SOBRE CIERTOS POLINOMIOS DE DOS VARIABLES ANALOGOS A LOS DE LAGUERRE

por

CLOTILDE A. BULA
Rosario

Es conocido el sistema $\{L_n(x)\}$ de polinomios de Laguerre (1); son polinomios de una variable; n indica el grado del polinomio y también el orden que le corresponde en la sucesión. Como se sabe, estos polinomios constituyen un sistema ortogonal ponderado, en el intervalo $(0, \infty)$; e^{-x} es la función de ponderación; por lo tanto, verifican la siguiente condición:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) \, dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases} \qquad [1]$$

El sistema $\{L_n(x)\}$ está formado por una infinitud numerable de polinomios (2).

El problema que nos proponemos es encontrar un sistema de polinomios de dos variables que puedan considerarse como extensión lógica de los polinomios de Laguerre de una. Designaremos a dicho sistema por $\{L_{r,s}(x, y)\}$ donde r, s indicará el grado del último término del polinomio. El sistema $\{L_{r,s}(x, y)\}$, deberá cumplir una condición de ortogonalidad análoga a la [1], es decir, que la integral doble del producto de dos polinomios distintos por una función de ponderación $F(x, y)$ — que deberemos determinar — será nula cuando cualquiera de los índices sea distinto y no lo será cuando sean iguales. Por lo tanto deberá ser:

(1) LAGUERRE, E. DE, *Oeuvres*, I, págs. 428-437.

(2) SCHMIDT, ERHARD, *Sur la puissance des systèmes orthogonaux de fonctions continues*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1906, T. 143, pág. 955.

$$\iint_D F(x,y)\, L_{m,n}(x,y)\, L_{p,q}(x,y)\, dx\, dy \begin{cases} = 0 & m,n \neq p,q \\ \neq 0 & m,n = p,q \end{cases} \qquad [2]$$

siendo D el dominio —finito o infinito— en que está definida $F(x,y)$.

La introducción de los polinomios de dos variables cumpliendo la condición [2] es debida a F. L. Gaspar quien, en un primer trabajo dió a conocer el sistema ortogonal ponderado con la función de Bravais como función de ponderación (3), cumpliéndose, por lo tanto, la propiedad de ortogonalidad en todo el plano; y en trabajo posterior dó a conocer el sistema ortogonal de dos variables análogo al sistema de Legendre de una. En este caso, el sistema es ortogonal en sentido estricto o sin ponderación y la propiedad de ortogonalidad —que debe cumplirse en dominio necesariamente finito— se cumple en el dominio definido por el círculo de radio 1 (4).

No se conocen otros sistemas ortogonales en dos variables que cumplan la condición de ortogonalidad [2].

Para definir un sistema de polinomios de dos variables análogo al de Laguerre de una, parece natural adoptar como función de ponderación $F(x,y)$ la exponencial $K \,.\, e^{-(x^2+y^2)^{1/2}}$ ($K =$ constante), por lo tanto en [2] será:

$$F(x,y) = K \,.\, e^{-(x^2+y^2)^{1/2}}$$

Es:

(I) $$F(x,y) > 0$$

en todo el plano y la constante K debe determinarse en forma que sea:

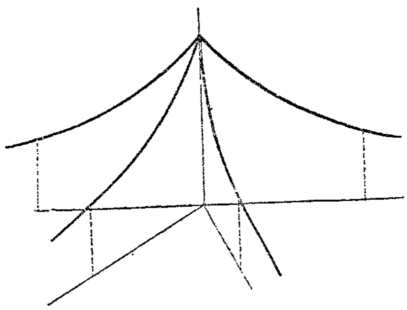
(3) GASPAR, FERNANDO L., *Sobre los polinomios ortogonales de dos variables y generalización de la superficie de Bravais*, en Anales de la Sociedad Científica Argentina, febrero de 1936, E. II, T. CXXI, pág. 74 y sigte.

(4) GASPAR FERNANDO L., *La ortogonalidad sin ponderación. El problema de Hermite*, en Anales de la Sociedad Científica Argentina, febrero de 1937, E. III, T. CXXIV, págs. 176-193.

(II) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Las condiciones (I) y (II) son las que deben cumplir las funciones de ponderación de los sistemas de polinomios ortogonales, condiciones que, como es sabido, cumplen las funciones de probabilidad.

Llamando *curva de Laguerre* a la definida, en el intervalo $(0,\infty)$, por la exponencial e^{-x}, $F(x,y)$ define una superficie de revolución alrededor del eje z en que la generatriz es una *curva de Laguerre*. Por ser de revolución, la superficie es simétrica respecto del eje z y sus secciones por planos normales al (x,y) pasando por dicho eje, son todas *curvas de Laguerre,* como se ve en el dibujo.



Es conocido el teorema (5): *Los polinomios de un sistema* $\{\lambda_{m,n}(x,y)\}$ *que en el dominio —finito o infinito— D, son ortogonales respecto de una función* $F(x,y) \geqq 0$ *en D, pueden, siempre, expresarse en forma de determinante.* Teorema válido para los sistemas de polinomios sin ponderar con la restricción, en este caso, de que el dominio sea finito como se ha dicho.

Para definir en forma de determinante los polinomios del sistema $\{L'_{r,s}(x,y)\}$ debemos, ante todo, escoger un orden de formación, cuestión que pasa desapercibida cuando se trata de sistemas ortogonales de una variable que se ordenan naturalmente se-

(5) GASPAR, FERNANDO L., *Sobre los desarrollos en serie de polinomios ortogonales de varias variables,* Publicaciones de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc., Nº 15, pág. 30, Rosario, 1938.

gún las potencias crecientes de dicha variable y entonces grado y rango coinciden. Nosotros vamos a ordenar el sistema $\{L_{r,s}(x,y)\}$ según las potencias crecientes de x. Normalizando el sistema en forma que el coeficiente del último término de los polinomios sea la unidad positiva, un $L_{r,s}(x, y)$ genérico, se define en forma de determinante así:

$$L_{r,s}(x,y) = \frac{(-1)^{s+\sum\limits_{v=1}^{r+s} v}}{\Delta_{r,s}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \dots & x^{r+1}y^{s-1} & x^r y^s \\ \mu_{0,0} & \mu_{1,0} & \mu_{0,1} & \mu_{2,0} & \mu_{1,1} & \mu_{0,2} & \dots & \mu_{r+1,s-1} & \mu_{r,s} \\ \mu_{1,0} & \mu_{2,0} & \mu_{1,1} & \mu_{3,0} & \mu_{2,1} & \mu_{1,2} & \dots & \mu_{r+2,s-1} & \mu_{r+1,s} \\ \mu_{0,1} & \mu_{1,1} & \mu_{0,2} & \mu_{2,1} & \mu_{1,2} & \mu_{0,3} & \dots & \mu_{r+1,s} & \mu_{r,s+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1,s-1} & \mu_{r+2,s-1} & \mu_{r+1,s} & \mu_{r+3,s-1} & \mu_{r+2,s} & \mu_{r+1,s+1} & \dots & \mu_{2(r+1),2(s-1)} & \mu_{2r+1,2s-1} \end{vmatrix} \qquad [3]$$

La constante multiplicativa $\dfrac{(-1)^{s+\sum\limits_{v=1}^{r+s} v}}{\Delta_{r,s}}$ hace que el coeficiente de $x^r y^s$ sea la unidad positiva.

$\Delta_{r,s}$ es el menor complementario de x^r, y^s último término del polinomio.

Resulta entonces:

$$L_{r,s}(x,y) = \gamma_{r,s/0,0} + \gamma_{r,s/1,0}\, x + \gamma_{r,s/0,1}\, y + \gamma_{r,s/2,0}\, x^2 + \\ + \gamma_{r,s/1,1}\, xy + \gamma_{r,s/0,2}\, y^2 + \dots + \gamma_{r,s/r,s}\, x^r y^s. \qquad [4]$$

Por lo tanto, es:

$$L_{r,s}(x,y) = \sum_{l=0}^{r+s} \sum_{j=0}^{l} \gamma_{r,s/l-j,j}\, x^{l-j} y^j. \qquad [5]$$

El desarrollo de la sumatoria externa termina con la potencia $x^r y^s$ siendo:

$$\gamma_{r,s/r,s} = 1.$$

La sucesión completa de los polinomios es, de acuerdo a la ordenación adoptada:

$$L_{n-j.j}(x, y) \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \infty \\ j = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \qquad [6]$$

El determinante [3] tiene cierta analogía con los que Hankel (6) llamó *ortosimétricos* y verifican una notable fórmula de recurrencia por la cual el cálculo de uno de ellos depende de los dos anteriores (7). Los menores $\Delta_{r,s}$, son determinantes de Hankel. Los elementos de dicho determinante son los números $\mu_{j.k}$ $(j, k = 0{,}0;\ 1{,}0;\ 0{,}1;\ 2{,}0;\ 1{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots)$ definidos así:

$$\mu_{j,k} = K \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)^{1/2}}\, x^j \,.\, y^k\, dx\, dy \qquad [7]$$

y se llaman también los *momentos* de la función de ponderación.

Calculada la constante K para que la condición (II) se cumpla, resulta:

$$K = \frac{1}{2\pi}.$$

Por ser la superficie que define $K \,.\, e^{-(x^2+y^2)^{1/2}}$ simétrica y estar el origen en el punto $(0, 0)$, los momentos $\mu_{j.k}$ son nulos cuando cualquiera de los dos índices, o ambos, son impares. Es decir que:

$$\mu_{2j\pm1,2k} = 0; \quad \mu_{2j.2k\pm1} = 0; \quad \mu_{2j\pm1,2k\pm1} = 0.$$

Por la misma razón de la simetría de la superficie, es:

$$\mu_{j.k} = \mu_{k,j}.$$

(6) HANKEL, H., *Ueber eine besondere Klasse der symmetrischen Determinanten*, Göttingen, 1861.

(7) JACOBI, C. G., *Obras*, Vol. III, pág. 315.

GASPAR, FERNANDO L., *Sobre algunas series funcionales*, Publicaciones de la Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. Nº 10, pág. 63, Rosario, 1937.

Para determinar los momentos no nulos, de ambos índices pares, necesarios para calcular los diez primeros polinomios del sistema, pasamos, en la integral [7], a coordenadas polares y se tiene:

$$\mu_{2n,2m} = \mu_{2m,2n} = \frac{2n-1}{2m+1} \; \mu_{2m+2,2n-2} \qquad \begin{cases} m = 1, \; 2, \; \ldots \\ n = 1, \; 2, \; \ldots \end{cases}$$

que expresa el valor de los momentos de ambos índices pares, cada uno en función del anterior. Esta fórmula cae en defecto cuando uno de los índices es cero; para este caso se tiene:

$$\mu_{2j,0} = \mu_{0,2j} = \frac{(2j+1)!!\,(2j-1)!!}{(2j)!!} \text{ [8]} \qquad (j = 2, \; 3, \; \ldots)$$

Esta fórmula cae, a su vez, en defecto cuando es $j=0$ o $j=1$, por tanto, no sirve para calcular $\mu_{0,0}$ ni $\mu_{2,0} = \mu_{0,2}$ que deben ser calculados directamente y en definitiva se tiene el siguiente repertorio de los $\mu_{j,k}$, a saber:

$$\begin{array}{llll}
 & \mu_{0,0} = 1 & & \\
j+k=2: & \mu_{2,0} = \mu_{0,2} = 3 & & \\
j+k=4: & \mu_{4,0} = \mu_{0,4} = 415; & \mu_{2,2} = 15 & \\
j+k=6: & \mu_{6,0} = \mu_{06} = 1575; & \mu_{4,2} = \mu_{2,4} = 315 & \\
j+k=8: & \mu_{8,0} = \mu_{0,8} = 99225; & \mu_{6,2} = \mu_{2,6} = 14175; & \mu_{4,4} = 8505 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Efectuado el cálculo de los polinomios y poniendo $L_{0,0} = 1$, se tiene el siguiente repertorio:

$$L_{0,0} = 1$$

$$L_{1,0} = x$$

$$L_{0,1} = y$$

---

(8) Recordemos que el símbolo $n!!$ expresa el *semifactorial* de n:

$(2n-1)!! = 1.3,5\ldots(2n-1)$; $(2n)!! = 2,4,6\ldots.(2n)$

$$L_{2,0} = -3 + x^2$$

$$L_{1,1} = xy$$

$$L_{0,2} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{6} x^2 + y^2$$

$$L_{3,0} = -15x + x^3$$

$$L_{2,1} = -5y + x^2 y$$

$$L_{1,2} = -\frac{7}{2} x - \frac{1}{10} x^3 + xy^2$$

$$L_{0,3} = -\frac{105}{8} y - \frac{3}{8} x^2 y + y^3$$

....

La demostración de la propiedad de ortogonalidad que define [2] es inmediata: siendo $m,n \neq p,q$, $L_{m,n}$ y $L_{p,q}$ serán de distinto rango en la sucesión [6].

Supongamos que $L_{p,q}(x,y)$ sea el de rango mayor; entonces, tal como se han definido los polinomios y expresa [5], $L_{p,q}(x,y)$ contiene todas las potencias de x,y contenidas en $L_{m,n}(x,y)$. Si en la integral [2] escribimos en forma de determinante, al polinomio de rango superior $L_{p,q}(x,y)$ y en la forma [4] al de rango inferior $L_{m,n}(x,y)$, teniendo en cuenta la [7] al ejecutar la doble integración se tiene una suma de determinantes en todos los cuales la primera fila resulta igual a alguna de las $q + \sum_{v=1}^{p+q} v$ siguientes, con lo cual se produce el anulamiento de los determinantes y, por lo tanto, de la suma y de la integral. En el caso de no anulamiento se tendrá:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)^{1/2}} L^2_{m+1,n+1}(x,y)\, dx\, dy = \frac{\Delta_{m.n+2}}{\Delta_{m+1\, n+1}} > 0.$$

Dada una función arbitraria $f(x,y)$ integrable y de cuadrado integrable, la serie:

$$\omega_{0,0} L_{0,0}(x,y) + \omega_{1,0} L_{1,0}(x,y) + \ldots + \omega_{m.n} L_{m.n}(x,y) + \cdots$$

cuyos coeficientes son las integrales:

$$\omega_{j,k} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, F(x,y)\, L_{j,k}(x,y)\, dx\, dy}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, L^2_{j,k}(x,y)\, dx\, dy}, \qquad [8]$$

considerada de una manera puramente formal, sea o no convergente, la llamaremos, por analogía con los desarrollos en serie de Fourier, *desarrollo de la función $F(x, y)$ según el sistema ortogonal $\{L_{r,s}(x, y)\}$ o la serie generalizada de Fourier de $f(x, y)$*. También por analogía con los desarrollos en serie de Fourier, llamaremos a las integrales [8] *constantes de Fourier de $f(x, y)$ respecto del sistema ortogonal $\{L_{r,s}(x, y)\}$*).

En las aplicaciones conviene adoptar esta otra forma de desarrollo en serie:

$$F(x, y)\,[\Omega_{0,0}\, L_{0,0}(x, y) + \Omega_{1,0}\, L_{1,0}(x, y) + \ldots + \Omega_{m,n}\, L_{m,n}(x, y) + \ldots].$$

siendo ahora la expresión de los coeficientes, la siguiente:

$$\Omega_{j,k} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, L_{j,k}(x,y)\, dx\, dy}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, L^2_{j,k}(x,y)\, dx\, dy}. \qquad [9]$$

Por ser $L_{0,0}(x, y) = 1$ e imponerse, en las aplicaciones, la igualdad de los momentos teóricos y experimentales hasta los de un cierto orden, que incluye, siempre, la igualdad de los momentos de orden 0,0, resulta $\Omega_{0,0} = 1$, siendo conveniente, desde el punto de vista práctico, limitar los desarrollos hasta los polinomios de 4.º grado inclusive, en forma de evitar que intervengan en los cálculos los momentos dobles $\mu_{j,k}$ definidos según [7], tales que sea $j + k > 4$. El desarrollo entonces toma la forma:

$$F(x, y)\,[1 + \sum_{m=1}^{4} \sum_{n=0}^{m} \Omega_{m-n,n}\, L_{m-n,n}(x, y)]. \qquad [10]$$

En estos casos la superficie definida por la función de ponderación: $F(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)^{1/2}}$ resulta una superficie de primera aproximación respecto de la superficie experimental que se trata de definir.

La conveniencia de utilizar esta función y el sistema $\{L_{rs}(x, y)\}$ que de ella se deriva, en vez de emplear otra función como podría ser la de Bravais y el correspondiente sistema de polinomios, dependerá de un análisis previo de la superficie experimental tendiente a determinar, por las características de dicha superficie, que sistema es el más conveniente.

Los coeficientes Ω calculados según [9], hacen que el desarrollo [10] cumpla una importante condición de mínimo. Haciendo

$$\sigma_{m,n}(x, y) = F(x, y) \left[\Omega_{0,0} L_{0,0}(x, y) + \Omega_{1,0} L_{1,0}(x, y) + \ldots + \Omega_{m,n} L_{m,n}(x, y)\right]$$

dichos coeficientes no hacen mínimo el error integral cuadrático

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x, y) - \sigma_{m,n}(x, y)]^2 \, dx \, dy \, ; \qquad [11]$$

en cambio, hacen mínimo el error integral cuadrático expresado de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{f(x,y)}{\sqrt{F(x,y)}} - \sqrt{F(x, y)} \left[\Omega_{0,0} L_{0,0}(x, y) + \Omega_{1,0} L_{1,0}(x, y) + \ldots + \Omega_{m,n} L_{m,n}(x, y)\right] \right\}^2 dx \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{F(x,y)}} [f(x, y) - \sigma_{m,n}(x, y)]^2 \, dx \, dy$$

que no es otra cosa que el error integral cuadrático [11] con el factor de ponderación $\dfrac{1}{\sqrt{F(x,y)}}$.

$\dfrac{1}{\sqrt{F(x,y)}}$ es creciente, por lo tanto, en la medida del error influyen, preponderantemente, los pares x, y más alejados del origen.

Una extensión de los polinomios de Laguerre de una variable se obtiene incorporando a la función de ponderación e^{-x} el factor x^{α} $(\alpha > -1)$; el sistema se designa, entonces, por $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$ y la condiión de ortogonalidad de este sistema es, por tanto, la siguiente:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) \; L_m^{(\alpha)}(x) \, dx \begin{cases} = 0 & n \neq m \\ \neq 0 & n = m. \end{cases}$$

Análoga extensión cabe efectuar en el sistema $\{L_{r,s}(x, y)\}$ incorporando a la función de ponderación $\frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)^{1/2}}$ los factores $x^{\alpha} y^{\beta}$; tendríamos el sistema $\{L_{r,s}^{(\alpha,\beta)}(x, y)\}$ con la restricción, en este caso, de que deben ser:

$$\alpha = 2m \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots); \ \beta = 2n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$