SUR LES CONVERGENCES FAIBLE ET FORTE DANS L'ESPACE D' HILBERT

par

GASTON JULIA
Membre de l'Institut de France

§ 1

1. - Nous considérons un espace hilbertien [H] rapporté a la base orthonormale complète (1) (e_k). Soit (A^n) une suite de vecteurs de cet espace, chacun d' entr'eux ayant les coordonnées (2) $x_k^n = (e_k, A^n)$. La suite (A^n) converge *faiblement* pour $n = \infty$, si:

1.° *chacune des suites* (x_k^n) *converge pour* $n = \infty$.

2.° *chacune des normes* $\|A^n\|^2 = \Sigma |x_k^n|^2$ *reste inférieure à un nombre fixe* M.

Cette définition comporte 2 éléments hétérogènes: les coordonnées $x_k^n = (e_k, A^n)$ qui sont des produits scalaires, linéaires par rapport aux A^n, les normes $\Sigma (x_k^n)^2$, qui sont quadratiques par rapport aux A^n.

On a cherché dans diverses voies à rendre homogène la définition précédente.

2. - Banach (3) a preuvé que la définition précédente équivaut à la suivante:

La suite (A^n) converge faiblement si (A^n, X) *converge pour* $n = \infty$ *quelquesoit le vecteur* X *de* [H]. L'hypothèse de la convergence quelquesoit X de [H] entraîne, en effet, en vertu d'un lemme analogue à celui d'Osgood (4) pour les suites de fonctions

(1) En abrégé ONC. On écrira aussi quelquefois ON pour orthonormal.

(2) Critère Hilbert - E. Schmidt - F. Riesz. Voir p. ex JULIA: *Introd. math. aux théories quantiques* 2e. Partie pag. 20.

(3) V. BANACH. *Théorie des opérations linéaires* - Chapitres VIII, IX.

(4) V. JULIA. *La théorie des fonctions et la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien.* Journal de Math. - tome 22, 1943, n° 1, p. 73.

holomorphes l'existence d'une borne supérieure pour toutes les normes $\|A^n\|^2$ (conditions 2.°); d'autre part pour $X=e_k$ on obtient les conditions 1.°, et l'on voit aussitot que, dans ces conditions 1.°, les e_k peuvent etre remplacés par un *système complet quelconque* de vecteurs X_k les suites $x_k^n=(e_k, A^n)$ $(n=1, 2, \ldots \infty)$ du 1.° pouvant etre remplacées par les suites (x_k, A^n).

3. - J'ai prouvé récemment (5) qu'on pouvait rendre homogène la définition en abandonnant les produits scalaires des conditions 1.° et ne considérant que des normes ou des distances.

(A^n) converge faiblement si, et seulement si, la différence $\|A^n-X\|^2-\|A^n-X'\|^2$ converge quelquesoient les points fixes X et X' de [H]. L'un de ces points peut être mis l'origine O, l'autre X restant arbitraire, et la condition nécessaire et suffisante exprime que $\|A^n-X\|^2-\|A^n\|^2$ *converge pour $n=\infty$, quelquesoit le point fixe X.*

4. - La limite faible α de A^n est un point de [H] qui, sous chacune des conditions équivalentes donnés aux nos. 1, 2, 3, se caractérise aisément:

a) soit par les valeurs $(e_k, \alpha)=\lim (e_k, A^n)$;

b) soit par une propriété d'extrémum signalée dans la note (5).

Nous désignerons par $A^n \rightharpoonup \alpha$ la convergence faible de A^n vers α.

5. - *La suite (A^n) converge fortement si, et seulement si, (règle de Cauchy)* (6) *pour tout $\varepsilon>0$ on peut déterminer un $N(\varepsilon)$ tel que $\|A^{n+p}-A^n\|<\varepsilon$ dès que $n>N(\varepsilon)$, quelquesoit $p>0$.* Il est clair qu'alors toutes les normes $\|A^n\|^2$ sont inférieures à un M fixe et que $|x_k^{n+p}-x_k^n|\leqq\|A^{n+p}-A^n\|<\varepsilon$ entraîne la convergence des suites (x_k^n).

Toute suite convergeant fortement converge aussi faiblement. Si α est alors la limite faible de A^n, on voit que $\|\alpha-A^n\|\rightarrow 0$. Nous dirons que α est limite forte de A^n et nous écrirons $A^n \rightarrow \alpha$.

L'inverse n'est pas vrai, la suite (e_n) étant faiblement, mais non fortement convergente.

---

(5) V. JULIA, C. R. Acad. Sc. de Paris, t. 216. 1943, p. 97-100.

(6) V. E. SCHMIDT. Rend. del Circolo Matematico dí Palermo 1908, ou JULIA. *Introd. Math.* 2e. partie. p. 14.

6. - On a cherché quelles conditions ajouter à la condition de convergence faible pour entraîner la convergence forte, et, d'autre part, on peut réclamer que les conditions à ajouter soient relatives aux éléments figurant dans les conditions des nos. 2 et 3 de manière à obtenir un ensemble de conditions de convergence forte bien homogène comme l'est la condition du N.o 5.

On a montré (7) que la condition $\|\alpha\|^2 = \lim \|A^n\|^2$, jointe aux conditions du n°. 1 pour la convergence faible de A^n vers α, entraîne la convergence forte $A^n \longrightarrow \alpha$. Mais cette condition, hétérogène aux conditions 1.°, fait aussi intervenir dans le critère la valeur limite α. A ce double titre les conditions suivantes, qui, à ma connaissance, sont nouvelles, complètent d'une façon homogène les conditions des Nos 2 et 3 pour donner des conditions nécessaires et suffisantes de convergence forte.

7. - La condition nécessaire et suffisante pour que A^n converge fortement pour $n = \infty$ est que (A^n, X) *converge pour* $n = \infty$ *quelquesoit* X *de* [H], et cela *uniformément sur la sphère* $\|X\| = 1$; c'est à dire qu'à tout $\varepsilon > 0$ doit correspondre un $N(\varepsilon)$, tel que $|(A^{n+p}, X) - (A^n, X)| < \varepsilon$ soit réalisé pour $n > N(\varepsilon)$, *quelquesoient* $p > 0$ *et* X *sur* $\|X\| = 1$.

À la convergence uniforme sur la sphère $\|X\| = 1$ on peut d'ailleurs substituer sans inconvénient la *convergence uniforme dans ou sur toute sphère de* [H] *contenant l'origine,* ou dans un *domaine borné quelconque contenant l'origine.*

La condition est nécessaire. Car $\|A^{n+p} - A^n\| < \varepsilon$, pour $n > N(\varepsilon)$, quelquesoit $p > 0$ entraîne:

$$|(A^{n+p}, X) - (A^n, X)| = |(A^{n+p}, A^n, X)| < \varepsilon \|X\|$$

quelquesoient X et par conséquent

$$|(A^{n+p}, X) - (A^n, X)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > N(\varepsilon),$$

quelquesoient $p > 0$ et X sur $\|X\| = 1$.

(7) V. Julia. *Introd. Math.* 2e. partie, p. 18-20. La condition est due je crois, à F. Riesz.

La condition est suffisante. Car $|(A^{n+p}, X) - (A^n, X)| < \varepsilon$ pour $n > N(\varepsilon)$, quelquesoient $p > 0$ et X sur $\|X\| = 1$ entraîne:

$$|(A^{n+p}, A^n, X)| < \varepsilon,$$

et, en prenant, sur $\|X\| = 1$, le point $X_0 = \dfrac{A^{n+p} - A^n}{\|A^{n+p} - A^n\|}$, il viendra

$$|(A^{n+p}, A^n, X_0)| = \|A^{n+p} - A^n\| < \varepsilon,$$

qui est la condition du n°. 5 pour la convergence forte.

Il est clair que, α étant la limite faible de A^n, on pourra encore dire que la convergence de A^n vers α devient forte si, et seulement si, (A^n, X) *converge vers* (α, X) *uniformément sur la sphère* $\|X\| = 1$. Car la convergence de (A^n, X) vers (α, X) sur la sphère $\|X\| = 1$, entraîne la convergence de (A^n, X) pour tout X de [H], vers (α, X) et la convergence uniforme sur $\|X\| = 1$ entraîne la convergence forte $A^n \longrightarrow \alpha$.

8. - D'une manière analogue, le critère du n°. 3 devient un critère de convergence forte.

La condition nécessaire et suffisante pour que A^n *converge fortement est que* $\|A^n - X\|^2 - \|A^n\|^2$ *converge pour* $n = \infty$, *quelquesoit* X *de* [H], *et cela uniformément sur la sphère* $\|X\| = 1$; (ou sur toute sphère de [H] contenant l'origine), c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon)$ tel que $n > N(\varepsilon)$ entraîne, quelquesoient $p > 0$ et X sur $\|X\| = 1$,

$$|\|A^{n+p} - X\|^2 + \|A^n\|^2 - \|A - X\|^2 - \|A^{n+p}\|^2| < \varepsilon.$$

En effet, on a aisément,

$$\|A^n - X\|^2 - \|A^n\|^2 = -2\,\mathrm{R}(A^n, X) + \|X\|^2.$$

La condition donnée équivaut donc à la convergence uniforme de $\mathrm{R}(A^n, X)$ sur $\|X\| = 1$. Mais $(A^n, iX) = i(A^n, X)$. Donc $\mathrm{R}(A^n, iX) = \mathrm{J}(A^n, X)$. La convergence uniforme de $\mathrm{R}(A^n, X)$ sur $\|X\| = 1$ entraînant celle de $\mathrm{R}(A^n, iX)$, donc celle de $\mathrm{J}(A^n, X)$, entraîne celle de $(A^n, X) = \mathrm{R}(A^n, X) + i\mathrm{J}(A^n, X)$, c'est à dire la condition du n°. 7.

Réciproquement, la condition du n°. 7 entraîne la convergence uniforme de $\mathrm{R}(A^n, X)$, car

$$|\mathrm{R}(A^{n+p}, X) - \mathrm{R}(A^n, X)| < |(A^{n+p}, X) - (A^n, X)|.$$

Les conditions des Nos. 7 et 8 sont donc équivalentes.

9. - On voit ainsi clairement ce qui distingue les convergences faible et forte.

Si A^n converge faiblement et non fortement, (A^n, X) converge pour tout X de $\|X\| = 1$, *mais non uniformément*; donc il existe des $\varepsilon > 0$ tels que, si grand que soit N on puisse trouver $n > N$, $p > 0$, et X de $\|X\| = 1$, de façon que

$$|(A^{n+p}, X) - (A^n, X)| < \varepsilon;$$

C'est à dire qu'il existe au moins une suite $n_i \to \infty$, une suite de nombre positifs p_i convenables, et une suite X_i de points de $\|X\| = 1$ telles que:

$$|(A^{n_i+p_i}, X_i) - (A^{n_i}, X_i)| > \varepsilon,$$

ce qui entraîne évidemment

$$\|A^{n_i+p_i} - A^{n_i}\| > \varepsilon$$

et rend la convergence forte impossible.

De même la convergence de $\|A^n - X\|^2 - \|A^n\|^2$ non uniforme sur $\|X\| = 1$ entraîne comme précédemment l'existence de suites n_i, p_i, x_i telles que

$$|\|A^{n_i+p_i} - X_i\|^2 - \|A^{n_i+p_i}\|^2 - \|A^{n_i} - X_i\|^2 + \|A^{n_i}\|^2| > \varepsilon,$$

ou

$$|\mathrm{R}(A^{n_i+p_i}, X_i) - \mathrm{R}(A^{n_i}, X_i)| > \varepsilon,$$

donc

$$|(A^{n_i+p_i}, X_i) - (A^{n_i}, X_i)| > \varepsilon,$$

donc

$$\|A^{n_i+p_i} - A^{n_i}\| > \varepsilon.$$

§ 2

10. - Nous appliquerons les considérations du § 1 à l'extension du théorème suivant de Landau (8) d'un usage fréquent dans l'espace hilbertien. Si $\sum_1^\infty \bar{a}_k x_k$ *converge pour tout point* $X = \sum_1^\infty x_k e_k$ *de l'espace hilbertien* (c'est à dire pour tout système x_k tel que $\Sigma |x_k|^2$ converge), *les* a_k (ou les conjugués $\bar{a}_k$) *sont les coordonnées d'un vecteur* A *de cet espace, c'est à dire, que* $\Sigma |a_k|^2$ *converge.*

Pour démontrer très simplement ce théorème, considérons la suite des vecteurs $A^n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ de l'espace hilbertien. On a $(A^n, X) = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k x_k$ et l'hypothèse faite est que (A^n, X) converge pour tout X de [H]. Donc A^n converge faiblement.

Par suite

1.°) les $\|A_n\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$ sont bornées;

2.°) la série $\sum_1^\infty |a_k|^2$ est convergente;

3.°) $A = \sum_1^\infty a_k e_k$ est donc un point de [H];

4.°) $\|A - A^n\|^2 = \sum_{n+1}^\infty |a_k|^2$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Donc A^n converge fortement vers A; et l'on a

$$(A, X) = \sum_{K=1}^\infty \bar{a}_k x_k = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^n \bar{a}_k x_k = \lim_{n=\infty} (A^n, X)$$

pour tout X. Il est essentiel de noter que les hypothèses du théorème, entraînent la convergence uniforme de (A^n, X) sur tout $\|X\| = 1$, car

$$\begin{aligned} |(A^{n+p}, X) - (A^n, X)|^2 &= \sum_{n+1}^{n+p} |\bar{a}_k x_k|^2 \\ &\leqq (\sum_{n+1}^{n+p} |a_k|^2 \,.\, \|X\|^2 < \sum_{n+1}^{n+p} |a_k|^2 < \varepsilon^2, \end{aligned}$$

(8) V. JULIA. *Introd. Math.* 2e. partie p. 50-51. V. aussi Journal de Math. t. 22. 1943. p. 73. nº 1.

uniformément sur $\|X\|=1$, dès que $n>N(\varepsilon)$ quelquesoit $p>0$, à cause de la convergence de $\Sigma|a_k|^2$. C'est ce qui entraîne la convergence forte de A^n vers A et la convergence *uniforme* de $\sum_1^\infty \overline{a}_k x_k$ sur $\|X\|=1$ comme conséquence de la convergence de $\sum_1^\infty \overline{a}_k x_k$ supposée *sur tout* $\|X\|=1$; l'on peut donc énoncer ainsi le théorème précédent:

Si la serie $\sum_1^\infty \overline{a}_k x_k$ converge pour tout $X=\Sigma x_k e_k$ de [H] *(ou simplement de $\|X\|=1$, ou d'une sphère quelconque contenant l'origine), alors elle converge uniformément sur $\|X\|=1$, la série $\sum^\infty \overline{a}_k e_k$ converge fortement et sa somme A est un point de* [H], *tel que $\sum_1^\infty \overline{a}_k x_k=(A,X)$ pour tout X de* [H].

2. - Avec ce nouvel énoncé, l'extension suivante paraîtra toute naturelle. Supposons que $\sum_1^\infty \overline{a}_k x_k$ ne converge pas *pour tout* $X=\sum^\infty x_k e_k$ *de* [H], *mais converge pour tout X d'une variété linéaire fermée* $[V]\subset[H]$. Il est clair que $\Sigma\,|a_k|^2$ n'étant pas convergente, $A^n=\sum^n a_k e_k$ n'a aucune limite, faible ou forte, pour $n=\infty$ car $\|A_n\|^2\rightarrow\infty$. Mais chacun des vecteurs e_k se décompose en $e'_k\subset[V]$ et e''_k *orthogonal à* [V], c'est à dire situé dans la variété complémentaire $[H]-[V]$.

Lorsque $X\subset[V]$, on a $x_k=(e_k X)=(e'_k,X)$. Donc

$$\sum_1^n \overline{a}_k x_k=\sum_1^n \overline{a}_k(e'_k,X)=(\sum_1^n a_k e'_k,X).$$

On aura $A^n=A'^n+A''^n$, avec

$$A'^n=\sum_1^n a_k e'_k\subset[V],\ \text{et}\ A''_n=\sum_1^n a_k e''_k\subset[H]-[V].$$

Par suite

$$\sum_1^n \overline{a}_k x_k=(A'^n,X).$$

La variété [V] est un espace hilbertien, (qui peut se réduire à un espace unitaire si [V] n'a qu'un nombre fini de dimensions). Dans cet espace [V], (A'^n, X) converge quelquesoit X. Donc A'^n converge faiblement vers un point A' de [V] et la convergence sera forte si (A'^n, X) converge uniformément pour tous les points de $\|X\| = 1$ dans [V]. *On aura, pour tout* $X \subset [V]$,

$$(A', X) = \lim_{n=\infty} (A'^n, X) = \lim_{n=\infty} \sum_1^n \bar{a}_k x_k = \sum_1^\infty \bar{a}_k x_k.$$

Si $A' = \sum_1^\infty a_k e_k$ *on aura, dans* [V] *et dans* [V] *seulement*

$$\sum_1^\infty \bar{a}'_k x_k = \sum_1^\infty \bar{a}_k x_k$$

les a'_k étant les coordonnées d'un vecteur ($\sum |a'_k|^2$ convergente).

Il faut remarquer que, pour $p \neq 1$ on a en général dans [V], $\sum_{k=p}^\infty \bar{a}'_k x_k \neq \sum_{k=p}^\infty \bar{a}_k x_k$, *car les* a'_k *sont différents des* a_k.

Ainsi le point $A^n = \sum_1^n a_k e_k$ ne converge pas pour $n = \infty$ mais *sa projection sur* [V], $A'^n = \sum_1^n a_k e'_k$ *converge au moins faiblement* vers A'; la convergence sera forte si, et seulement si, $\sum \bar{a}_k x_k$ *converge uniformément pour tous les points de* $\|X\| = 1$ dans [V].

12. - Il est aisé de donner un exemple de cette convergence uniforme.

Prenons $[V] = [e_2, e_4, \ldots, e_{2n}, \ldots]$. C'est le lieu des $X = \sum_{k=1}^\infty x_{2k} e_{2k}$, avec $\sum |x_{2k}|^2$ convergente.

Prenons des a_k tels que

$$1.^o) \quad \sum_1^\infty |a_{2k-1}|^2 \text{ diverge}$$

$$2.^o) \quad \sum \bar{a}_k x_k \text{ converge.}$$

Il est visible que la série $\sum \bar{a}_k x_k$ se réduit pour tout $X \subset [V]$ à $\sum_1^\infty \bar{a}_{2k} x_{2k}$ et converge uniformément pour tout $\|X\| = 1$ de [V], sa somme étant (A', X) où $A' = \sum_1^\infty a_{2k} e_{2k}$.

Ici $A'^{2n} = \sum^{n} a_{2k} e_{2k} = A'^{2n+1}$ converge fortement vers A'.

Lorsque [V] *n'a qu'un nombre fini de dimensions,* la convergence faible de A'^n vers A' dans [V], est toujours forte, et le théoréme du n.º 11 est presque évident. En effet, $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ étant une base ONC de [V], on aura, posant

$$A'^n = \alpha_1^n \varepsilon_1 + \ldots + \alpha_p^n \varepsilon_p \quad \text{et} \quad X = \xi_1 \varepsilon_1 + \ldots + \xi_p \varepsilon_p,$$

$$(A'^n, X) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^n \xi_k.$$

La convergence faible de A'^n vers A' implique $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_k^n = \alpha_k$ *pour* $k = 1, 2, \ldots p$, avec $A' = \alpha_1 \varepsilon_1 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_p$ et

$$\|A'^n - A'\|^2 = \sum_{k=1}^{p} |\alpha_k^n - \alpha_k|^2$$

qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Donc A'^n converge fortement vers A' et $\sum_1^n \bar{a}_k x_k$ converge uniformément vers $\sum_1^\infty \bar{\alpha}_k x_k$ pour tout $\|X\| = 1$ de [V]. La raison en est que $\|X\| = 1$ dans [V] est un domaine borné, fermé, à un nombre fini de dimensions, auquel s'appliquent les lemmes classiques de Bolzano-Weierstrass et de Borel-Lebesgue.

13. - Il n'est pas inutile, dans les circonstances précédentes, d'examiner, en même temps que la série $\sum a_k e'_k$, la série $\sum a_k e''_k$. Reprenons $A'^n = \sum_1^n a_k e'_k$ et $A''^n = \sum_1^n a_k e''_k$; $A'^n + A''^n = A^n = \sum^n a_k e_k$. Lorsque $\sum |a_k|^2$ converge, A^n converge fortement vers $A = \sum_1^\infty a_k e_k$, $A'^{n+p} - A'^n$ et $A''^{n+p} - A''^n$ étant les projections, sur [V] et [H] — [V] de $A^{n+p} - A^n$, $\|A^{n+p} - A^n\| < \varepsilon$ pour $n > N(\varepsilon)$ et $p > 0$ arbitraire, entraîne $\|A'^{n+p} - A'^n\| < \varepsilon$ et $\|A''^{n+p} - A''^n\| < \varepsilon$; donc les séries $\sum a_k e'_k$ et $\sum a_k e''_k$ sont fortement convergentes avec $\sum \bar{a}_k e_k$ et leurs sommes A' et A'' sont telles que $A' + A'' = A$.

Supposons que $\Sigma|a_k|^2$ ne converge pas, mais $\Sigma\, \overline{a}_k x_k = \Sigma\, \overline{a}_k (e'_k, X)$ converge dans tout [V]; alors $\sum_1^n a_k e'_k$ converge faiblement vers α et $(\alpha, X) = \sum_1^\infty \overline{a}_k x_k$ pour tout $X \subset [V]$. Si $\sum_1^n a_k e''_k$ convergeait faiblement, il en serait de même de $\sum_1^n a_k e_k = \sum_1^n a_k e'_k + \sum_1^n a_k e''_k$, donc $\|\sum_1^n a_k e_k\|^2 = \sum_1^n |a_k|^2$ serait $< M$ fixe, quelquesoit n, donc $\Sigma|a_k|^2$ serait convergente. Cette contradiction montre que $\sum_1^n a_k e''_k$ ne peut converger, même faiblement, lorsque $\sum_1^n a_k e'_k$ converge faiblement, sans que $\Sigma|a_k|^2$ converge.

On peut même montrer que la convergence de $\Sigma\, \overline{a}_k x_k$ *dans* [V] *mais non dans tout* [H], *exige que* $\|\sum^n a_k e''_k\|$ *devienne infini avec* n.

Si en effet, dans l'hypothèse actuelle, on avait

$$\lim_{n=\infty} \|\sum^n a_k e''_k\| < +\infty$$

il, existerait une suite n_i croissant indéfiniment, telle que $\|\sum_1^{n_i} a_k e''_k\| < M$ fixe, dont, par sélection, on pourrait extraire une suite n_i telle que $\sum_1^{n_i} a_k e''_k$ convergerait faiblement vers β pour $i = \infty$. Par suite $\sum_1^{n_i} a_k e_k = \sum_1^{n_i} a_k e'_k + \sum_1^{n_i} a_k e''_k$ convergerait faiblement pour $i = \infty$; donc $\|\sum_1^{n_i} a_k e_k\|$ serait $< M$ fixe quelquesoit i, c'est à dire $\sum^{n_i} |a_k|^2 < M^2$ quelquesoit i, donc $\Sigma|a_k|^2$ serait convergente, ce qui n'est pas.

En conclusión:

1°. *Si* $\Sigma|a_k|^2$ *converge, les suites* $\sum^n a_k e'_k$ *et* $\sum^n a_k e''_k$ *convergent fortement.* Réciproquement, *si ces suites convergent, même faiblement* (9), $\Sigma|a_k|^2$ *converge, et les 2 suites convergent fortement.*

(9) C'est à dire si $\Sigma\, a_k x_k$ converge à la fois dans tout [V] et dans toute la variété complémentaire [H] - [V].

2°. *Si* $\Sigma |a_k|^2$ *diverge, et si la suite* $\sum_1^n a_k e'_k$ *converge même faiblement, la suite* $\sum^n a_k e''_k$ *no contient aucune suite partielle convergeant faiblement ou fortement,* parceque $\|\sum^n a_k e''_k\|$ devient infini avec n. Dans le cas présent une seule des 2 suites peut converger.

14. - Donnons maintenant un exemple pour lequel $\sum_1^n a_k e'_k$ ne converge que *faiblement.*

1.°) La variété [V] sera une variété linéaire, à une infinité (10) de *dimensions, de base orthonormale* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n \dots)$; la complémentaire [H] — [V] aura aussi une infinité de dimensions. Dans la variété [V] nous définirons une suite de vecteurs A_n, $(n = 1, 2, \dots \infty)$ telle que $A_n \rightarrow 0, A_1 + A_2 + \dots + A_n \rightarrow 0$ *sans qu'il y ait convergence forte.* Ces A_n seront une partie des e'_k pour lesquels $a_k = 1$.

2.°) Nous montrerons que, sous des conditions très larges, les A_n sont les projections sur [V] d'un système orthonormal $(E_n), (n = 1, 2, \dots)$, *en général incomplet* dans l'espace de Hilbert [H] contenant [V].

Nous complèterons convenablement le système (E_n) dans [H] par un 2ème système orthonormal $(C_1, C_2, \dots)$, en général infini, dont les projections $C'_1, C'_2, \dots$ sur [V] achèveront de définir tous les e'_k.

3.°) Ceci fait, nous ordonnons les E_n et les C_n sous la forme $(E_1, C_1, E_2, C_2, \dots)$ pour avoir une base O N C $(e_1, e_2, \dots)$ de [H] en posant $e_{2p-1} = E_p, e_{2p} = C_p$ Considérons alors une suite c_p telle que $\Sigma |c_p|^2$ converge; nous poserons $a_{2p-1} = 1$, $a_{2p} = c_p$. $(p = 1, 2, \dots \infty)$. Alors

$$e'_{2p-1} = P_V E_p = A_p \; ; e'_{2p} = P_V C_p = C'_p$$

et

$$\sum_1^{2p} a_k e'_k = \sum_1^p A_k + \sum_1^p c_k C'_k.$$

(10) Le cas où [V] a un nombre fini de dimensions est banal, on l'a vu plus haut.

Il est clair que $\Sigma|c_n|^2$ convergente entraîne la convergence forte de $\sum_1^p c_k C_k$, les C_k étant orthonormaux, et par suite la convergence forte de $\sum_1^p c_k C'_k$. Au contraire, $\sum_1^p A_k$ converge faiblement vers zéro. Par suite $\sum_1^{2p} a_k e'_k$ convergera *faiblement vers* $\sum^{\infty} c_k C'_k$ *sans converger fortement*; il en est de même de $\sum_1^{2p+1} a_k e'_k$ c'est à dire de $\sum_1^p a_k e'_k$. L'exemple désiré est ainsi obtenu. Etudions la réalization de 1.° et 2.°.

15. - Nous prendrons

$$A_n = \alpha_n \varepsilon_1 + \alpha_{n-1} \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_1 \varepsilon_n, \ (n = 1, 2, \ldots \infty),$$

les α_i étant des nombres réels. Alors

$$A_1 + \ldots + A_n = \varepsilon_1 s_n + \varepsilon_2 s_{n-1} + \ldots + \varepsilon_n s_1,$$

avec $s_p = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p$.

Pour que $\sum_1^n A_k$ converge faiblement, il faut que $\|\sum_1^n A_k\|^2$ reste borné. Or $\|\sum_1^n A_k\|^2 = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2$. Nous prendrons donc Σs_n^2 *convergente* et l'on aura $\alpha_1 = s_1, \alpha_2 = s_2 - s_1, \ldots \alpha_n = s_n - s_{n-1}$. Il faut en outre que $(\varepsilon_i, \sum_1^n A_k)$ ait une limite pour $n = \infty$, et cela pour chaque entier i. Or $(\varepsilon_i, \sum_1^n A_k) = s_{n-i+1}$ pour $n \geqq i$ dont la limite est 0, puisque, Σs_n^2 étant convergente, $s_n \to 0$. *Si donc* Σs_n^2 *converge,* $\sum_1^n A_k$ *converge faiblement vers zèro pour* $n = \infty$.

La convergence n'est pas forte, car $\|\sum_1^n A_k\|^2$ ayant pour limite $\sum_1^{\infty} s_n^2 > 0$, *ne converge pas vers zéro.*

Pour simplifier, nous pouvons supposer que les s_n vont en décroissant par valeurs positives, de façon que Σs_n^2 converge [p. ex. $s_n = \frac{1}{n}$]. Alors $\alpha_1 > 0$ et tous les $\alpha_i < 0$ pour $i > 2$. Comme $s_n \to 0$, on aura $\sum_1^\infty \alpha_i = 0$ avec $\alpha_1 = -\sum_1^\infty \alpha_i$. Il est visible que $A_n \rightharpoonup 0$ *sans converger fortement* car:

a) $\| A_n\|^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = s_1^2 + \sum_2^n (s_i - s_{i-1})^2 < s_1^2 + \sum_2^n s_{i-1}^2 < s_1^2 + \sum_1^\infty s_n^2$; les $\|A_n\|^2$ sont donc uniformément bornés superieurement;

b) $(\varepsilon_i, A_n) = \alpha_{n-i+1}$ pour $n \geqq i$ dont la limite, pour i fixe et $n = \infty$ est 0.

c) donc $A_n \rightharpoonup 0$ et $\|A_n\|^2 > s_1^2 = \alpha_1^2$ montre que A_n ne peut $\to 0$. Enfin, il est clair que, les α_i étant un système de nombres convenables, les $\lambda \alpha_i$ pour $\lambda > 0$ le seront aussi, le système (A_n) étant remplacé par le système (λA_n) qui possède les propriétés voulues quelquesoit $\lambda > 0$ fixe. La présence du paramétre λ va nous être utile dans la suite.

16. - Dans la variété [V], qui est un espace de Hilbert, on définit un *opérateur borné linéaire A*, (transformant [V] en elle-même), *par les formules* $A\varepsilon_n = A_n$ (11).

Soit en effet $\xi = \sum_1^\infty \xi_k \varepsilon_k$ un point arbitraire de [V]. Considérons $\eta_n = \sum_1^n \xi_k A_k = \sum_1^n \xi_k (\alpha_k \varepsilon_1 + \dots + \alpha_1 \varepsilon_k)$. Nous pourrons l'écrire

$$\eta_n = \alpha_1 \cdot \sum_1^n \xi_k \varepsilon_k + \alpha_2 \cdot \sum_2^n \xi_k \varepsilon_{k-1} + \dots + \alpha_n \xi_n \varepsilon_1.$$

Considérons par ailleurs l'operateur U, opérant dans [V], et tel que $U\varepsilon_1 = 0$, $U\varepsilon_2 = \varepsilon_1, \dots U\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1}, \dots$.

Il est évidemment borné, car

$$U\xi = \sum_1^\infty \xi_k U\varepsilon_k = \sum_2^\infty \xi_k \varepsilon_{k-1}$$

(11) Voir JULIA. *La théorie des fonctions et la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien* - Journal de Mathématiques, tome 22, 1943).

donne

$$\|U\xi\|^2 = \sum_2^\infty |\xi_k|^2 \leqq \sum_1^\infty |\xi_k|^2 = \|\xi\|^2.$$

Sa borne est 1.

De plus, on voit que

$$U^p \varepsilon_k = \varepsilon_{k-p} \quad \text{si} \quad p < k; \quad \text{et} \quad U^p \varepsilon_k = 0 \quad \text{si} \quad p \geqq k.$$

On a alors, évidemment, en posant $\xi^n = \sum_1^n \xi_k \varepsilon_k = P_{V_n} \xi$, avec $[V_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n]$,

$$\eta_n = \alpha_1 \xi^n + \alpha_2 U\xi^n + \alpha_3 U^2 \xi^n + \dots + \alpha_n U^{n-1} \xi^n,$$

et il est clair qu'on peut prolonger indéfiniment la suite du 2ème membre car $U^p \xi^n = 0$ pour $p \geqq n$.

On voit que, ξ étant donné arbitraire dans $[V]$, η_n *converge fortement pour* $n \to \infty$. En effet, on a

$$\eta_{n+p} - \eta_n =$$
$$\alpha_1 (\xi^{n+p} - \xi^n) + \alpha_2 U(\xi^{n+p} - \xi^n) + \dots + \alpha_{n+p} U^{n+p-1} (\xi^{n+p} - \xi^n).$$

ξ étant fixe, $\xi^r \to \xi$ pour $n \to \infty$; donc, ε étant donné arbitraire > 0 on peut choisir $N(\varepsilon)$ tel que $\|\xi^{n+p} - \xi\| < \varepsilon$ pour $n > N(\varepsilon)$, quelquesoit $p > 0$. D'autre part $\|U^m(\xi^{n+p} - \xi^n)\| \leqq \|\xi^{n+p} - \xi^n\|$ pour tout entier m. Il vient alors:

$$\|\eta_{n+p} - \eta_n\| \leqq (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_{n+p}|) \, . \, \varepsilon < \varepsilon \, . \sum_1^\infty |\alpha_k| .$$

La série $\sum |\alpha_k|$ étant convergente, sa somme étant $= 2\alpha_1$ il en résulte que η_n converge fortement pour $n = \infty$. En vertu d'un théorème connu ([12]) sa limite $A\xi = \sum_1^\infty \xi_k A_k$ représente un opérateur linéaire borné $A\xi$ défini dans tout l'espace et pour lequel $A\varepsilon_k = A_k$, $(k = 1, 2, \dots \infty)$.

Dans la base (ε_k) de $[V]$ la matrice de A peut s'écrire $A = \|A_1 A_2 \dots A_k \dots\|$, chaque lettre A_k représentant la colon-

([12]) Voir le mémoire cité dans la note ([11]).

ne de rang k, dont les termes sont $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1, 0, 0, \ldots$ coordonnés de A_k. Il est clair que si tous les α_k sont multipliés par $\lambda > 0$, $A\,\xi$ sera multiplié par λ.

Il n'est pas inutile de remarquer en passant que $\eta = \alpha_1 \xi + \alpha_2 U \xi + \ldots + \alpha_p U^{p-1} \xi + \ldots$ est la limite de η_n. Cette dernière série converge fortement pour tout ξ de [V]; on le voit en procédant comme on l'a fait pour η_n.

En considérant

$$\begin{aligned}\Delta &= \eta - \eta_n \\ &= \alpha_1 (\xi - \xi^n) + \alpha_2 U(\xi - \xi^n) + \ldots + \alpha_p U^{p-1} (\xi - \xi^n) + \ldots\end{aligned}$$

(qui est valable, puisque $U^p(\xi^n) = 0$ pour $p \geqq n$) on a $\|\Delta\| < \varepsilon |\sum_1^\infty \alpha_1| = 2\varepsilon |\alpha_1|$, dès que $\|\xi - \xi^n\| < \varepsilon$, la borne de U étant 1. Donc $\Delta \to 0$ pour $n = \infty$; on a donc $\eta = \lim_{n=\infty} \eta_n$ c'est à dire

$A\,\xi = \sum_k^\infty A_k = \alpha_1 + \alpha_2 U \xi + \ldots + \alpha_p U^{p-1} \xi + \ldots$ pour tout ε de [V]. La convergence de cette dernière série est d'ailleur *uniforme sur* $\|\xi\| = 1$ de [V], car elle est majorée par $\|\xi\| \cdot \sum_1^\infty |\alpha_k|$

et son reste est $< \varepsilon$ sur $\|\xi\| = 1$ dès que $\sum_n^\infty |\alpha_k| < \varepsilon$. Au contraire $\sum_1^\infty \xi_k A_k$ ne converge pas uniformément sur $\|\xi\| = 1$, car elle se réduit à A_n pour $\xi = \varepsilon_n$, et puisque $\|A_n\|$ reste $> \alpha_1 \neq 0$, l'expression $\eta_{n+1} - \eta_n$ étant A_{n+1} *pour* $\xi = \varepsilon_{n+1}$, ne tendra pas uniformément vers zéro, pour $n = \infty$, sur $\|\xi\| = 1$.

17. - Construisons dans l'espace hilbertien [H], contenant [V], un système orthonormal (E_n) *dont la projection sur* [V] *soit formée des* A_n. Nous associerons à la variété [V] la variété orthogonale complémentaire [H] $-$ [V] à une infinité de dimensions, de base orthonormale $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots \varepsilon'_n, \ldots)$, en sorte qu'une base ONC de [H] sera obtenue en ordonnant les ε_n et les ε'_n de la façon suivante: $(\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon'_n, \ldots)$.

Cela étant, nous allons définir un vecteur B_n de [H] $-$ [V], associé à A_n, pour $n = 1, 2, \ldots \infty$, de façon que les $E_n = A_n + B_n$ constituent un système orthonormal de [H]. Les A_n seront alors les projections sur [V] des E_n de [H]. Il faut et il suffit que

$$(A_m + B_m, A_n + B_n) = \delta_{mn}:$$

$\delta_{mn} = 1$ pour $m = n$, et $\delta_{mn} = 0$ pour $m \neq n$. Les A_m étant, orthogonaux aux B_n, on devra avoir, pour tout cuple d'entiers m, n,

$$\text{(R)} \qquad A_{mn} + B_{mn} = \delta_{mn}$$

en posant suivant l'usage $A_{mn} = (A_m, A_n)$.

Sous certaine condition imposée aux A_n on va voir qu'on peut déterminer une suite B_n de [H] — [V] satisfaisant à ces relations (R). Envisageons les matrices infinies $[\mathrm{A}] = \|A_{ik}\|$ et $[\mathrm{B}] = \|B_{ik}\|$. Les relations (R) expriment que leur somme est 1, $[\mathrm{A}] + [\mathrm{B}] = 1$.

Si l'on observe que la matrice de l'opérateur A, dans la base $|\varepsilon_k|$ de [V], s'écrit $A = \|A_1 A_2 \dots A_k \dots\|$, la matrice de l'adjoint A^* dans la même base s'écrira

$$A^* = \left\| \begin{matrix} \overline{A}_1 \\ \overline{A}_2 \\ \vdots \\ \overline{A}_i \\ \vdots \end{matrix} \right\|$$

où $\overline{A}_i$ signifie la $i$ème ligne, formée des conjuguées des coordonnées de A_i, c'est à dire

$$\overline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_{i-1}, \dots, \overline{\alpha}_1, 0, 0, \dots$$

Les matrices A et A^* sont bornées; la règle de multiplication de ces matrices montre aussitôt que $[\mathrm{A}] = A^*A$.

On devra donc avoir $A^*A + [\mathrm{B}] = 1$ où $[\mathrm{B}] = 1 - A^*A$

Par conséquent, si les B_n existent, [B] sera une matrice bornée hermitienne, comme A^*A. De plus, si on considère la matrice $B = \|B_1 B_2 \dots B_k \dots\|$ et la matrice adjointe

$$B^* = \left\| \begin{matrix} \overline{B}_i \\ \overline{B}_1 \\ \vdots \\ \overline{B}_2 \\ \vdots \end{matrix} \right\| .$$

Les règles du calcul formel des matrices montrent que $[B] = B^*B$. Il en résulte, par un théorème connu, que B sera bornée comme B^*B lorsque les B_n existeront. L'opérateur B, *opérant dans* $[H]-[V]$ et dont la matrice, dans la base (ε'_i) est la matrice B précédente, sera donc un opérateur linéaire borné.

Or B^*B est un hermitien *positif*, car $(\xi', B^*B\,\xi') = = (B\,\xi', B\,\xi') = \|B\,\xi'\|^2$ pour tout ξ' de $[H]-[V]$. *Il faudra donc que* $1 - A^*A$ *soit un hermitien positif*, c'est à dire que la borne supérieure de A^*A soit $\leqq 1$. Or, cette borne est $M_{A^*A} = (M_A)^2$. *Il faudra donc* $M_A \leqq 1$ pour que B^*B puisse exister.

La condition est d'ailleurs *suffisante*. Car si $M_A \leqq 1$, la borne inférieure de $1 - A^*A$ sur $\|\xi\| = 1$, laquelle est $1 - M_{A^*A}$ sera $\geqq 0$; donc $1 - A^*A$ sera un hermitien positif de borne supérieure $\leqq 1$. Cela étant, $1 - A^*A$ possède une racine carrée unique, qui est un hermitien positif borné $H = \sqrt{1 - A^*A}$, $H^2 = 1 - A^*A$ (théorème connu). Considérons cette matrice H et considérons-la comme opérant sur la base (ε_i) dans $[H]-[V]$; elle y définit un operateur hermitien H, auquel nous adjoindrons un opérateur linéaire isométrique J quelconque de $[H]-[V]$, c'est à dire tel que $J^*J = 1$ dans tout $[H]-[V]$. En prenant $B = J\,H$, on aura une solution du problème; en effet $B^*B = H\,J^*J\,H = H^2$, car $H^* = H$. Les matrices de B^*B et de H^2 sont donc égales. On a donc $B^*B = 1 - A^*A$ qui est la relation cherchée entre les matrices de B^*B et de A^*A. La matrice B de l'opérateur B définit, dans la base (ε'_n) de $[H]-[V]$, un système de vecteurs B_n de $[H]-[V]$, par $B_n = B\,\varepsilon'_n$, et ce système B_n satisfait aux relations (R).

18. - La seule condition nécessaire et suffisante, pour l'existence des B_n est donc $M_A \leqq 1$. Or nous avons vu au n.° 16 que A est borné. Si $M_A \leqq 1$ les A_n choisis au n.° 15 per-

mettent de déterminer des B_n satisfaisant à (R). Si $M_A > 1$, nous choisirons $\lambda > 0$ tel que $\lambda M_A < 1$, en multiplient par λ tous les α_n c'est à dire tous les A_n. Le nouvel opérateur λA sera tel que $M_{\lambda A} = \lambda M_A < 1$ et les nouveaux λA_n permettront de déterminer des B_n. Il y a une indétermination évidente due d'une part au champ de variation de λ, d'autre part à la présence de l'opérateur isométrique J, de [H] — [V], dans l'expression de l'opérateur B. Nous nous réservons de revenir ultérieurement sur ce problème pour l'étudier plus en détail.

19. - En définitive, on peut choisir les α_n de façon que les A_n déterminent un opérateur A de borne $M_A < 1$ auquel correspond un opérateur B et des vecteurs $B_n = B\varepsilon'_n$ de [H] — [V] de façon que les $E_n = A_n + B_n$ forment un système orthonormal de [H], dont la projection sur [V] fournisse les A_n.

En général le système (E_n) est *incomplet dans* [H]. *Je donnerai ailleurs la condition nécessaire et suffisante que doit vérifier A dans* [V] *pour que le système E_n soit complet dans* [H].

En complétant le système (E_n) par un système (C_n), et ordonnant l'ensemble $(E_1, C_1, E_2, C_2, \ldots)$ on aura, comme il a été indiqué au n.º 14 (3.e) un système (e_k) dont la projection sur [V] comporte les $e'_{2p-1} = A_p$ et les $e'_{2p} = C'_p$.

En prenaut $a_{2p-1} = 1$ et $a_{2p} = c_p$, avec $\Sigma |c_p|^2$ convergente, la suite $\sum_1^n a_k e'_k$ convergera faiblement et non fortement, vers $\sum_1^\infty c_k C'_k$, sans que $\Sigma |a_k|^2$ converge. L'exemple désiré est ainsi réalisé.