CONTRIBUCIONES CIENTÍFICAS
EN HONOR DE MIRIAN ANDRÉS GÓMEZ
(Laureano Lambán, Ana Romero y Julio Rubio, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2010.

LA HISTORIA DE LA CONJETURA DE KEPLER

PEDRO J. MIANA Y NATALIA ROMERO

Dedicado a Mirian

Resumen. La conjetura de Kepler es uno de los problemas matemáticos más interesantes de los últimos 400 años. A finales del siglo XVI, una pregunta de Sir Walter Rayleig a su asistente Thomas Harriot, le lleva a éste a plantearse el empaquetamiento óptimo de las esferas en el espacio. Harriot le escribe a Johannes Kepler, quien en 1611 conjetura que la solución es la usada por los fruteros al apilar naranjas. En 1831, Carl F. Gauss demuestra la conjetura de Kepler para los empaquetamientos "reticulares". En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos en Paris, en 1900, David Hilbert propone su famosa lista de 23 problemas que marcarán el devenir de las matemáticas durante el siglo XX. En el problema 18 se plantean varias cuestiones sobre el empaquetamiento de esferas y la conjetura de Kepler. En 1953, László Fejes Tóth redujo por primera vez la conjetura de Kepler a un problema complejo de optimización: encontrar el mínimo de una cierta función de 200 variables. Él mismo ideó un método computational imposible de llevar a cabo en aquellos años. En 1998, siguiendo las ideas de Féjes Tóth, Thomas Hales ayudado por su alumno de doctorado, Samuel Ferguson, presentaron una prueba de la conjetura de Kepler en una serie de seis artículos. Esta demostración involucra tanto la matemática tradicional como la matemática computacional. La primera parte de la demostración apareció publicada en 2005 en la prestigiosa revista "Annals of Mathematics". Actualmente la demostración se considera probada y ha avivado el debate de las demostraciones matemáticas vía ordenadores.

Abstract. The Kepler conjecture is one of the more interesting mathematical problems in the last 400 years. At the end of the XVI century, Sir Walter Rayleig posed to Thomas Harriot several questions concerning to the problem of the sphere's optimal packaging in the space. In 1611, Harriot wrote to Johannes Kepler who conjectured that the solution was used commonly for heaping oranges. In 1831, Carl F. Gauss shown the Kepler conjecture for the reticular packagings. In the Second International Congress of Mathematics, David Hilbert proposed the well-known list of 23 problems that will guide Mathematics during the XX century. The 18^{th} problem is concerning with the packing of spheres. In 1953, László Fejes Tóth reduced the Kepler conjecture to a complex optimization problem: to find the minimum of a certain function of 200 variables. He devised a computational method which was impossible to carry out in those years. In 1998, Thomas Halles helped by Ph. D. student Samuel Ferguson, followed the guidelines of Féjes Tóth and proved the Kepler conjecture. This proof involves the traditional and the computational mathematics. The first part of the proof was published in Annals of Mathematics (2005). At the moment the proof is considered correct and comes alive the discussions about mathematical proofs via computers.

Key words and phrases. The Kepler conjecture, Voronoi cells, Archimedean solids.

1. El origen de la conjetura: Sir Walter Raleigh, Thomas Harriot y Johannes Kepler

El 9 de abril de 1585 parte del puerto inglés de Plymouth el navío “El tigre” con el fin de establecer una colonia británica en el actual estado de Virginia. El responsable de la expedición financiada por la reina Isabel I, era Sir Walter Raleigh.

Sir Walter Raleigh estudió en el Oriel College en Oxford, e inició su fulgurante carrera siendo soldado de fortuna en Francia, en los Países Bajos y finalmente en Irlanda. Allí, en 1580, al mando de una compañia de infantería sofocó una rebelión contra la reina y se hizo famoso por su crueldad, pasando a cuchillo toda una población de 600 habitantes. Al volver a la corte, la reina le nombra “Sir”, convirtiéndose en uno de sus favoritos.

Figura 1. *Retrato de Sir Walter Raleigh,* Nicholas Hilliard, 1585.

Acusado de conspiración por el rey Jacobo I, es encarcelado durante doce años en la Torre de Londres. Durante este tiempo compone poesía, realiza experimentos químicos y escribe su libro enciclopédico “Historia del Mundo”. Forzado por los problemas económicos de Inglaterra, el monarca libera a Sir Walter Raleigh en 1617, para realizar la búsqueda de El Dorado. Su fracaso es su condena de muerte y es ejecutado en el cadalso el 29 de octubre de 1618. Cuando el verdugo hizo rodar su cabeza, alguien entre el público dijo “No tenemos otra cabeza como ésta para que la corten”. Poeta, romántico, marinero, pirata, explorador, cortesano, parlamentario, historiador y hasta científico, encarna los valores del hombre del Renacimiento.

En aquella expedición a Virginia viajaba Thomas Harriot, ayudante de Sir Raleigh. De familia humilde, y con talento para el cálculo, Harriot estudió en St Mary’s Hall en Oxford. Al terminar, marchó a Londres, donde entró en 1583 a trabajar para Sir Raleigh. Primero se encarga de pequeños asuntos pero su formación de astrónomo y calculista le convierte en un excepcional ayudante de Sir Walter. Aunque no publicó sus hallazgos matemáticos en vida, se conoce que fue el primero en utilizar los símbolos "mayor que", $>$ y "menor que", $<$, y descubrió la ley de los senos sobre la refracción de la luz, conocida posteriormente como ley de Snell. También hizo aportaciones en astronomía; sus precisas observaciones de un cometa el 17 de septiembre de 1607, permitieron a Bessel determinar la trayetoria del cometa denominado más tarde "cometa Halley". Fue el primer inglés en poseer un telescopio y su reputación como óptico, le llevó a Johannes Keppler a interesarse por sus resultados. Alrededor de 1606, intercambiaron cartas, conocimientos y descubrimientos científicos.

En el manucristo fechado el 12 de diciembre de 1591, Harriot presentó a Sir Raleigh una tabla en la que respondía a una cuestión planteada por éste con anterioridad. Conociendo el número de esferas que forman la base triangular o cuadrangular de una pirámide, determinaba el número total de esferas que la componían. Recíprocamente, identificaba la cantidad de esferas que necesitaba para formar pirámides de base cuadrangular o triangular. Harriot se preguntó si esta forma piramidal era el empaquetamiento más denso posible. En su correspondencia con Kepler comentó esta cuestión y sus aplicaciones inmediatas a la teoría atómica de la materia.

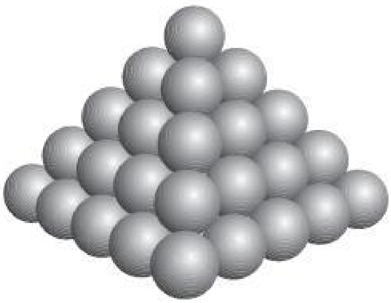
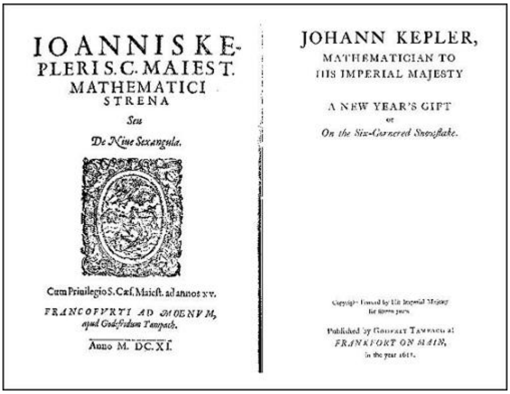


FIGURA 2. Estructura piramidal de esferas.

Kepler llegó a Praga en 1600 para ser ayudante de Tycho Brahe, "Matemático Imperial" en esa época, y ocupó su puesto a la muerte de éste. De familia humilde y con problemas económicos, era un minucioso observador y un trabajador incansable: la determinación de la órbita de Marte, le ocupó todo un año y más de 1000 páginas de cálculos aritméticos, él lo llamaba "la guerra contra Marte". El cálculo de las órbitas de los restantes planetas conocidos, le llevó a la formulación de lo que actualmente se conoce como las tres leyes de Kepler.

En 1611, como regalo de cumpleaños a Su Majestad el Emperador, Rodolfo II, y como respuesta a las acusaciones de inutilidad de su cargo, le dedicó el ensayo, "El copo de nieve de seis esquinas". En este librito, que muchos consideran el fundamento de los cristalografía, Kepler expone la formación de los copos de nieve.

También menciona la cuestión planteada por Thomas Harriot. A pesar de no dar una demostración rigurosa, Kepler afirma que “al igual que los fruteros colocan sus frutas (aludiendo al ejemplo concreto de las naranjas), la sabiduría centenaria indicaba que el sistema más adecuado era el del apilamiento en forma de pirámide”. Esta solución para el empaquetamiento óptimo de esferas, ¿se podría demostrar matemáticamente?


IOANNIS KEPLERI S.C. MAIEST. MATHEMATICI
STRENA
Seu
De Nive Sexangula.

Cum Privilegio S. Cæs. Maiest. ad annos XV.
FRANCOFVRTI AD MOENVM,
apud Godefridum Tampach.
Anno M. DC. XI.

JOHANN KEPLER,
MATHEMATICIAN TO
HIS IMPERIAL MAJESTY

A NEW YEAR'S GIFT
or
On the Six-Cornered Snowflake.

FRANKFORT ON MAIN,

2. Las aportaciones de Carl F. Gauss y David Hilbert

El empaquetamiento de esferas en pirámide se puede describir considerando cubos unidad cuyos vértices son centros de esferas. En la siguiente figura, además de los centros de las esferas que están en los vértices, marcamos el centro de cada esfera que se encuentra centrada en las caras.

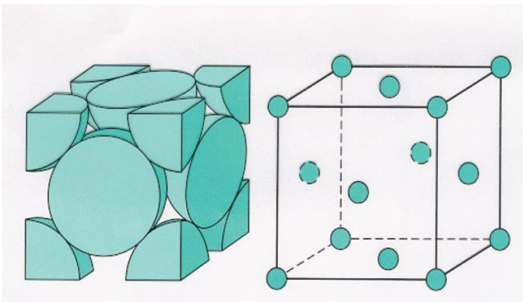


Figura 3. Empaquetamiento de esferas cúbico centrado en las caras, (ccc).

La densidad del empaquetamiento cúbico centrado en las caras se calcula dividiendo el volumen de las partes de esferas contenidas dentro del cubo por el volumen del cubo, en este caso

$$d_{ccc} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0,7404...$$

La conjetura Kepler afirma que esta ordenación de esferas es la que deja menos espacio sin rellenar.

El empaquetamiento *ccc* es un ejemplo en el que las esferas están dispuestas de forma "reticular", esto es, existe un patrón que al trasladarlo nos determina la posición de todas las esferas. Para el caso de los empaquetamientos "reticulares", la demostración del conjetura de Kepler fue probada por Carl F. Gauss en 1831, ([6]). Una versión de esta demostración puede encontrarse en la página web

`http://www.math.pitt.edu/articles/gauss.html`

En Agosto de 1900 en París tuvo lugar el II Congreso Internacional de Matemáticas. El matemático alemán David Hilbert fue uno de principales conferenciantes invitados. Aconsejado por su amigo Minkowski, su discurso se centró en lo que para él eran los diez problemas más interesantes de las matemáticas, "Los Problemas Futuros de la Matemática". El éxito de la conferencia fue tal que en la versión definitiva, publicada en las actas del congreso, la lista aumentó hasta 23. Actualmente, esta lista de problemas es un referente para mostrar el avance de las Matemáticas. El texto original en alemán puede consultarse en la dirección

`http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/rede.pdf`

y una traducción en inglés en la página

`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html`

También es recomendable la lectura del contenido de la voz "Hilbert's Problems" en la enciclopedia electrónica Wikipedia,

`http://es.wikipedia.org/wiki/Problemas_de_hilbert`

donde se presenta el estado actual de cada uno de los 23 problemas propuestos por Hilbert.

El problema decimoctavo lleva por título "Construcción del espacio de los poliedros congruentes" y en las últimas líneas plantea las siguientes cuestiones, recuperando la conjetura de Kepler:

"I point out the following question, related to the preceding one, and important to number theory and perhaps sometimes useful to physics and chemistry: How can one arrange most densely in space an infinite number of equal solids of given form, e. g., spheres with given radii or regular tetrahedra with given edges (or in prescribed position), that is, how can one so fit them together that the ratio of the filled to the unfilled space may be as great as possible?"

3. La resolución definitiva: László Fejes Tóth, y Thomas Hales

En 1953 el matemático polaco László Fejes Tóth propuso un camino de largo recorrido que concluría casi cincuenta años más tarde con la demostración definitiva de la conjetura de Kepler. Planteaba la división del espacio en celdas (llamadas celdas de Voronoi) llegando a considerar hasta 13 tipos de estas celdas. Calculaba diversos promedios del volumen de estas celdas convenientemente perturbados de tal manera, que si cada uno de estos promedios era mayor que el volumen del dodecahedro rómbico, entonces la conjetura de Kepler quedaba probada.

El dodecaedro rómbico es un poliedro de los llamados "sólidos de Catalan". Éstos se construyen a partir de los "sólidos de Arquímedes" por dualidad. Al igual que con el cubo, es posible rellenar todo el espacio utilizando solamente dodecaedros rómbicos. Esta propiedad es fundamental en la demostración planteada por Fejes Tóth.

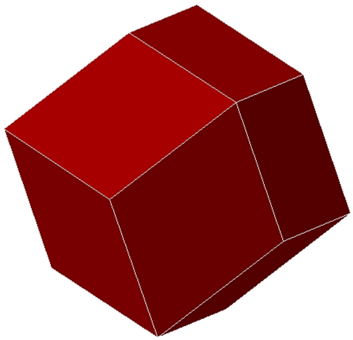


Figura 4. Dodecaedro rómbico.

La conjetura de Kepler es un problema de optimización con un número infinito de variables. La idea de Fejes Tóth fue la primera para reducir la conjetura a un problema con un número finito de variables. Sin embargo, los cálculos requeridos eran complejos y extensos; en este punto también hizo una aportación original. Él fue el primero en sugerir que los ordenadores podían ayudar en la resolución de la conjetura de Kepler, véase [1]:

"Thus it seems that the problem can be reduced to the determination of the minimum of a function of a finite number of variables, providing a programme realizable in principle. In view of the intricacy of this function we are far from attempting to determine the exact minimum. But, mindful of the rapid development of our computers, it is imaginable that the minimum may be approximated with great exactitude."

Las palabras de Fejes Tóth resultaron ser proféticas. En 1993 y con una gran expectación se anunció la demostración de la conjetura de Kepler por Wu-Yi Hsiang. La aproximación de Hsiang era una continuación y extensión de la propuesta por Fejes Tóth. Sin embargo, el trabajo Hsiang contiene numerosos errores y actualmente se considera una demostración fallida.

Cuatrocientos años más tarde que Thomas Harriot se planteara el problema del empaquetamiento de las esferas, un matemático de la Universidad de Pittsburgh, Thomas Hales, anunció en 1998 la demostración de la conjetura de Kepler. Tradujo al lenguaje de grafos las ideas planteadas por Fejes Tóth, a quien dedicó la demostración. A cada grupo de esferas asociaba un grafo plano y demostraba que las cotas buscadas dependían sólo de la estructura combinatoria de los grafos. El problema se reducía a analizar 5.000 grafos distintos que involucraban ecuaciones de alrededor de 200 variables con 2.000 restricciones. El ordenador resolvió la totalidad de los casi de 100.000 casos posibles. Un caso especialmente duro fue resuelto por su alumno de doctorado, Samuel Ferguson, en su tesis doctoral. En total, la demostración de este histórico problema ocupa nada menos que 250 páginas y tres gigabytes de datos y códigos. Uno de los problemas más importante y famoso de la historia de las matemáticas había sucumbido, por fín, al ingenio humano, o ¿no?

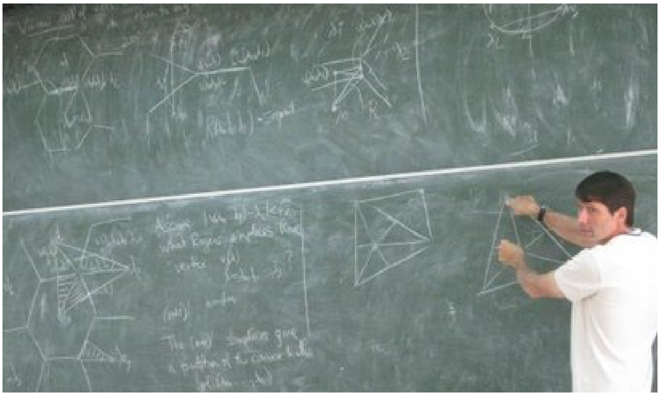


Figura 5. *Thomas Hales*, Hanoi, Junio de 2009.

4. Una nueva era: las demostraciones vía ordenador

La demostración de Thomas Hales no es, precisamente, de las que gustan en matemáticas. Se prefieren demostraciones que, teóricamente, cada lector interesado pueda comprobar hasta el más mínimo detalle. El uso del ordenador no satisface a nadie, incluso ni al propio Thomas Hales quien ha iniciado el proyecto "FLYSPECK, Toward a Formal Proof of the Kepler Conjecture". El ordenador se percibe como una caja negra en la que es imposible comprobar cada deducción matemática. Tras cinco años de revisión, el artículo fue aceptado en una de las más prestigiosas revistas matemáticas, "Annals of Mathematics". Gráficamente se ha comparado la verificación de cada paso de la demostración a la comprobación de la guía de telefonos de los usuarios de la ciudad de New York.

La demostración de Hales se añade a la lista de resultados matemáticos probados con ordenador. Uno de los primeros y más famoso tuvo lugar en 1976. Ken Appel y Wolfgang Haken probaron el "teorema de los cuatro colores", el cual afirmaba que cuatro era el número mínino de colores necesarios para colorear un mapa plano de forma que dos países con frontera común se le asignen colores distintos. La ayuda de un ordenador fue determinante para los cálculos imposibles de ejecutar con detalle a mano. La comunidad matemática se encuentra divida entre los que aceptan estas pruebas y quienes las rechazan. En España, parte de esta controversia y otras opiniones sobre la investigación y publicación en matemáticas están recogidas en los artículos de A. Córdoba y M. A. Goberna publicados en El País en el año 2006.

El avance informático y tecnológico es imparable en todos los aspectos de la sociedad. Nos encontramos en el comienzo de un siglo en que todas las ciencias se benefician de este avance. Todo progreso conlleva reflexiones filosóficas y a veces éticas. Los matemáticos no deben quedarse al margen de esta reflexión, preguntándose sobre la naturaleza de su propia ciencia y su metodología, sin renunciar a su propia esencia e historia. Nuestro progreso se fundamenta en la herencia entregada por nuestro predecesores, citando a Sir Isaac Newton, "estamos sentados a hombros de gigantes".

Referencias

[1] L. Fejes Tóth. *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum.* Springer-Verlag, Berlin, 1953.
[2] L. Fejes Tóth. *Regular figures*, Pergamon Press, New York, 1964.
[3] S. P. Ferguson. *Sphere packings V.* Thesis, University of Michigan, 1997.
[4] T. Hales. A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Math.* **162**, 1065-1185, 2005.
[5] W.-Y. Hsiang. On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture, *Internat. J. Math.* **93**, 739–831, 1993.
[6] C. F. Gauss. Untersuchungen über die Eigenscahften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seber. *J. reine angew. Math.* **20**, 312-320, 1840.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain
Correo electrónico: pjmiana@unizar.es

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain
Correo electrónico: natalia.romero@unirioja.es