com.ar