

¿SE PRESERVA LA TOPOLOGÍA EN LA SIMPLIFICACIÓN ESTADÍSTICA DE POBLACIONES DE OBJETOS 3D?

ELSA GARCÍA

Dedicado a la memoria de Mirian Andrés Gómez

RESUMEN. Este artículo plantea el problema de la preservación de la topología en la simplificación de una población de objetos representados por mallas triangulares. La preservación de la topología en la simplificación de mallas triangulares de objetos poligonales ha sido un tema estudiado ampliamente. En los últimos años, la utilización de conjuntos mallas que representan un mismo objeto que varía con el tiempo (mallas deformables) o de una población de objetos individuales (modelos obtenidos de segmentación de imágenes médicas, simulación de multitudes o manadas) en el campo de la animación por ordenador han dado como resultado el desarrollo de nuevos algoritmos de simplificación, de los que estudiar la preservación de la topología.

ABSTRACT. This paper introduces the problem of preserving mesh topology during statistical simplification of a set of polygonal meshes that represents a population of 3D objects. The treatment of mesh topology during simplification of polygonal models has been extensively studied in computer graphics. Recently, a great deal of active research in computer animation has been devoted to studying and developing mesh deformation methods. Consequently, simplification methods have been extended to work with a set of meshes (time-varying meshes or populations) and it is necessary to study the treatment of topology in these methods.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo surge a raíz de una pregunta realizada en un congreso en el que se presentó el algoritmo de simplificación estadística de poblaciones de objetos 3D representados por mallas triangulares [1]. Este hecho sería irrelevante si no fuera porque, en ese momento, Mirian Andrés Gómez estaba sustituyendo a la autora en el cuidado de un examen para que esta pregunta se pudiera realizar. Favor que la autora le iba a devolver una semana después en la presentación de su último trabajo [2]. Una pregunta que, además, podría haber ayudado a la autora a responder, ya que investigaba en el campo de la Topología Algebraica.

En la última década, con el desarrollo de nuevos campos de aplicación en el ámbito de la informática, como el procesado de imágenes médicas, la cartografía,

Key words and phrases. Topology-preserving mesh simplification.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de la Universidad de la Rioja EGI 09/58.

la informática gráfica o animación por ordenador, la biología estructural, la robótica, etc, ha surgido la necesidad de identificar y formalizar cuestiones topológicas relacionadas con estos campos [3] [4] [5]. Desafortunadamente, muchos de estos problemas continúan todavía abiertos, debido principalmente a la falta de puesta en común de conocimientos e interacción entre áreas.

La preservación de la topología en la simplificación de mallas triangulares de objetos tridimensionales ha sido un tema estudiado ampliamente en el campo de la Informática Gráfica, tanto que los métodos de simplificación se han clasificado en función del tratamiento que dan a la topología de la malla durante la simplificación, si la preservan o la modifican. Incluso hay un grupo de métodos, llamados métodos de simplificación topológica, que se caracterizan por simplificar la malla en base a su estructura topológica [6] [7] [8]. En los últimos años, la utilización de conjuntos mallas que representan un mismo objeto que varía con el tiempo (mallas deformables) o de una población de objetos individuales (modelos obtenidos de segmentación de imágenes médicas, simulación de multitudes o manadas) en el campo de la animación por ordenador han dado como resultado el desarrollo de nuevos algoritmos de simplificación, en los que estudiar la preservación de la topología.

El algoritmo de simplificación estadística pertenece a los métodos basados en la contracción iterativa de aristas. Este tipo de métodos tienden a preservar la topología local del modelo si siempre “fusionan” vértices conectados por una arista, pero existen condiciones locales en las que se puede modificar la topología del modelo. Partiendo de estas condiciones, el problema que se plantea entonces es determinar y formalizar las condiciones locales bajo las cuales se preserva la topología en el algoritmo de simplificación estadística.

La figura 1 presenta las mallas triangulares de ventrículos laterales izquierdos una población de 18 individuos y los resultados visuales de aplicar el método de simplificación estadística a dichas mallas.

La organización del artículo es la siguiente. La sección 2 describe el algoritmo de simplificación estadística de poblaciones de objetos. En la sección 3 se presenta el problema de la preservación de la topología en la simplificación de objetos poligonales individuales y se introduce el problema en el caso de la simplificación estadística. Para finalizar, se exponen las conclusiones en la sección 4.

2. EL ALGORITMO DE SIMPLIFICACIÓN ESTADÍSTICA

En el ámbito de la informática gráfica se han desarrollado múltiples técnicas de simplificación, principalmente de objetos poligonales, con el fin de acelerar el proceso de visualización. El principal objetivo de estas técnicas es generar una o varias aproximaciones del modelo 3D original eliminando detalles redundantes del modelo inicial. Así, un modelo multiresolución es una representación que incluye el objeto inicial y sus simplificaciones o niveles de detalle. Normalmente, estos niveles de detalle se obtienen a partir del modelo inicial aplicando iterativamente distintas operaciones geométricas como la contracción de aristas [9] [10], la eliminación de vértices [11], la agrupación de vértices [12] [13] o la unión de regiones [14]. De

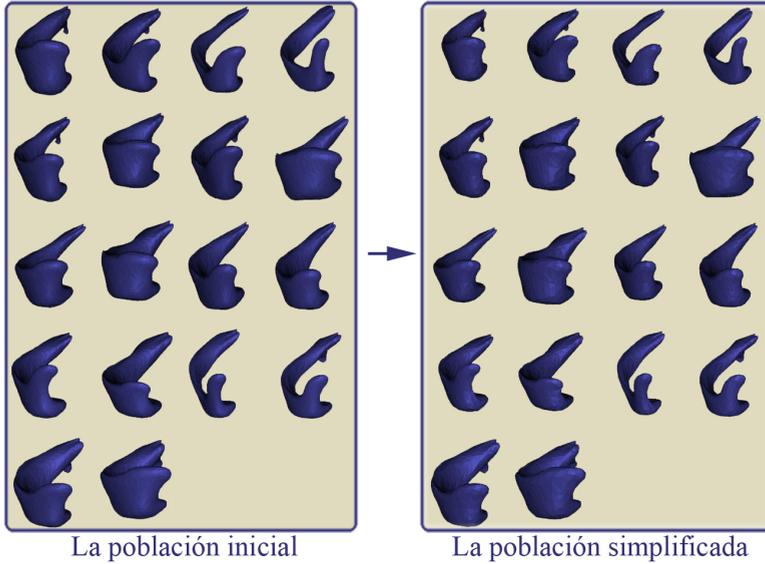


FIGURA 1. Mallas iniciales (izquierda, 1506 puntos) y mallas simplificadas (derecha, 754 puntos) de la población de 18 instancias del ventrículo lateral izquierdo.

todos ellos, el algoritmo de simplificación más utilizado es sin duda el basado en la contracción de aristas.

Algunos métodos de simplificación basados en la contracción de aristas introducen información adicional a las características geométricas del modelo. Esta información está relacionada con la apariencia del modelo como puede ser normales, colores, o texturas [15] [16]. Otros métodos tratan de preservar únicamente en el modelo simplificado cualidades visualmente importantes del modelo original [17] [18]. Estos algoritmos se aplican exclusivamente sobre objetos individuales. Recientemente se han estudiado diferentes métodos de simplificación para mallas deformables o que varían con el tiempo [19] [20] [21] [22]. Estos métodos se basan en la contracción de aristas y consideran todos o un subconjunto de fotogramas de la animación a la hora de elegir la arista a contraer.

El método de simplificación estadística pertenece al tipo de métodos basados en la contracción iterativa de aristas. Después de cada contracción $(v_1, v_2) \rightarrow v$, se genera un nuevo vértice v . Para ello, se tienen que abordar dos problemas: la prioridad al elegir la arista a contraer y el valor que tendrá el nuevo vértice resultado de unificar los dos anteriores. A continuación se describen los detalles de cómo nuestro método resuelve ambos problemas.

2.1. El coste de la contracción de aristas. El primer problema a resolver consiste en seleccionar la arista a contraer. A la hora de elegir una métrica de coste para la simplificación de una población es esencialmente importante considerar,

aparte de la geometría del objeto, la información estadística de la forma de la población, es decir, la información de la variación de la geometría de las instancias con respecto a la forma media.

En el campo del procesado digital es usual utilizar las poblaciones o conjuntos de objetos para extraer estructuras a partir de imágenes 3D. La segmentación automática de imágenes médicas requiere normalmente un conocimiento a priori de la geometría de la estructura a extraer. En este sentido, los Modelos de Distribución de Puntos (PDM) [23] son una técnica de descripción de forma que está siendo ampliamente utilizada para representar objetos en imágenes. Esta técnica asume que existe un conjunto de instancias (conjunto de entrenamiento) del cual derivar una descripción estadística de la forma y su variación.

El algoritmo de simplificación estadística está basado en el método de Hoppe para simplificar mallas con atributos de apariencia [16] porque utiliza una métrica de coste que está formada tanto por un término de error geométrico como por un término de error en los atributos.

Como se ha indicado al principio de la sección, una población se puede representar por medio de un PDM que se genera a partir del análisis estadístico de la forma geométrica de la población. Los modos de variación se calculan mediante el Análisis de Componentes Principales (PCA) sobre la desviación de las instancias de la población respecto a la media y se representan por vectores ortonormales. PCA requiere que exista correspondencia de vértices entre las instancias de la población. Un nuevo objeto en el conjunto se describe como la suma a la forma media de una combinación lineal ponderada de los k modos de variación más significativos. Este artículo describe un PDM como una forma media y l modos de variación.

La forma media consiste en una malla triangular con su conjunto de vértices V y un conjunto de triángulos T y los modos de variación son vectores ortonormales. Cada vértice $v \in V$ tiene asociada una posición en el espacio tridimensional $\mathbf{p}_v \in \mathbb{R}^3$ y un conjunto de l vectores ponderados denotados por $\mathbf{q}_v = \mathbf{m}_v \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{3l}$ donde \mathbf{m}_v son los l modos de variación y \mathbf{u} es un vector de l pesos.

Estos dos elementos (la posición \mathbf{p}_v y los modos ponderados \mathbf{q}_v) forman un vector $\mathbf{z}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_v \\ \mathbf{m}_v \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3+3l}$. Cada triángulo $t \in T$ se representa por una tripleta de vértices $(\mathbf{z}_v, \mathbf{z}_w, \mathbf{z}_x)$ con $v, w, x \in V$.

Cada instancia i de la población se representa por una malla triangular con su conjunto de vértices V_i y un conjunto de triángulos T_i . Cada vértice $v \in V_i$ tiene asociada una posición $\mathbf{p}_v \in \mathbb{R}^3$. Cada triángulo $t \in T_i$ se representa también por una tripleta de vértices $(\mathbf{p}_v, \mathbf{p}_w, \mathbf{p}_x)$ con $v, w, x \in V_i$.

Con objeto de introducir el error estadístico que se produce en la población, se define una métrica de coste QS^v para cada vértice v de la forma media. QS^v es la suma de las métricas asociadas a los triángulos adyacentes AT ponderados por el área del triángulo:

$$(1) \quad QS^v(\mathbf{z}) = \sum_{t \in AT} \text{area}(t) \cdot QS^t(\mathbf{z})$$

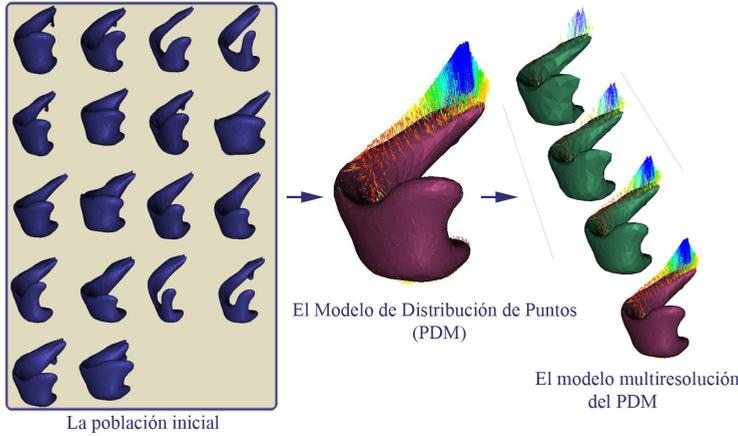


FIGURA 2. Ejemplo de la simplificación estadística de una población de objetos 3D.

donde QS^t , la métrica cuadrática asociada al triángulo t , se calcula de la siguiente forma:

$$(2) \quad QS^t(\mathbf{z}) = Q_p^t(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{3l} QS_{q_i}^t(\mathbf{z})$$

El término que expresa el error geométrico Q_p^t es el término de error geométrico de la métrica de Hoppe [16], pero el segundo término, que describe el error estadístico en la población $QS_{q_i}^t$, extiende el término de error en los atributos de ese algoritmo para incluir la información de los modos de variación.

La métrica de coste se utiliza para seleccionar la arista de la forma media que se va a contraer. Una vez hecho esto, se seleccionan las aristas en cada una de las instancias de la población por su correspondencia con los vértices de la forma media.

2.2. El valor del nuevo vértice. El segundo problema a resolver consiste en determinar el valor que tendrá el nuevo vértice generado al contraer las aristas tanto en la forma media como en cada una de las instancias.

Después de contraer una arista de la forma media $(v_1, v_2) \rightarrow v$, se sitúa el nuevo vértice en la posición v que minimiza la métrica de coste asociada al mismo, definida como la suma de las métricas de coste en los extremos de la arista $QS^v = QS^{v_1} + QS^{v_2}$. El valor del nuevo vértice \mathbf{z}_v se obtiene resolviendo el sistema lineal correspondiente a igualar a cero el gradiente de su métrica de coste QS^v . Como QS^v es cuadrática, el gradiente es igual a $\nabla QS^v(\mathbf{z}) = 2\mathbf{A}\mathbf{z} + 2\mathbf{b}$. Resolviendo $\nabla QS^v = 0$, el valor obtenido para \mathbf{z} es igual a $-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Después de contraer una arista de la instancia i , $(v_{i,1}, v_{i,2}) \rightarrow v_i$, donde la arista se obtiene como resultado de la correspondencia de vértices con los extremos de la arista contraída en la forma media $(v_1, v_2) \rightarrow v$, la posición geométrica del nuevo vértice v_i de la instancia i se calcula de la siguiente forma:

$$(3) \quad \mathbf{p}_{v_i} = \mathbf{p}_v + \mathbf{e}(\mathbf{p}_{v_{i,1}} - \mathbf{p}_{v_1}) + (1 - \mathbf{e})(\mathbf{p}_{v_{i,2}} - \mathbf{p}_{v_2})$$

donde \mathbf{e} y $(1-\mathbf{e})$ son las coordenadas baricéntricas de la proyección del punto simplificado \mathbf{p}_v de la forma media respecto a la arista (v_1, v_2) .

Después de la simplificación de cada una de las mallas de las instancias de la población inicial, se construye un nuevo PDM para la población simplificada: se genera la nueva forma media como el promedio de las posiciones de los vértices de cada una de las instancias y se calculan los nuevos modos de variación mediante análisis por componentes principales (PCA) de las desviaciones de las instancias simplificadas respecto a la media. La figura 2 muestra una población de objetos y su PDM representado por la forma media y su primer modo de variación. El modelo mutirresolución se obtiene simplificando la población en diferentes niveles de detalle.

3. LA PRESERVACIÓN DE LA TOPOLOGÍA EN LA SIMPLIFICACIÓN MEDIANTE CONTRACCIÓN DE ARISTAS

En informática gráfica no se suele utilizar la notación matemática relacionada con los complejos simpliciales [24] para referirse a los aspectos topológicos de una malla. En el contexto de la simplificación poligonal, el término topología se refiere a la estructura de la malla, es decir, a la forma de conectarse las celdas en la malla. Así, una malla se dice estructurada cuando sus vértices interiores tienen el mismo número de celdas adyacentes. Asimismo, el género de una superficie es el número de agujeros en la superficie de la malla y la topología local de una cara, arista o vértice se refiere a la conectividad de dicho elemento con su inmediata vecindad [25]. La superficie de un modelo poligonal a simplificar se representa por una malla triángulos conectados entre sí mediante vértices y aristas compartidas. En notación matemática es un 2-complejo y restringido normalmente a una 2-variedad con o sin frontera. En una malla triangulada cuya estructura topológica es una variedad, cada arista tendrá exactamente dos triángulos adyacentes compartiéndola y cada triángulo compartirá una arista con exactamente tres triángulos vecinos. Una variedad 2D con frontera permite aristas “frontera” que pertenezcan a un sólo triángulo.

Las mallas con esta estructura topológica son muy adecuadas para aplicaciones como análisis por elementos finitos o radiosidad debido a que representan modelos que tienen un buen comportamiento y muchos algoritmos de generación de mallas garantizan que su salida o resultado serán mallas de este tipo. Desafortunadamente, no todos los modelos son variedades “perfectas”, tienen errores o inconsistencias topológicas como grietas, uniones-T y vértices y aristas que localmente no son variedades.

Un algoritmo de simplificación que preserva la topología se caracteriza porque mantiene la estructura topológica de la malla en cada iteración. Muchos algoritmos

no cierran agujeros en la malla para preservar el género de la superficie. Esta restricción limita la simplificación, sobre todo en modelos con un género alto en los que la simplificación resulta complicada a partir de un determinado número de polígonos.

Algunos algoritmos denominados topológico-tolerantes simplifican mallas con regiones que localmente no son variedades y optan por no simplificar esas regiones. Los algoritmos clasificados dentro de los que modifican la topología pueden cerrar agujeros “fusionando” vértices que no están conectados por una arista y permitiendo la formación de un único objeto de un conjunto de objetos que inicialmente estaban separados. Incluso, como se ha comentado en la introducción, hay un grupo de métodos, llamados métodos de simplificación topológica, que se caracterizan por simplificar la malla en base a su estructura topológica.

El algoritmo de simplificación estadística explicado en la sección anterior está basado en el método de contracción de aristas. Este tipo de métodos tienden a preservar la topología local del modelo si siempre “fusionan” vértices conectados por una arista, pero existen condiciones locales en las que se puede modificar la topología del modelo. La mayor parte de estos métodos que trabajan con superficies representadas por mallas triangulares, incluyen en sus algoritmos un test para evitar operaciones “inseguras” que produzcan inconsistencias en la topología de la superficie. Este test se basa en un invariante topológico, la característica de Euler [26]:

$$(4) \quad \chi = v - a + t = 2 - 2g$$

donde t , a y v son los números de triángulos, de aristas y de vértices y g es el género o número de agujeros de la superficie. Así, una contracción de arista preserva la topología de la superficie triangulada en tanto en cuanto la característica de Euler de la superficie permanezca igual. Por ejemplo, en una contracción de arista “segura” el número de vértices disminuye en uno, el número de triángulos disminuye en 2 y el número de aristas disminuye en tres.

$$(5) \quad \chi' = v' - a' + t' = (v - 1) - (a - 3) + (t - 2) = v - a + t$$

donde t' , a' y v' son los números de triángulos, de aristas y de vértices de la superficie simplificada. Partiendo de este hecho, si denotamos $N(v)$ al conjunto de vértices adyacentes a un vértice v , es decir, conectados directamente por una arista con v , diremos que una contracción de arista del interior de la superficie triangulada $(v_1, v_2) \rightarrow v$ es “segura” si $|N(v_1) \cap N(v_2)| = 2$, es decir el número de vértices comunes a los dos conjuntos es igual a 2. En muchos algoritmos se opta por realizar dos contracciones de arista “inseguras” consecutivas en lugar prohibir una. Esta operación “segura” se llama contracción o colapso de triángulo.

Todo lo dicho anteriormente va encaminado a no permitir que se realicen operaciones que modifican la topología de la malla, pero si se quiere utilizar el algoritmo de simplificación estadística y a la vez preservar la topología del modelo, será necesario determinar las condiciones bajo las cuales esto es posible.

En este sentido, Dey et al. realizaron un importante estudio [27] [4] de las condiciones que permiten que se realicen contracciones de aristas sin que se destruya

la topología de un modelo original. El estudio llevado a cabo por Dey y extendido después en otros trabajos [28] se centra en las contracciones de aristas en complejos simpliciales con objeto de determinar los criterios locales bajo los cuales se preserva el tipo topológico.

La contracción de una arista es la forma más sencilla de agrupar vértices por medio de la fusión de dos vértices adyacentes o vecinos (conectados directamente por una arista). En notación matemática, el enlace (link) de una celda σ (una celda puede ser un vértice, una arista o una cara) en una malla denotado por $Lk \sigma$ consiste en las celdas distintas de σ pero contenidas en una celda que contiene σ . Dicho de otro modo, si la estrella de σ , denotada por $St \sigma$, se define como las celdas que contiene σ y el cierre de σ , denotado por $\bar{\sigma}$ se define como las celdas que están contenidas en σ , el enlace de una celda σ es el conjunto de celdas en $\overline{St \sigma}$ pero no en $St \bar{\sigma}$, es decir $Lk \sigma = \overline{St \sigma} - St \bar{\sigma}$. Es un concepto relacionado con el complemento de la estrella de σ , denotado por $Cs \sigma$, definido como $\overline{St \sigma} - St \sigma$. Si σ es un vértice su enlace y el complemento de su estrella es el mismo. Añadir también que la estrella de un subconjunto de celdas S se define como la unión de sus estrellas $St S = \bigcup_{\sigma \in S} St \sigma$.

Así, la contracción de una arista ab en un 2-complejo K sustituye la estrella del cierre de la arista $St \bar{ab} = St \bar{a} \cup St \bar{b}$ por la estrella del nuevo vértice c . En el campo de la topología general, una operación preserva la topología si existe un homeomorfismo entre las superficies de la malla antes y después de la operación. Dey et al. concluyeron que la condición que hace que una contracción de una arista preserve o no la topología, o lo que es lo mismo, que exista un homeomorfismo entre los complejos antes y después de la contracción, depende de la relación entre los enlaces de las celdas envueltas, es lo que Dey llama la condición enlace (The link condition). En el caso de que K sea una triangulación de una 2-variedad la contracción de $ab \in K$ preserva el tipo topológico si y sólo si $Lk a \cap Lk b = Lk ab$. La figura 3, muestra gráficamente cuándo se cumple la condición enlace y cuándo no.

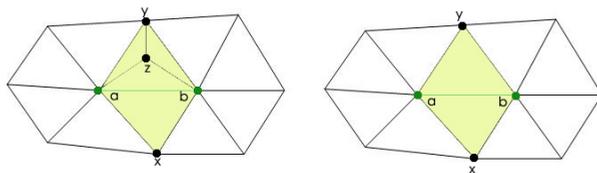


FIGURA 3. Ejemplo de contracción de arista. A la izquierda no se cumple la condición enlace: $Lk a \cap Lk b = \{x, y, z, zy\} \neq Lk ab$. A la derecha se cumple $Lk a \cap Lk b = \{x, y\} = Lk ab$.

Una vez explicada la preservación de la topología en la simplificación de objetos individuales por el método de contracción de aristas, cabría plantearse, en relación a la preservación de la topología en el algoritmo de simplificación estadística, o en otro tipo de algoritmos basados en la contracción de la misma arista de un conjunto

de mallas triangulares con la misma conectividad y distinta posición de los vértices (por eso reciben también el nombre de mallas deformables), si, una vez que se ha preservado la topología en la simplificación de la forma media o en alguna de las mallas triangulares de la población según la condición explicada anteriormente, se puede decir que también se preservará la topología en la simplificación del resto de instancias de la población (o en que casos esto ocurre) dado que todas las instancias de la población tienen la misma conectividad y dado que se contrae la misma arista en todas ellas.

También habría que estudiar las condiciones bajo las cuales una contracción de arista en la forma media es una operación “segura” para la preservación de la topología en todas las instancias de la población, sin tener que evaluar que son seguras las contracciones de la misma arista en todas y cada una de las instancias de la población.

4. CONCLUSIONES

El trabajo que se ha presentado aquí es apenas una introducción a un tema de investigación (la preservación de la topología en la simplificación de mallas que representan poblaciones de objetos o mallas deformables) que sólo se puede estudiar formalmente mediante el trabajo conjunto de personas de distintas áreas como puede ser la Informática Gráfica y la Topología. El obstáculo del lenguaje y la investigación departamental, entre otras cosas, hace que sea muy difícil este tipo de colaboraciones multidisciplinares, que por otro lado serían muy fructíferas y provechosas. La autora está convencida de que hubiera podido colaborar en un futuro con Mirian para poder profundizar más en el problema que aquí se expone, por eso ha hecho el esfuerzo de salir de su ámbito y su lenguaje “natural” para hacer una pequeña intromisión en el área matemática de la Topología.

REFERENCIAS

- [1] E. GARCÍA, S. BALDASSARRI, S. OLMOS. Simplificación Estadística de una población de objetos 3D. En *CEIG 2008*, L. Matey and J. C. Torres (eds.), pp. 225–232. Barcelona, Spain, 2008.
- [2] L. LAMBÁN, M. ANDRÉS. First efforts to increase the reliability of kenzo using acl2. En *EACA 2008*, pp. 111–114. Granada, Spain, 2008.
- [3] T. K. DEY, H. EDELSBRUNNER, S. GUHA. Computational topology. En *Advances in Discrete and Computational Geometry*, pp. 109–143. American Mathematical Society, 1999.
- [4] H. EDELSBRUNNER, M. J. ABLOWITZ, S. H. DAVIS, E. J. HINCH, A. ISERLES, J. OCKENDON, P. J. OLVER. *Geometry and Topology for Mesh Generation*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2006.
- [5] A. J. ZOMORODIAN, M. J. ABLOWITZ, S. H. DAVIS, E. J. HINCH, A. ISERLES, J. OCKENDON, P. J. OLVER. *Topology for Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2005.
- [6] X. NI, M. GARLAND, J. C. HART. Fair morse functions for extracting the topological structure of a surface mesh. En *SIGGRAPH '04*, pp. 613–622. ACM Press, New York, NY, USA, 2004.
- [7] Z. WOOD, H. HOPPE, M. DESBRUN, P. SCHRÖDER. Removing excess topology from isosurfaces. *ACM Trans. Graph.* **23**(2), 190–208, 2004.
- [8] J. EL-SANA, A. VARSHNEY. Controlled simplification of genus for polygonal models. En *VIS '97*, pp. 403–f. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 1997.

- [9] M. GARLAND, P. S. HECKBERT. Surface simplification using quadric error metrics. En *Proc. SIGGRAPH '97*, pp. 209–216. ACM Press, New York, NY, USA, 1997.
- [10] M. GARLAND, Y. ZHOU. Quadric-based simplification in any dimension. *ACM Trans. Graph.* **24**(2), 209–239, 2005.
- [11] W. J. SCHROEDER, J. A. ZARGE, W. E. LORENSEN. Decimation of triangle meshes. *SIGGRAPH Comput. Graph.* **26**(2), 65–70, 1992.
- [12] K. LOW, T. TAN. Model simplification using vertex-clustering. En *SI3D '97*, pp. 75–ff, 1997.
- [13] P. LINDSTROM. Out-of-core simplification of large polygonal models. En *SIGGRAPH '00*, pp. 259–262. ACM Press, New York, NY, USA, 2000.
- [14] A. D. KALVIN, R. H. TAYLOR. Superfaces: Polygonal mesh simplification with bounded error. *IEEE Comput. Graph. Appl.* **16**(3), 64–77, 1996.
- [15] M. GARLAND, P. S. HECKBERT. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. En *IEEE Visualization '98*, D. Ebert, H. Hagen and H. Rushmeier (eds.), pp. 263–270. 1998.
- [16] H. HOPPE. New quadric metric for simplifying meshes with appearance attributes. En *IEEE Visualization '99*, D. Ebert, M. Gross and B. Hamann (eds.), pp. 59–66. San Francisco, 1999.
- [17] J. COHEN, M. OLANO, D. MANOCHA. Appearance-preserving simplification. En *SIGGRAPH '98*, pp. 115–122. ACM Press, New York, NY, USA, 1998.
- [18] J. JANG, W. RIBARSKY, C. SHAW, P. WONKA. Appearance-preserving view-dependent visualization. En *VIS '03*, pp. 62. IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2003.
- [19] A. MOHR, M. GLEICHER. *Deformation sensitive decimation*. Technical report, University of Wisconsin, 2003.
- [20] C. DECORO, S. RUSINKIEWICZ. Pose-independent simplification of articulated meshes. En *Symposium on Interactive 3D Graphics*, 2005.
- [21] S. KIRCHER, M. GARLAND. Progressive multiresolution meshes for deforming surfaces. En *SCA '05*, pp. 191–200. ACM Press, New York, NY, USA, 2005.
- [22] F. HUANG, B. CHEN, Y. CHUANG. Progressive deforming meshes based on deformation oriented decimation and dynamic connectivity updating. En *SCA '06*, pp. 53–62. Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2006.
- [23] T. F. COOTES, C. J. TAYLOR, D. H. COOPER, J. GRAHAM. Active shape models: their training and application. *Comput. Vis. Image Underst.* **61**(1), 38–59, 1995.
- [24] J. R. MUNKRES. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley, 1984.
- [25] D. LUEBKE, B. WATSON, J. D. COHEN, M. REDDY, A. VARSHNEY. *Level of detail for 3d graphics*. Elsevier Science Inc., 2002.
- [26] W. S. MASSEY. *Introducción a la topología algebraica*. Ed. Reverté, 1972.
- [27] T. K. DEY, H. EDELSBRUNNER, S. GUHA, D. V. NEKHAYEV. Topology preserving edge contraction. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S)* **66**, 23–45, 1998.
- [28] X. JIAO, M. T. HEATH. Overlaying surface meshes, part ii: topology preservation and feature matching. *Int. J. Comput. Geometry Appl.* **14**(6), 403–419, 2004.

DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD LA RIOJA, SPAIN
 Correo electrónico: elsa.garcia@unirioja.es