ESCALAS AXONOMETRICAS EXACTAS

por

ENRIQUE DE RAFAEL S. J.
(Madrid)

Muy conocido es el llamado Sistema Axonométrico de representación en Geometría Descriptiva, y aunque, en general, puede admitirse como triedro fundamental el que forman tres rectas cualesquiera no-coplanarias, que pasan por un origen común O cualquiera, y asociarlos a un plano cualquiera, en el que se proyecten, ortogonal u oblícuamente, los puntos del espacio y sus proyecciones en los tres planos coordenados (lo cual equivale a considerar la llamada *Perspectiva Caballera,* como caso particular de esta perspectiva axonométrica general), ordinariamente se reserva el nombre de *Perspectiva Axonométrica* (y así lo consideraremos en todo este trabajo) al caso en que *el triedro fundamental es trirrectángulo y la proyección sobre el plano del dibujo es ortogonal.*

En los textos de Geometría Descriptiva se considera ordinariamente el lado geométrico de la Perspectiva Axonométrica; los teoremas fundamentales sobre la misma pueden enunciarse así:

Teorema 1º. *Las proyecciones Ox, Oy y Oz de los tres ejes axonométricos sobre un plano paralelo al de proyección son las alturas del triángulo fundamental ABC, formado por las intersecciones AB, AC y BC de los tres planos coordenados con dicho plano*; consiguientemente, *son las bisectrices del triángulo órtico $A'B'C'$ de dicho triángulo fundamental.*

Teorema 2º. (Schlömilch). *Las escalas de reducción sobre las proyecciones de los tres ejes de magnitudes unidad tomadas sobre dichos ejes en el espacio son tales, que*

$$m^2+n^2+p^2=2$$

$$\frac{m^2}{B'C'}=\frac{n^2}{A'C'}=\frac{p^2}{A'B'}$$

siendo m, n, p, menores que la unidad.

Ordinariamente, se supone el plano de proyección normal a una recta *interior* al triedro formado por las partes positivas de los tres ejes; excepcionalmente podría suponerse que pasa por uno de ellos, y entonces se tendría $m=1$, $n^2+p^2=1$, y el triángulo fundamental y su órtico correspondiente degenerarían. En el caso ordinario, el triángulo fundamental es acutángulo, y, por lo tanto, contiene en su interior el ortocentro O.

Si m, n, p son distintos, se tiene la perspectiva escalena o trimétrica; si dos de ellos son iguales, la perspectiva es isósceles o monodimétrica; si los tres son iguales entre sí y a $\sqrt{\frac{2}{3}}$ se obtiene la perspectiva isométrica o equilátera, muy usada en la práctica.

Sin embargo, por ser $\sqrt{\frac{2}{3}}$ inconmensurable, las evaluaciones de longitudes no pueden ser exactas a lo largo de los tres ejes; y esta circunstancia se ofrecerá siempre si uno cualquiera de los valores de los tres coeficientes de reducción es inconmensurable. No carecerá de interés el estudio de la perspectiva axonométrica cuando las tres escalas son fracciones exactas, que puede enunciarse analíticamente en esta forma:

Enunciado.—*¿Cuáles son los valores enteros, ninguno de ellos nulo, que satisfacen la ecuación*

$$m^2+n^2+p^2=2\,l^2$$

siendo l mayor que m, n, y p, y no teniendo los cuatro valores ningún factor común?

Aunque las escalas de reducción son siempre fracciones propias, si son exactas, al reducirles a común denominador y multiplicar por el cuadrado del mismo, los valores proporcionales a las mismas pueden considerarse siempre enteros. Para que el triángulo fundamental y el órtico sean propiamente tales, es menester que l sea mayor que cualquiera m, n, o p, y, por fin, un factor común no cambiaría las escalas de reducción. De aquí se deducen las tres condiciones del enunciado.

Sin esas restricciones, y sin considerar el segundo miembro el doble de un cuadrado exacto, el problema de la descomposición de un número entero N en suma de tres cuadrados exactos ha sido estudiado por Fermat, Euler, Gauss, Dirichlet (1) y muchos otros, y puede verse tratado en las obras clásicas de Cohen, Landau, Bachmann, Dickson y Hardy, con más o menos extensión y aplicación a nuestro caso. Pero ninguno de estos autores trata explícitamente del problema tal como lo hemos enunciado, ni dan métodos para hallar y tabular las soluciones encontradas en ningún caso.

Por eso vamos a iniciar un estudio en ese sentido, y a tratar de vislumbrar algunas interesantes consecuencias y comparaciones.

§ 1. Lemas elementales

Lema 1º. — *Si la ecuación en números enteros* $2l^2 = m^2 + n^2 + p^2$ *es irreductible,* l *y dos enteros* (p. ej., m y n) *son impares y* p *es divisible por 4.*

Siendo $2l^2$ par, o m^2, n^2 y p^2 son pares los tres, y entonces no es irreductible, o dos son impares (p. ej., m y n) y el tercero par.

Pero si m y n son impares, sus cuadrados son múltiples de 8 más uno cada uno, y p^2 es múltiple de 4. Luego $m^2 + n^2 + p^2$ es múltiplo de 4 más 2, luego su mitad l^2 es múltiplo de 2 más uno. Luego l es impar.

$2l^2$ es múltiplo de 8 más dos y también $m^2 + n^2$; luego $p^2 = 2l^2 - (m^2 + n^2)$ es múltiplo de 8; luego p es múltiplo de 4.

Lema 2º. — *Uno y uno sólo de los cuatro números* l, m, n *y* p *es divisible por 3.*

Porque si m, n y p no fuesen divisibles por 3, sus cuadrados serían múltiplos de 3 más uno cada uno; luego $m^2 + n^2 + p^2 = 2l^2$ ha de ser múltiplo de 3, y por lo tanto, l.

Pero dos no pueden ser múltiplos de 3, porque si lo fueran, p. ej., l y p (o l y m), $2l^2 - p^2$ (o $2l^2 - m^2$) sería múltiplo de 3. Pero si m y n (o p y n) no fuesen múltiplos de 3, la suma $m^2 + n^2$ (o $p^2 + n^2$) sería un múltiplo de 3 más dos, y no podría ser igual a $2l^2 - p^2$ (o $2l^2 - m^2$).

---

(1) Para noticias y bibliografía respecto de estos autores antiguos puede consultarse la "*Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*" (ed. franc. fragm.), Tomo I, vol. 3, 16, "*Théorie arithmétique des formes*", por K. Th. Vahlen y E. Cohen, §37 "*Décomposition d'un nombre en une somme de trois carrés*" (págs. 171 y sigts.).

Si lo fueran, p. ej., m y n, pero no l y p (o p y n, pero l y m), m^2+n^2 (o p^2+n^2) sería múltiplo de 3, y en cambio, $2l^2-p^2$ (o $2l^2-m^2$) serían iguales a un múltiplo de 3 más uno, y no podrían ser iguales entre sí.

Lema 3º. — *Uno solo de los cuatro números enteros l, m, n, p, puede ser múltiplo de un entero primo de la forma $4k+3$.*

Este lema está fundado en dos teoremas de la teoría de los números. El primero (Lagrange) dice: Los números primos de la forma $8K\pm1$ tienen a 2 por resto cuadrático y los de la forma $8K\pm3$ no lo tienen. El segundo (Stevin, demostrado por Gauss) dice: Si $m=x^2+y^2$ y m es divisible por un número primo de la forma $4K+3$, es divisible por su cuadrado y también x e y son divisibles por dicho primo.

Si suponemos que l y m (o n, o p) son divisibles por un número primo de la forma $4K+3$, lo sería también $2l^2-m^2$ (o $2l^2-n^2$, o $2l^2-p^2$) y, por el teorema de Stevin, n y p (o m y p, o m y n) habrían de serlo separadamente, y la ecuación no sería irreductible. Si suponemos que l y m no son divisibles por un número primo de la forma $8K+3$, $2l^2$ no sería resto cuadrático y m^2 lo sería. Su diferencia $2l^2-m^2=n^2+p^2$ no sería divisible por dicho primo, y, por lo tanto, no lo sería, o n^2, o p^2.

Lema 4º. — *Cualquiera que sea $l, p \geqq \sqrt{8l-8}$;* si $l=4k+1, m$ y $n \geqq \sqrt{6l-5}$, y si $l=4k+3$, m y $n \geqq \sqrt{18l-53}$.

Porque m y n valen, a lo sumo, $l-2$, y $p^2=2l^2-m^2-n^2 \geqq 2l^2-2l^2+8l-8=8l-8$. Luego $p \geqq \sqrt{8l-8}$.

Si $l=4K+1$, p, a lo sumo, vale $4K=l-1$, y m, a lo sumo, vale $4K-1=l-2$. Luego, $n^2=2l^2-p^2-m^2 \geqq 2l^2-l^2+2l-1-l^2+4l-4=6l-5$. Luego $n \geqq \sqrt{6l-5}$.

Pero si $l=4K+3, p$, a lo sumo, vale $4K=l-3$, y m, a lo sumo, vale $4K-3=l-6$, y entonces $n^2=2l^2-l^2+6l-9-l^2+12l-36=18l-45$; pero en este caso, para ser posible valores que satisfagan la ecuación $2l^2=m^2+n^2+p^2$ es necesario que l, m, n y p sean divisibles por 3, y la ecuación es reductible.

Hay que suponer $p=4K-4=l-7$, y $m=l-2$; entonces $n^2=2l^2-p^2-m^2=2l^2-l^2+14l-49-l^2+4l-4$, o sea $n^2=18l-53$, o bien $n=\sqrt{18l-53}$.

§ 2. Escalas isósceles exactas

Antes de estudiar el caso general de escalas escalenas o trimétricas, es útil considerar las isósceles o monodimétricas, porque el medio de hallar soluciones es mucho más sencillo y ayuda, según lo que hemos visto en la primera parte del lema cuarto, a fijar límites de tanteo para las escalenas.

Si en la ecuación $2l^2 = m^2 + n^2 + p^2$ suponemos dos iguales entre las tres m, n, p escalas de reducción, éstas deben ser las dos impares, o sea $m = n$. La ecuación fundamental toma la forma

$$2(l^2 - m^2) = p^2$$

y también

$$2(l + m)\ (l - m) = 16\,K^2$$

en que l y m son impares y K un entero cualquiera.

Si $K = 1$, no hay solución, porque $l + m = 4$, $l - m = 2$ dan $l = 3 < 4k = p$, y $m = 1$.

Si $K = 2$, $l + m = 16$, $l - m = 2$, $l = 9$, $m = 7$, $p = 8$, que es la solución más sencilla con escalas axonométricas exactas

$$\left(\frac{7}{9}\right)^2 + \left(\frac{7}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 2.$$

Si $K = 3$;	$l+m = 36$;	$l-m = 2$;	$l = 19$, $m = 17$,	$p = 12$.
Si $K = 4$;	$l+m = 64$;	$l-m = 2$;	$l = 33$, $m = 31$,	$p = 16$.
Si $K = 5$;	$l+m = 100$;	$l-m = 2$;	$l = 51$, $m = 49$,	$p = 20$.
	$l+m = 50$;	$l-m = 4$;	$l = 27$, $m = 23$,	$p = 20$.
Si $K = 6$;	$l+m = 144$;	$l-m = 2$;	$l = 73$, $m = 71$,	$p = 24$.
Si $K = 7$;	$l+m = 196$;	$l-m = 2$;	$l = 99$, $m = 97$,	$p = 28$.
	$l+m = 98$;	$l-m = 4$;	$l = 51$, $m = 47$,	$p = 28$.
Si $K = 8$;	$l+m = 256$;	$l-m = 2$;	$l = 129$, $m = 127$,	$p = 32$.
Si $K = 9$;	$l+m = 324$;	$l-m = 2$;	$l = 163$, $m = 161$,	$p = 36$.
	$l+m = 162$;	$l-m = 4$;	$l = 83$, $m = 79$,	$p = 36$.
Si $K = 10$;	$l+m = 400$;	$l-m = 2$;	$l = 201$, $m = 199$,	$p = 40$.
Si $K = 11$;	$l+m = 484$;	$l-m = 2$;	$l = 243$, $m = 241$,	$p = 44$.
	$l+m = 242$;	$l-m = 4$;	$l = 123$, $m = 119$,	$p = 44$.

Si $K=12$;	$l+m=576$;	$l-m=2$;	$l=289,\ m=287,\ p=48$.
Si $K=13$;	$l+m=676$;	$l-m=2$;	$l=339,\ m=337,\ p=52$.
	$l+m=338$;	$l-m=4$;	$l=171,\ m=167,\ p=52$.
Si $K=14$;	$l+m=784$;	$l-m=2$;	$l=393,\ m=391,\ p=56$.
	$l+m=98$;	$l-m=16$;	$l=57,\ m=41,\ p=56$.
Si $K=15$;	$l+m=900$;	$l-m=2$;	$l=451,\ m=449,\ p=60$.
	$l+m=450$;	$l-m=4$;	$l=227,\ m=223,\ p=60$.
Si $K=16$;	$l+m=1024$;	$l-m=2$;	$l=513,\ m=511,\ p=64$.
Si $K=17$;	$l+m=1156$;	$l-m=2$;	$l=579,\ m=577,\ p=68$.
	$l+m=578$;	$l-m=4$;	$l=291,\ m=287,\ p=68$.
Si $K=18$;	$l+m=1296$;	$l-m=2$;	$l=649,\ m=647,\ p=72$.
	$l+m=162$;	$l-m=16$;	$l=89,\ m=73,\ p=72$.
Si $K=19$;	$l+m=1444$;	$l-m=2$;	$l=723,\ m=721,\ p=76$.
	$l+m=722$;	$l-m=4$;	$l=363,\ m=359,\ p=76$.
Si $K=20$;	$l+m=1600$;	$l-m=2$;	$l=801,\ m=799,\ p=80$.
Si $K=21$;	$l+m=1764$;	$l-m=2$;	$l=883,\ m=881,\ p=84$.
	$l+m=882$;	$l-m=4$;	$l=443,\ m=439,\ p=84$.
	$l+m=196$;	$l-m=18$;	$l=107,\ m=89,\ p=84$.
Si $K=22$;	$l+m=1936$;	$l-m=2$;	$l=969,\ m=967,\ p=88$.
	$l+m=242$;	$l-m=16$;	$l=129,\ m=113,\ p=88$.
Si $K=23$;	$l+m=2116$;	$l-m=2$;	$l=1059,\ m=1057,\ p=92$.
	$l+m=1058$;	$l-m=4$;	$l=531,\ m=527,\ p=92$.
Si $K=24$;	$l+m=2304$;	$l-m=2$;	$l=1153,\ m=1151,\ p=96$.
	$l+m=256$;	$l-m=18$;	$l=137,\ m=119,\ p=96$.
Si $K=25$;	$l+m=2500$;	$l-m=2$;	$l=1251,\ m=1249,\ p=100$.
	$l+m=1250$;	$l-m=4$;	$l=627,\ m=623,\ p=100$.

Así hemos obtenido 40 soluciones del problema enunciado; otras que satisfacen la ecuación fundamental no satisfacen las condiciones adicionales de irreductibilidad o prioridad, como si para $K=15$, $l+m=100, l-m=18, l=59, m=41, p=60>59=l$. En estas soluciones p no supera a 100; pero en sólo once l es inferior a 100, y en sólo doce m es inferior a 100. Un tanteo un poco largo hace ver que no existen otras soluciones en que $m<100$.

Un pequeño análisis hace ver que para cualquier valor de K existe siempre la solución

$$l=2K^2+1;\quad n=2K^2-1;\quad p=4K;$$

y si $K=2K'+1>3$, existe la solución

$$l=K^2+2;\quad m=K^2-2;\quad p=4K.$$

Cuando K crece, estas soluciones tienden a hacer las dos escalas $\frac{m}{l}=\frac{n}{l}$ casi iguales a la unidad, y la tercera p tiende a cero.

Observamos también que hay dos soluciones $l=9$; $m=7$; únicas, pues si $p=4K$ y $l=4K+1$, $m^2=l^2-\frac{1}{2}p^2=16K^2+$ $p=8$, y $l=57$; $m=41$; $p=56$, tales que $l=p+1$. No son las $8K+1-8K^2=8K^2+8K+1$ es un cuadrado perfecto, si $K_1=2$, $K_2=14$, $K_3=84=6.14-2+2$, $K_4=492=6.84-14+2$, $K_5=2870=6.492-84+2$, y, en general, $K_n=6.K_{n-1}-K_{n-2}+2$; obtenemos, además de los valores ya conseguidos para $K_1=2$ y $K_2=14$,

$$\begin{array}{llll}
K_3=\ 84; & l_3=\ 337; & m_3=\ 239; & p_3=\ 336.\\
K_4=\ 492; & l_4=\ 1969; & m_4=1393; & p_4=\ 1968.\\
K_5=2870; & l_5=11481; & m_5=8119; & p_5=11480, \text{ etc.}
\end{array}$$

El método para resolver la ecuación $8K^2+8K+1=m^2$ es el de aplicación de las fracciones continuas periódicas (1). Si formamos las reducidas de $\frac{1}{\sqrt{2}}=[0,1,2,2,2\ldots]$ obtenemos

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{12}{17},\ \frac{29}{41},\ \frac{70}{99},\ \frac{169}{239},\ \frac{408}{577},\ \frac{985}{1393},\ldots.$$

Los denominadores de las reducidas de orden impar son $m_0=1, m_1=7, m_2=41, m_3=239, \mathrm{m}=1493\ldots$, y el doble de los numeradores, menos uno, nos dan $l_0=1, l_1=9, l_2=57, l_3=337$, $l_4=1969\ldots$ y, quitando una unidad, se obtienen $p_0, p_1, p_2\ldots$. Las leyes recurrentes son:

$$m_n=6m_{n-1}-m_{n-2};\quad l_n=6l_{n-1}-l_{n-2}+4;\quad p_n=6p_{n-1}-p_{n-2}+8.$$

(1) Puede verse en H. WEBER, *Algebra*, I, Cap. 11. El procedimiento es debido a Lagrange.

A medida que n crece, la escala p tiende a la unidad y las otras dos $\frac{m}{l}$ tienden a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

También observamos que hay dos soluciones, $l=9, m=7$, $p=8$; y $l=89, m=73, p=72$, en las que $m=p-1$, o $m=p+1$; por lo tanto, muy próximas a la escala isométrica. Los valores de K, l, m y p de esta sucesión son:

$$\begin{array}{llll} K_3 = 180; & l_3 = 881; & p_3 = 720; & m_3 = 719. \\ K_4 = 1780; & l_4 = 8721; & p_4 = 7120; & m_4 = 7121. \\ K_5 = 17622; & l_5 = 86329; & p_5 = 70488; & m_5 = 70487, \text{ etc.} \ldots \end{array}$$

cuyas leyes recurrentes son:

$$K_n = 10 \,.\, K_{n-1} - K_{n-2} + (-1)_2{}^{n-1}; \; l_n = 10\, l_{n-1} - l_{n-2};$$
$$p_n = 10\, p_{n-1} - p_{n-2} + (-1)_8{}^{n-1}; \; m_n = p_n + (-1)^n,$$

que se obtienen, como en el caso anterior, de los numeradores de las reducidas impares del desarrollo $\sqrt{\frac{2}{3}} = [0, 1, 4, 2, 4, 2\; ..]$, en fracción continua periódica, según el método de Lagrange,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{5}, \frac{9}{11}, \frac{40}{49}, \frac{89}{109}, \frac{396}{485}, \frac{881}{1079}, \frac{3920}{4801}, \frac{8721}{10681}, \frac{38804}{47525}, \frac{86329}{105731}, \ldots$$

que son $l_1, l_2, l_3, \ldots$, y las p y m se deducen de los denominadores, conforme a la siguiente regla:

$$\begin{array}{ll} p_1 = \frac{2}{3}\,(11 + 1); & m_1 = p_1 - 1 \\ p_2 = \frac{2}{3}\,(109 - 1); & m_2 = p_2 + 1 \\ p_3 = \frac{2}{3}\,(1079 + 1); & m_3 = p_3 - 1 \\ p_4 = \frac{2}{3}\,(10681 - 1); & m_4 = p_4 + 1 \\ p_5 = \frac{2}{3}\,(105731 + 1); & m_5 = p_5 - 1; \text{ etc.} \end{array}$$

§ 3. Escalas trimétricas

Aunque a primera vista parece mucho más sencilla la determinación de escalas trimétricas exactas que la de escalas monodimétricas, no es así en la práctica.

Es conveniente hacer una sustitución, que puede plantearse de dos maneras diferentes, según que se deseen obtener series de soluciones en que la incógnita es $p=4K$ o $n=2K+1$.

Supongamos l igual a un número impar cualquiera $2r+1$, y sustituyamos $m=l-2i$ y $n=l-2j$, de donde

$$p^2=2l^2-m^2-n^2=4l\,(i+j)-4\,(i^2+j^2)$$
$$=8\,(i+j)\,r-4\,(i^2+j^2-i-j).$$

Si queremos escalas escalenas, $i\neq j$ y ambos son distintos de cero. Además, es necesario que $4(i^2+j^2-i-j)$ sea resto cuadrático de $8(i+j)$, o bien i^2+j^2-i-j de $2(i+j)$; y también $p<l$.

Aplicando a sucesivos valores de $i+j$, y en cada uno de éstos considerando los valores correspondientes de i y j posibles, resulta:

$i+j=2.$ $i=1,$ $j=1,$ $i^2+j^2-i-j=0.$ $p^2=16r$

$r=1;$	$l=3;$	$m=1;$	$n=1;$	$p=4>3.$ Imposible.
$r=4;$	$l=9;$	$m=7;$	$n=7;$	$p=8.$
$r=9;$	$l=19;$	$m=17;$	$n=17;$	$p=12.$
$r=16;$	$l=33;$	$m=31;$	$n=31;$	$p=16.$
$r=25;$	$l=51;$	$m=49;$	$n=49;$	$p=20.$
$r=36;$	$l=73;$	$m=71;$	$n=71;$	$p=24.$
$r=49;$	$l=99;$	$m=97;$	$n=97;$	$p=28,$ etc.

Así hemos obtenido una parte del resultado del párrafo anterior sobre escalas monodimétricas.

$i+j=3$ $i=1;$ $j=2;$ $i^2+j^2-i-j=2;$ $p^2=24r-8.$
$r=1$ y $r=3$ dan $p=4>l=3;$ y $p=8>l=7,$ imposibles.

$r=11;$ $l=23;$ $m=21;$ $n=19;$ $p=16$ [1].

---

[1] La más sencilla solución de escalas trimétricas exactas. Según ella está dibujada la adjunta figura, cuya explicación daremos más tarde.

$r=17;\quad l=35;\quad m=33;\quad n=31;\quad p=20.$

$r=33;\quad l=67;\quad m=65;\quad n=63;\quad p=28.$

$r=43;\quad l=87;\quad m=85;\quad n=83;\quad p=32,$ etc.

$$r=\begin{cases} 6h^2+4h+1;\quad l=12h^2+8h+3;\quad m=12h^2+8h+1;\\ \quad n=12h^2+8h-1;\quad p=4(3h+1).\\ 6h^2+8h+3;\quad l=12h^2+16h+7;\quad m=12h^2+16h+5;\\ \quad n=12h^2+8h+3;\quad p=4(3h+2).\end{cases}$$

$i+j=4.\quad i=1;\ j=3;\ i^2+j^2-i-j=6;\ p^2=32r-24.$ Imposible.
$i=2;\ j=2;\ i^2+j^2-i-j=4;\ p^2=32r-16.$

$r=13;\quad l=27;\quad m=23;\quad n=23;\quad p=20.$

$r=25;\quad l=51;\quad m=47;\quad n=47;\quad p=28.$

$r=41;\quad l=83;\quad m=79;\quad n=79;\quad p=36,$ etc.

$r=2h^2+6h+5;\quad l=4h^2+12h+11;\quad m=n=4h^2+12h+7;\quad p=4(2h+3),$

$i+j=5.\quad i=1;\ j=4;\ i^2+j^2-i-j=12;\ p^2=40r-48.$ Imposible.
$i=2;\ j=3;\ i^2+j^2-i-j=8;\ p^2=40r-32.$ Imposible.

$i+j=6.\quad i=1;\ j=5;\ i^2+j^2-i-j=20;\ p^2=48r-80.$

$r=10;\quad l=21;\quad m=19;\quad n=11;\quad p=20.$

$r=18;\quad l=37;\quad m=35;\quad n=27;\quad p=28.$

$r=23;\quad l=47;\quad m=45;\quad n=37;\quad p=32.$

$r=35;\quad l=71;\quad m=69;\quad n=61;\quad p=40.$

$r=42;\quad l=85;\quad m=83;\quad n=75;\quad p=44,$ etc.

$$r=\begin{cases} 3h^2+4h+3;\quad l=6h^2+8h+7;\quad m=6h^2+8h+5;\\ \quad n=6h^2+8h-3;\quad p=12h+8.\\ 3h^2+4h+7;\quad l=6h^2+8h+15;\quad m=6h^2+8h+13;\\ \quad n=6h^2+8h-5;\quad p=12h+16.\end{cases}$$

$i=2;\quad j=4;\quad i^2+j^2-i-j=14;\quad p^2=48r-56.$ Imposible.
$i=3;\quad j=3;\quad i^2+j^2-i-j=12;\quad p^2=48r-48.$ Reductible.

$i+j=7.\quad i=1;\ j=6;\ i^2+j^2-i-j=30;\ p^2=56r-120.$ Imposible.
$i=2;\ j=5;\ i^2+j^2-i-j=22;\ p^2=56r-88.$ Imposible.
$i=3;\ j=4;\ i^2+j^2-i-j=18;\ p^2=56r-72.$ Imposible.

$i+j=8.\quad i=1;\ j=7;\ i^2+j^2-i-j=42;\ p^2=64r-168.$ Imposible.
$i=2;\ j=6;\ i^2+j^2-i-j=32;\ p^2=64r-128.$

$r=18;\quad l=37;\quad m=33;\quad n=25;\quad p=32.$

$r=27;\quad l=55;\quad m=51;\quad n=43;\quad p=40.$

$r=38;\quad l=77;\quad m=73;\quad n=65;\quad p=48.$

$r=h^2+6h+1;\ l=2h^2+12h+3;\ m=2h^2+12h-1;$
$n=2h^2+12h-9;\ p=4(2h+6).$

$i=3;\ j=5;\ i^2+j^2-i-j=26;\ p^2=64r-104.$ Imposible.

$i=4;\ j=4;\ i^2+j^2-i-j=24;\ p^2=64r-96.$ Imposible.

$i+j=9.\quad i=1;\ j=;\ i^2+j^2-i-j=56;\ p^2=72r-224.$

$r=14;\quad l=29;\quad m=27;\quad n=13;\quad p=28.$

$r=30;\quad l=61;\quad m=59;\quad n=45;\quad p=44.$

$$r=\begin{cases} 18h^2-8h+4;\quad 1=36h^2-16h+9;\quad m=36h^2-16h+7; \\ \quad n=36h^2-16h-7;\quad p=4(9h-2). \\ 18h^2+8h+4;\quad 1=36h^2+16h+9;\quad m=36h^2+16h+7; \\ \quad n=36h^2+16h-7;\quad p=4(9h+2). \end{cases}$$

$i=2;\ j=7;\ i^2+j^2-i-j=44;\ p^2=72r-176.$

$r=40;\quad l=81;\quad m=77;\quad n=67;\quad p=52.$

$r=46;\quad l=93;\quad m=89;\quad n=79;\quad p=56.$

$$r=\begin{cases} 18h^2+16h+6;\quad l=36h^2+32h+13;\quad m=36h^2+32h+9; \\ \quad n=36h^2+32h-1;\quad p=4(9h+4). \\ 18h^2+20h+8;\quad l=36h^2+40h+17;\quad m=36h^2+40h+13; \\ \quad n=36h^2+32h-13;\quad p=4(9h+5). \end{cases}$$

$i=3;\ j=6;\ i^2+j^2-i-j=36;\ p^2=72r-144.$

$r=20;\quad l=41;\quad m=35;\quad n=29;\quad p=36.$

$r=34;\quad l=69;\quad m=63;\quad n=57;\quad p=48.$ Reductible.

$r=52;\quad l=105;\quad m=99;\quad n=93;\quad p=60.$ Reductible.

$r=74;\quad l=149;\quad m=143;\quad n=137;\quad p=72.$

$r=18h^2+2;\ l=36h^2+5;\ m=36h^2-1;\ n=36h-7;\ p=36h.$

$i=4;\ j=5;\ i^2+j^2-i-j=32;\ p^2=72r-128.$

$r=16;\quad l=33;\quad m=25;\quad n=23;\quad p=32.$

$r=24;\quad l=49;\quad m=41;\quad n=39;\quad p=40.$

$$r=\begin{cases} 18h^2-4h+2;\quad l=36h^2-8h+5;\quad m=36h^2-8h-3; \\ \quad n=36h^2-8h-5;\quad p=4(9h-1). \\ 18h^2+4h+2;\quad l=36h^2+8h+5;\quad m=36h^2+8h-3; \\ \quad n=36h^2+8h+5;\quad p=4(9h+1). \end{cases}$$

$i+j=10.$ Todos imposibles menos $i=5,\ j=5,$ reductible, y así sucesivamente.

En todas estas series, la escala $\frac{p}{l}$ tiende a cero, a medida que crece h, y, en cambio, las otras dos escalas $\frac{m}{l}$ y $\frac{n}{l}$ tienden a la unidad

Si quisiéramos obtener las soluciones de modo que una de las escalas $\frac{m}{l}$ o $\frac{n}{l}$ tendiese a cero, habría que considerar otras sustituciones. Por ejemplo: Si $l=4K+1$; $m=4K-1$; $p=4K$, resulta

$$n^2=2l^2-m^2-n^2=24K+1,$$

y así obtenemos:

$k=2$;	$l=9$;	$m=7$;	$n=7$;	$p=8$.
$k=5$;	$l=21$;	$m=19$;	$n=11$;	$p=20$.
$k=7$;	$l=29$;	$m=27$;	$n=13$;	$p=28$.
$k=12$;	$l=49$;	$m=47$;	$n=17$;	$p=48$.
$k=15$;	$l=61$;	$m=59$;	$n=19$;	$p=60$.
$k=22$;	$l=89$;	$m=87$;	$n=23$;	$p=88$.
$k=26$;	$l=105$;	$m=103$;	$n=25$;	$p=104$.
$k=35$;	$l=141$;	$m=139$;	$n=29$;	$p=140$.
$k=40$;	$l=161$;	$m=159$;	$n=31$;	$p=160$.
$k=51$;	$l=205$;	$m=213$;	$n=35$;	$p=204$.
$k=57$;	$l=229$;	$m=227$;	$n=37$;	$p=228$, etc.

$$k=\begin{cases}\frac{1}{2}h(3h+1)=\frac{3}{2}h^2+\frac{1}{2}h; \quad l=6h^2+2h+1, \\ \qquad m=6h^2+2h-1;\ n=6h+1 \\ \frac{1}{2}(h+1)(3h+2)=\frac{3}{2}h^2+\frac{5}{2}h+1; \quad l=6h^2+10h+5; \\ \qquad m=6h^2+10h+3; n=6h+5\end{cases}$$

que nos da los valores mínimos de n, para un valor dado de l.

Si $l=4K+3$; $m=4K+1$; $p=4K$, resulta $n^2=40K+17$. Imposible.
Si $l=4K+1$; $m=4K-3$; $p=4K$, resulta $n^2=40K-7$. Imposible.
Si $l=4K+3$; $m=4K-1$; $p=4K$, resulta $n^2=56K+17$. Imposible.
Si $l=4K+1$; $m=4K-1$; $p=4K-4$, res. $n^2=56K-15$. Imposible.
Si $l=4K+1$; $m=4K-5$; $p=4K$, resulta $n^2=56K-23$. Imposible.

Si $l=4K+1$; $m=4K-7$; $p=4K$, resulta $n^2=72K-47$.

$K=8$; $l=33$; $m=25$; $n=23$; $p=32$.
$K=14$; $l=57$; $m=49$; $n=31$; $p=56$.
$K=24$; $l=97$; $m=89$; $n=41$; $p=96$.
$K=34$; $l=137$; $m=129$; $n=49$; $p=136$.
$K=49$; $l=197$; $m=189$; $n=59$; $p=196$.
$K=63$; $l=253$; $m=245$; $n=67$; $p=252$.

$$K=\begin{cases} \frac{9}{2}h^2+\frac{5}{2}h+1; & l=18h^2+10h+5; \quad m=18h^2+10h-3; \\ & n=18h+5. \\ \frac{9}{2}h^2+\frac{13}{2}h+3; & l=18h^2+26h+13; \quad m=18h^2+26h+5; \\ & n=18h+13. \end{cases}$$

Si $l=4K+3$; $m=4K-3$; $p=4K$, resulta $n^2=72K+9$.

$K=10$; $l=43$; $m=37$; $n=27$; $p=40$.
$K=28$; $l=115$; $m=109$; $n=45$; $p=112$.
$K=55$; $l=223$; $m=217$; $n=63$; $p=218$.

$$K=\begin{cases} \frac{9}{2}h^2+\frac{9}{2}h+1; & l=18h^2+18h+7; \quad m=18h^2+18h+1; \\ & n=18h+9. \end{cases}$$

Si $l=4K+1$; $m=4K-3$; $p=4K-4$, resulta $n^2=72K-23$.

$K=9$; $l=37$; $m=33$; $n=25$; $p=32$.
$K=12$; $l=49$; $m=45$; $n=29$; $p=44$.
$K=26$; $l=105$; $m=101$; $n=43$; $p=100$.
$K=31$; $l=125$; $m=121$; $n=47$; $p=120$.

$$K=\begin{cases} \frac{9}{2}h^2+\frac{7}{2}h+1; & l=18h^2+14h+5; \quad m=18h^2+14h+1; \\ & n=18h+7. \\ \frac{9}{2}h^2+\frac{11}{2}h+2; & l=18h^2+22h+9; \quad m=18h^2+14h+5; \\ & n=18h+11. \end{cases}$$

Si $l=4K+3$; $m=4K+1$; $p=4K-4$, resulta $n^2=72k+1$

$K=4$; $l=19$; $m=17$; $n=17$; $p=12$.

$K=5;\quad l=23;\quad m=21;\quad n=19;\quad p=16.$
$K=17;\quad l=71;\quad m=69;\quad n=35;\quad p=64.$
$K=19;\quad l=79;\quad m=77;\quad n=37;\quad p=72.$

$$K=\begin{cases}\dfrac{9}{2}h^2-\dfrac{1}{2}h; & l=18h^2-2h+3;\quad m=18h^2-2h+1;\\ & n=18h-1.\\ \dfrac{9}{2}h^2+\dfrac{1}{2}h; & l=18h^2+2h+3;\quad m=18h^2+2h+1;\\ & n=18h+1.\end{cases}$$

Si $l=4K+1;\ m=4K-9;\ p=4K$, resulta $n^2=88K-79$.
$K=5;\quad l=21;\quad m=11;\quad n=19;\quad p=20$, ya considerada.
$K=8;\quad l=33;\quad m=23;\quad n=25;\quad p=32$, ya considerada.
$K=20;\quad l=81;\quad m=71;\quad n=41;\quad p=80.$
$K=26;\quad l=105;\quad m=95;\quad n=47;\quad p=104$, etc.

$$K=\begin{cases}\dfrac{11}{2}h^2-\dfrac{3}{2}h+1; & l=22h^2-6h+5;\quad m=22h^2-6h-5;\\ & n=22h-3.\\ \dfrac{11}{2}h^2+\dfrac{3}{2}h+1; & l=22h^2+6h+5;\quad m=22h^2+6h-5;\\ & n=22h+3.\end{cases}$$

Si $l=4K+3;\ m=4K-5;\ p=4K$, resulta $n^2=88K-7$.
$K=11;\quad l=47;\quad m=39;\quad n=31;\quad p=44.$
$K=14;\quad l=59;\quad m=51;\quad n=35;\quad p=56.$
$K=32;\quad l=131;\quad m=123;\quad n=53;\quad p=128.$
$K=37;\quad l=151;\quad m=143;\quad n=57;\quad p=148$, etc.

$$K=\begin{cases}\dfrac{11}{2}h^2+\dfrac{9}{2}h+1; & l=22h^2+18h+7;\quad m=22h^2+18h-1;\\ & n=22h+9.\\ \dfrac{11}{2}h^2+\dfrac{13}{2}h+2; & l=22h^2+26h+11;\quad m=22h^2+26h+3;\\ & n=22h+13.\end{cases}$$

Si $l=4K+1;\ m=4K-5;\ p=4K-4$, resulta $n^2=88k-39$.
$k=10;\quad l=41;\quad m=35;\quad n=29;\quad p=36.$

$k=16;\quad l=65;\quad m=59;\quad n=37;\quad p=60.$
$k=30;\quad l=121;\quad m=115;\quad n=51;\quad p=116.$
$k=40;\quad l=161;\quad m=155;\quad n=59;\quad p=156,$ etc.

$$K=\begin{cases}\dfrac{11}{2}h^2+\dfrac{7}{2}h+1; & l=22h^2+14h+5;\quad m=22h^2+14h-1;\\ & n=22h+7.\\ \dfrac{11}{2}h^2+\dfrac{15}{2}h+3; & l=22h^2+30h+13;\quad m=22h^2+30h+7;\\ & n=22h+15.\end{cases}$$

Si $l=4K+3$; $m=4K-1$; $p=4K-4$, resulta $n^2=88k+1$.
$K=5;\quad l=23;\quad m=19;\quad n=21;\quad p=16.$
$K=6;\quad l=27;\quad m=23;\quad n=23;\quad p=20.$
$K=21;\quad l=87;\quad m=83;\quad n=43;\quad p=80.$
$K=23;\quad l=95;\quad m=91;\quad n=45;\quad p=88,$ etc.

$$K=\begin{cases}\dfrac{11}{2}h^2-\dfrac{1}{2}h; & l=22h^2-2h+3;\quad m=22h^2-2h-1;\quad n=22h-1.\\ \dfrac{11}{2}h^2+\dfrac{1}{2}h; & l=22h^2+2h+3;\quad m=22h^2+2h-1;\quad n=22h+1.\end{cases}$$

Si $l=4K+1$; $m=4K-1$; $p=4K-8$, resulta $n^2=88K-63$.
$K=9;\quad l=37;\quad m=35;\quad n=27;\quad p=28.$
$K=18;\quad l=73;\quad m=71;\quad n=39;\quad p=64.$
$K=28;\quad l=113;\quad m=111;\quad n=49;\quad p=104.$
$K=43;\quad l=173;\quad m=171;\quad n=61;\quad p=164,$ etc.

$$K=\begin{cases}\dfrac{11}{2}h^2+\dfrac{5}{2}h+4; & l=22h^2+34h+17;\quad m=22h^2+34h+15;\\ & n=22h+5.\\ \dfrac{11}{2}h^2+\dfrac{17}{2}h+1; & l=22h^2+10h+3;\quad m=22h^2+10h+5;\\ & n=22h+17,\end{cases}$$

y así sucesivamente.

Este procedimiento, fundado en las propiedades de los restos y no restos cuadráticos, reduce bastante el tanteo, pero no permite obtener soluciones particulares que gocen de ciertas propiedades. Sólo como complemento de lo que dijimos en el párrafo anterior sobre soluciones que se aproximan asintóticamente a la isométrica, vamos a resolver la ecuación fundamental:

$$2\,l^2 = m^2 + n^2 + p^2,$$

cuando $m = 4K + 1$; $n = 4K - 1$; y $p = 4K$, de donde

$$2\,l^2 = 48K^2 + 2; \text{ o sea: } l^2 = 24K^2 + 1.$$

Todos los cuadrados de los números primos con 6 son de la forma $24h + 1$; pero el recíproco no es cierto, y los únicos valores de K (prescindiendo de 1, que no sirve) que satisfacen la ecuación, son:

$K_1 = 10$; $l_1 = 49$; $m_1 = 41$; $n_1 = 39$; $p_1 = 40$.
$K_2 = 99$; $l_2 = 485$; $m_2 = 397$; $n_2 = 395$; $p_2 = 396$.
$K_3 = 980$; $l_3 = 4801$; $m_3 = 3921$; $n_3 = 3919$; $p_3 = 3920$.
$K_4 = 9701$; $l_4 = 47525$; $m_4 = 38805$; $n_4 = 38803$; $p_4 = 38804$.
$K_5 = 96030$; $l_5 = 470449$; $m_5 = 384121$; $n_5 = 384119$; $p_5 = 384120$, etc.

$$K_S = 10K_{S-1} - K_{S-2};\ l_S = 10\,l_{S-1} - l_{S-2};\ m_S = 10m_{S-1} - m_{S-2} - 8;$$
$$n_S = 10n_{S-1} - n_{S-2} + 8;\ p_S = 10p_{S-1} - p_{S-2}.$$

Estos resultados, lo mismo que sus análogos para las escalas monodimétricas exactas que difieren entre sí una unidad fraccionaria, se obtienen por el método de Lagrange aplicado al desarrollo de las reducidas de la fracción continua periódica correspondiente a $\sqrt{\frac{2}{3}} = [1, 5, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots]$ que son

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{5},\ \frac{9}{11},\ \frac{40}{49},\ \frac{89}{109},\ \frac{396}{485},\ \frac{881}{1079},\ \frac{3920}{4801},$$
$$\frac{8721}{10681},\ \frac{38804}{47525},\ \frac{86329}{105731},\ \frac{384120}{470449},\ \ldots$$

Los denominadores de las reducidas pares dan los valores de l_s y los numeradores de los de p_s.

Otros resultados tienden asintóticamente a la solución isométrica, como,

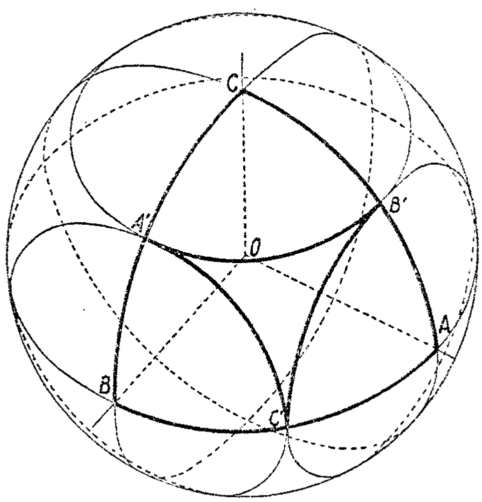
$l_1 = 59;$	$m_1 = 53;$	$n_1 = 43;$	$p_1 = 48.$	
$l_2 = 103;$	$m_2 = 89;$	$n_2 = 79;$	$p_2 = 84.$	
$l_3 = 245;$	$m_3 = 205;$	$n_3 = 195;$	$p_3 = 200,$	reducible.
$l_4 = 1019;$	$m_4 = 837;$	$n_4 = 827;$	$p_4 = 832,$	etc.

pero no ofrecen especial interés.

§ 4. Escolio

La figura adjunta representa, con las escalas axonométricas, $m = \frac{21}{23}$, $n = \frac{19}{23}$, $p = \frac{16}{23}$ una esfera de radio $\sqrt{2}$, cuya ecuación será:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$



En ella se ven dibujados los círculos máximos correspondientes a los tres planos coordenados que forman en la porción del espacio de coordenadas positivas el triángulo esférico trirrectángulo ABC. Además, están dibujados tres círculos menores $B'C'$, paralelo a BC; $A'C$, paralelo a AC; y $A'B'$, paralelo a AB, de radio unidad, situados en planos paralelos a los tres coordenados, a una distancia igual a la mitad positiva. Los puntos interiores a la superficie formada por los tres arcos de 90°, dos a dos tangentes entre sí, $B'C'$, $A'C'$ y $A'B'$, tienen sus tres coordenadas inferiores a la unidad. Por lo tanto, los puntos de coordenadas racionales situados en ese recinto superficial $A'B'C'$ son los que satisfacen las condiciones del enunciado. Cada solución del problema, por permutación de las coordenadas, nos da *seis* puntos racionales.

El área del triángulo esférico trirrectángulo ABC es π; el de la porción $A'B'C'$ es

$$\frac{1}{8}[8\pi-6.2\pi\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)]=\pi\frac{3\sqrt{2}-4}{2}=\pi.0{,}1213203$$

por lo tanto, es menos de una octava parte de ABC. Luego, *si suponemos que los puntos de coordenadas racionales están uniformemente distribuídos sobre la superficie de la esfera* (suposición enteramente gratuita), la probabilidad de que una solución de

$$x^2+y^2+z^2=2$$

sea tal que x, y, z, sean, a la vez, menores que la unidad, es menor que $1/8$.

Si nos dan *una* de las escalas racionales es necesario, para que haya soluciones racionales de la ecuación fundamental, que dicha escala, reducida a su más simple expresión, sea una fracción propia con sus dos términos impares, o con denominador impar y numerador divisible por 4, y que el doble del cuadrado del denominador, menos el cuadrado del numerador, no contenga factores primos de la forma $4n+3$ (teorema de Stevin-Gauss). Es sabido que la probabilidad de este resultado disminuye rápidamente si ambos términos son crecidos. De modo que la probabilidad de encontrar soluciones al problema tal cual lo hemos planteado resulta muy pequeña, lo que explica los tanteos expuestos.

Pero, como hace notar muy bien Hardy (1). es difícil hacer investigaciones en teoría de números a la vez *naturales* y *razonables*, y pone varios ejemplos. Sin poderse dar una prueba

(1) *"An Introduction to the Theory of Numbers"*, by G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, Oxford, 1939. Cap. 1, § 5.

rigurosa, sino por sólo inspección de tablas de números primos, se saca la consecuencia de que es *probable* que el número de parejas de primos que difieren en dos unidades es infinito; esta afirmación no es, en la actualidad, un teorema, sino un postulado, o, mejor todavía, una conjetura, ya que no existe demostración rigurosa, pero si se supone esta conjetura verdadera, lleva a cierta consecuencia, que vamos a explicar.

La *probabilidad* de que un número entero cualquiera sea divisible por m es $\frac{1}{m}$, y de que no sea divisible por m es $1-\frac{1}{m}$ tanto si m es primo como si no lo es. Si p_1 y p_2 son dos números primos distintos, la *probabilidad* de que un entero sea primo con ambos es $(1-\frac{1}{p_1})\ (1-\frac{1}{p_2})$; y si se consideran n primos distintos $p_1, p_2, \dots p_n$, la *probabilidad* de que un entero sea primo con todos ellos es $(1-\frac{1}{p_1})\ (1-\frac{1}{p_2}) \dots (1-\frac{1}{p_n})$. Si consideramos, p. ej., 2, 3, 5 y 7, la probabilidad de que un número no sea divisible por ninguno de ellos es $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}=\frac{8}{35}$. Ahora bien, todo número menor que 120, o es primo, o es divisible por 2, o por 3, o por 5, o por 7, o por varios de ellos a la vez; luego, la probabilidad de que un número menor que 120 sea primo absoluto es $\frac{8}{35}$, o sea, entre los 120 primeros números debería haber $\frac{8}{35}\ 120+4=31{,}43$ números primos, contando la unidad; en realidad, hay 31.

En cambio, la probabilidad de que dos números impares consecutivos no sean ambos divisibles por 5, es $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ y de que no sean ambos divisibles por 7 es $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$. Entre 1 y 120 hay 19 parejas de números de la forma $6n\pm 1$. Luego, la probabilidad de que entre esas 19 parejas los dos números que las componen sean primos, es $\frac{3}{5}\frac{5}{7}+\frac{2}{19}$ (1) $=0{,}5338$, y

(1) Porque hay que contar las parejas 3-5 y 5-7.

el número de parejas (prescindiendo de 1, 2 y 3) es 10,142. En realidad son 10: 3–5, 5–7, 11–13, 17–19, 29–31, 41–43, 59–61, 71–73, 101–103 y 107–109.

Luego, así como por ser cierto (teorema de Euclides) que el número de números primos es infinito, se deduce: 1.º, la serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p}+\ldots$ es infinita y tiende a infinito; y 2.º, $N(1-\frac{1}{2})\ (1-\frac{1}{3})\ldots(1-\frac{1}{p})$, siendo p el número primo mayor, cuyo cuadrado $p^2<N$, tiende a infinito con N, si es cierta la conjetura de que hay infinitas parejas de números primos que difieren en dos unidades, se deduce que: $\frac{N}{6}\ (1-\frac{2}{5})\ (1-\frac{2}{7})\ldots(1-\frac{2}{p})$ tiende a infinito con N, y expresa asintóticamente el número de parejas de primos que difieren en 2, comprendidos entre p y N, siendo p el mayor número primo, cuyo cuadrado es menor que N.

Por el mismo procedimiento de inspección saca Hardy la conjetura de que hay infinitos tríos de primos consecutivos $(p,\ p+2,\ p+6)$ y $(p,\ p+4,\ p+6)$; nada dice de cuartetos de primos en una misma decena, como 11–13–17–19, 101–103–107–109, 191–193–197–199, 821–823–827–829, 1481–1483–1487–1489, 1871–1873–1877–1879, 2081 – 2083 – 2087 – 2089, 3251–3253–3257–3259, 3461–3463–3467–3469, 5651 – 5653–5657–5659, 9431–9433–9437–9439, etc. Tal vez le parecería aventurado el conjeturar que hay infinitos cuartetos de éste género, lo que equivaldría a decir que $\frac{N}{30}(1-\frac{4}{7})\ (1-\frac{4}{11})\ (1-\frac{4}{13})\ldots(1-\frac{4}{p})$ tiende a infinito con N, siendo p el mayor número primo cuyo cuadrado es menor que N; tal expresión sería aproximadamente la de cuartetos de números primos en una misma decena desde p a N. En cambio, la conjetura contraria traería como consecuencia que dicha expresión tiende a cero cuando p es mayor que el último número primo del último cuarteto.

Acaba esta discusión Hardy con la frase: *Tales conjeturas con más largas series de primos pueden ser multiplicadas, pero su prueba o recusación* (en realidad sólo admisión o inadmisión) *está en la actualidad más allá de los recursos de las Matemáticas.*

Sin embargo, vamos a atrevernos a hacer alguna ulterior investigación.

Es imposible que en una serie de 31 números consecutivos, desde $30K$ a $30K+30$, haya más de siete números primos; porque entre esos 31 números hay sólo ocho primos con 30, a saber, $30K+1$, $+7$, $+11$, $+13$, $+17$, $+19$, $+23$, y $+29$, y de esos uno por lo menos ha de ser divisible por 7 (sólo puede haber dos si lo son el primero $30K+1$ y el último $30K+29=30K+$ $+1$ y $+28$). No obstante, la serie de nueve primos 1277—1279—1283—1289—1291—1297—1301—1303—1307 está comprendida entre 31 números consecutivos. ¿Hay otras series de 31 números consecutivos con nueve primos, y es su número finito o infinito? Tal pregunta no puede calificarse ni de innatural ni de irracional, como otras que hace Hardy, y se puede extender la pregunta de esta manera: Entre 0 y $30030=2.3.5.7.11.13$ hay ocho series de once números, dentro de 37 números consecutivos, no divisibles por ninguno de esos seis primos, a saber:

1ª 1271=31.41, 1273=19.67, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307.

2ª 5891=43.137, 5893=71.83, 5897, 5899=17.347, 5903, 5909=19.311, 5911=23.257, 5917=61.97, 5921=31.191, 5923, 5927.

3ª 10243, 10247, 10249=37.277, 10253, 10259, 10261=31.331, 10267, 10271, 10273, 10277=43.239, 10279=19.541.

4ª 14863=89.167, 14867, 14869, 14873=107.139, 14879, 14881=23.647, 14887, 14891, 14893=53.281, 14897, 14899.

5ª 15131, 15133=37.409, 15137, 15139, 15143=19.797, 15149, 15151=109.139, 15157=23.659, 15161, 15163=59.257, 15167=29.523.

6ª 19751, 19753, 19757=23.859, 19759, 19763, 19769=53.373, 19771=17.1163, 19777, 19781=131.151, 19783=73.271, 19787=47.421.

7ª 24103, 24107, 24109, 24113, 24119=89.271, 24121, 24127=23.1049, 24131=59.409, 24133, 24137, 24139=101.239.

8ª 28723, 28727=23.1249, 28729, 28733=59.487, 28739=29.991,

Hay hasta 448 de estas series de once números dentro de 37 consecutivos, en que ninguno de ellos es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19, en cada grupo de números entre $969969K$ y $969969(K+1)$; es, pues, natural y razonable preguntar:

¿Existe alguna serie de 37 números consecutivos, once de los cuales sean primos? ¿Existe más de una? ¿Existen infinitas?

La contestación a estas preguntas entraña que la expresión