TEOREMAS ANALOGOS AL DE ROLLE Y VALOR MEDIO PARA FUNCIONES CONTINUAS, EN BASE A DIFERENCIAS FINITAS Y DIVIDIDAS

por

JOSÉ BARRAL SOUTO
Facultad de Ciencias Económicas
Buenos Aires

1. *Si $f(x)$ es continua y definida en el intervalo cerrado $a \leqq x \leqq b$, y toma valores iguales en los extremos $f(a)=f(b)$, existen dos puntos α, β del intervalo, tales que*

$$f(\beta)-f(\alpha)=0 \tag{1}$$

$$\beta-\alpha=\frac{b-a}{2}. \tag{2}$$

Para demostrarlo, observemos que la función

$$z(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x) \tag{3}$$

continua en el intervalo cerrado $(a, (a+b)/2)$, toma en los extremos los valores

$$z(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a) \tag{4}$$

$$z\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{5}$$

que, o bien son nulos, en cuyo caso tanto $\beta=(a+b)/2$ y $\alpha=a$, como $\beta=b, \alpha=(b+a)/2$ satisfacen las condiciones (1) y (2) o bien son numéricamente iguales y de signos contrarios y en virtud de la continuidad de $z(x)$ hay un punto α para el cual es

$$(6) \qquad z(\alpha) = f(\alpha + \frac{b-a}{2}) - f(\alpha) = 0.$$

Por lo tanto haciendo $\beta = \alpha + (b-a)/2$, queda demostrado el teorema.

2. Si se repite el raciocinio para la función $f(x)$, continua en el intervalo cerrado (α, β), que toma el mismo valor en los extremos, $f(\alpha) = f(\beta)$, se demuestra la existencia de dos puntos α_2, β_2 tales que es

$$f(\beta_2) - f(\alpha_2) = 0 \quad \text{siendo} \quad \beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{b-a}{2^2};$$

Si uno de los puntos α_2, β_2 coincide con uno de los extremos a, b lo mismo ocurre necesariamente con α_1, β_1; v. g. si es $\alpha_2 = a$ también es $\alpha_1 = a$ y por lo tanto β_1 y β_2 son puntos interiores que satisfacen las condiciones precedentes.

Considerando pues que tales puntos interiores se designen por α_2, β_2 si se reitera el proceso n veces, se demuestra que en general existen dos puntos interiores α_n, β_n del intervalo (a, b), tales que

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = 0 \;\; ; \;\; \beta_n - \alpha_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

3. Geométricamente el teorema precedente equivale a afirmar la existencia de cuerdas paralelas al eje x, al intervalo (a, b), de longitud exactamente igual a $(b-a)/2^n$, $(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

Es fácil imaginar funciones continuas, como las de las figuras 1 o 2, en que no son posibles ciertas longitudes.

En la fig. 1, no existe cuerda alguna con longitud h comprendida entre $(b-a)/2$ y $b-a$. En la fig. 2, donde por comodidad hemos recurrido a rectas alternadamente paralelas, las longitudes posibles son, incluyendo entre ellas la cuerda que une los extremos

$$0 < h \leqq \frac{b-a}{3} \; ; \; \frac{b-a}{2} \leqq h \leqq 2\,\frac{b-a}{3} \; ; \; h = b - a.$$

Siendo pues posible, la inexistencia de ciertas cuerdas, es interesante saber que necesariamente existen cuerdas de longitud $(b-a)/2^n$ $(n=1,2,3,...)$ y en general cuerdas de longitud $(b-a)/n$, como se demuestra por camino análogo al seguido en § 1.

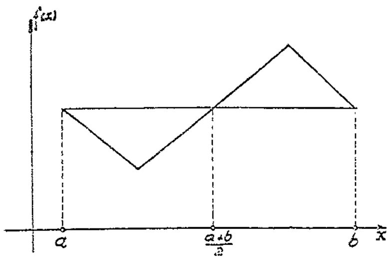

Fig. 1

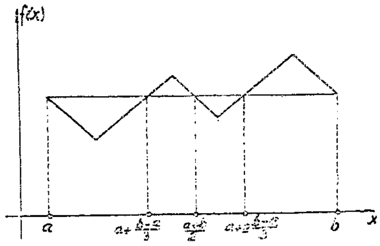

Fig. 2

4. *Si es $f(x)$ continua y definida para $a \leqq x \leqq b$; $f(a)=f(b)$ y n un número entero mayor que 2, existen puntos interiores α, β tales que*

$$f(\beta)-f(\alpha)=0 \ ; \ \beta-\alpha=\frac{b-a}{n} . \tag{1}$$

En efecto, sea $b=a+nh$ y la función

$$z(x)=f(x+h)-f(x).$$

Se tiene sucesivamente

$$z(a)=f(a+h)-f(a)$$
$$z(a+h)=f(a+2h)-f(a+h)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z(a+nh-h)=f(a+nh)-f(a+nh-h)$$

Sumando miembro a miembro, queda

$$z(a)+z(a+h)+\ldots+z(a+nh-h)=f(b)-f(a)=0. \tag{2}$$

O bien son nulos los valores $z(a+rh)$ del primer miembro en cuyo caso los términos centrales nulos prueban la existencia de puntos interiores α y β que distan h; o bien hay términos de distinto signo en cuyo caso la continuidad de $z(x)$ exige que haya un punto interior α para el cual se verifique

$$(3) \qquad z(\alpha)=f(\alpha+h)-f(\alpha)=0 \quad ; \quad h=\frac{b-a}{n} .$$

Luego, haciendo $\beta=\alpha+h$ se tienen las relaciones (1) y por tanto demostrada la tesis.

Este teorema puede considerarse como un análogo del de Rolle, bastando para acentuar la analogía escribir en cambio de (1) la expresión equivalente

$$(4) \qquad \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0.$$

En tal caso, si se hace tender n a infinito, y la función es derivable, se cae en el teorema de Rolle.

5. Si la función alcanza su máximo (o mínimo) en los extremos a, b, dado un $h<b-a$ la función

$$(1) \qquad z(x)=f(x+h)-f(x)$$

toma en los extremos de su intervalo de continuidad $(a, b-h)$, valores

$$z(a)=f(a+h)-f(a) \ ; \ z(b-h)=f(b)-f(b-h)$$

que o bien son nulos o de signos contrarios, impuestos por $f(a)$ y $f(b)$ (o por $f(a+h)$ y $f(b-h)$, si se tratara de mínimos).

Existe entonces un valor de $x=\alpha$, perteneciente al intervalo, que anula la (1); probándose así la existencia de los dos puntos α y $\beta=\alpha+h$ para los cuales es

$$(2) \qquad f(\beta)-f(\alpha)=0 \ ; \ \beta-\alpha=h.$$

Por lo tanto *una función $f(x)$, continua y definida para $a\leqq x\leqq b$, que alcanza su valor máximo (o mínimo) en ambos* *extremos, admite toda cuerda paralela al eje x, de longitud* $h < b - a$.

Funciones continuas carentes de ciertas cuerdas

6. *Si es*

A) $f(x)$ *continua y definida para* $0 \leqq x \leqq 1$

B) $f(x+\vartheta) < f(x)$ *para* $\frac{1}{n} < \vartheta < \frac{1}{n-1}$ *(n, entero y positivo)*

C) $f(0) = f(1) = 0$

se verifica que

1º. *no existe cuerda alguna paralela al eje x, de longitud h tal que*

$$\frac{s}{n} < h < \frac{s}{n-1} ; \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

2º. *la función se anula sólo para*

$$x = \frac{s}{n}, \frac{s}{n-1} ; \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

La primera tesis se deduce de la condición B), al sustituir reiteradamente x por $x + \vartheta$, dándonos

$$(1) \qquad f(x + s\vartheta) < f(x + s\vartheta - \vartheta) < f(x + s\vartheta - 2\vartheta) < \dots < f(x+\vartheta) < f(x)$$

y por lo tanto, no anulándose la función

$$(2) \qquad z(x) = f(x + s\vartheta) - f(x)$$

para ningún $h = s\vartheta$, quedaría demostrada la primera tesis, que como vemos es independiente de la condición C), que nos interesa para lo que sigue.

Haciendo ahora $x = 0$ en la sucesión de desigualdades (1), se tiene para los términos extremos, en virtud de la condición C)

$$(3) \qquad f(s\vartheta) = 0 \quad \text{para} \quad \frac{s}{n} < s\vartheta < \frac{s}{n-1}$$

y haciendo $x = 1 - s\vartheta$

$$(4) \qquad 0 < f(1 - s\vartheta) \quad \text{para} \quad \frac{n-1-s}{n-1} < 1 - s\vartheta < \frac{n-s}{n}.$$

Luego, si en el intervalo $(0, 1)$ en el que la función está definida, marcamos los puntos $0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n}, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n}$, 1, se tienen en total $2n$ subintervalos contiguos en los cuales la función toma respectiva y alternadamente signos positivos y negativos. La condición primera, referente a la continuidad, exige pues que la función se anule en los puntos interiores marcados, que por la conservación del signo en cada subintervalo, son los únicos puntos de anulación además de los extremos [1].

7. La función definida para $0 \leqq x \leqq 1$ y n entero y positivo por

$$(1) \qquad f(x) = \left| \frac{2n-1}{2} x - \left[\frac{2n-1}{2} x + \frac{1}{2} \right] \right| - \frac{x}{2}$$

donde con la notación $[u]$ se indica la «parte entera de u» (o sea el mayor número entero que no exceda a u) y con $|u|$ al valor absoluto de u, es continua en todo el intervalo, nula en los extremos y además tal que la desigualdad

$$(2) \qquad z(x) = f(x + \vartheta) - f(x) < 0$$

se verifica para todo valor x y ϑ que satisfacen a

$$(3) \qquad \frac{s}{n} < \vartheta < \frac{s}{n-1}; \ (s = 1, 2, 3, \ldots, n-1) \ ; \ 0 \leqq x \leqq 1 - \vartheta.$$

---

(1) Si se reemplaza la condición B) por la aparentemente mas general $f(z + \vartheta < f(x)$ para $1/n < \vartheta < 1/(n\text{-}t)$ siendo n y t enteros y positivos, correspondería según (3) y (4) signos negativos y positivos respectivamente a los intervalos $s/n < s\vartheta < s/(n\text{-}t)$ y $(n\text{-}t\text{-}s)/(n\text{-}t) < 1\text{-}s\vartheta < (n\text{-}s)/n$ que para ser compatibles deben ser exteriores unos a los otros. Esto implica que cualquiera sea $s = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$ debe verificarse $s/(n\text{-}t) \leqq (s + t)/n \therefore s \leqq n\text{-}t$. Por lo tanto, *solo eligiendo* $t = 1$, como se hizo, es posible tal compatibilidad.

Para probar esta última aserción, escribamos según (1) y (2)

$$z(x) = \left|\frac{2n-1}{2}(x+\vartheta) - \left[\frac{2n-1}{2}(x+\vartheta) + \frac{1}{2}\right]\right| -$$

$$-\frac{x+\vartheta}{2} - \left|\frac{2n-1}{2}x - \left[\frac{2n-1}{2}x + \frac{1}{2}\right]\right| + \frac{x}{2}$$

simplificando y teniendo en cuenta que

$$|b| - |a| \leqq |b-a|$$

el máximo valor de $z(x)$ resulta ser

$$\left|\frac{2n-1}{2}\vartheta - \left[\frac{2n-1}{2}(x+\vartheta) + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2n-1}{2}x + \frac{1}{2}\right]\right| - \frac{\vartheta}{2}. \tag{4}$$

Para que esta expresión pueda ser negativa, es necesario que la suma algebraica de las «partes enteras» dentro de las barras no sea cero es decir, que el número entero s que resulte debe ser en valor absoluto mayor o igual a 1. Esto exige como condición que sea

$$\vartheta \geqq \frac{2}{2n-1}\,. \tag{5}$$

En tal caso la condición adicional necesaria se expresa por

$$\left|\frac{2n-1}{2}\vartheta - s\right| - \frac{\vartheta}{2} < 0$$

o por sus equivalentes

$$\frac{2n-1}{2}\vartheta - s - \frac{\vartheta}{2} < 0 \;;\; s - \frac{2n-1}{2}\vartheta - \frac{\vartheta}{2} < 0$$

que despejando ϑ se convierten en las condiciones (3) compatibles con la (5).

Queda así demostrado que la función (1) satisface las condiciones A) B) y C) del § 6.

La representación gráfica de la curva que se obtiene para $n=4$ es la siguiente:

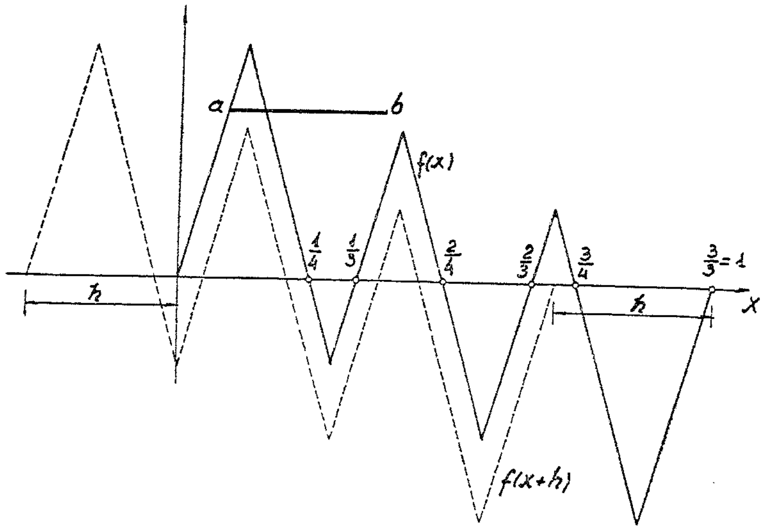

Fig. 3

donde una simple traslación de la figura, paralelamente a sí misma a lo largo del eje x, muestra que la función

$$z(x)=f(x+h)-f(x) \quad \text{para} \quad \frac{1}{4}<h<\frac{1}{3} \ ; \ 0 \leqq x \leqq 1-h$$

no se anula para ningún valor de x. Lo mismo podría constatarse con desplazamientos tales que $s/4<h<s/3$, $(s=1,2,3)$. De otro modo, es fácil ver que, si se recorre la curva con el extremo a del segmento $\overline{ab}$ de longitud h, conservándolo paralelo al eje x, en ningún caso tocará el otro extremo b a la curva.

8. Del hecho que existan funciones continuas como las definidas en el § 6, que no admiten cuerdas de longitud h comprendidas entre dos números racionales s/n y $s/(n-1)$, se deduce que *la existencia de toda cuerda de longitud $h \neq 1/n$ siendo n entero, no tiene el carácter de necesidad.* En efecto, la función

$$u = \frac{1}{s} - h \qquad\qquad (\text{para } 0 < h < 1 \text{ y } h \neq \frac{1}{n})$$

cambia de signo al dar a s los valores 1 y n, suficientemente grande; dando a s valores enteros sucesivos, tiene que haber dos enteros consecutivos $n-1$ y n, tales que sea

$$\frac{1}{n} < h < \frac{1}{n-1}$$

con lo cual se ubicaría la longitud h en un intervalo de carencia.

9. De los párrafos precedentes, particularmente 4 y 6, se desprende que: *Si $f(x)$ es una función continua y definida para $a \leqq x \leqq b, n > 2$ y $f(a) = f(b)$, existen, necesariamente si n es entero y posiblemente si no lo es, cuerdas interiores paralelas al eje x, de longitud $h = (b-a)/n$ (o considerando las abcisas de los extremos de las cuerdas, puntos α, β tales que $\beta - \alpha = (b-a)/n$).*

Construyendo la función continua

$$(1) \qquad z(x) = f(x) - f(a) + (x-a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

que toma valores iguales en los extremos $x = a$ y $x = b$, puede aplicarse el teorema precedente. Y de la existencia de los puntos interiores α y β tales que

$$z(\beta) - z(\alpha) = 0 \quad \text{con} \quad \beta - \alpha = \frac{b-a}{n}$$

previa transformación de la (1), se concluye el siguiente

Teorema del valor medio para funciones continuas:

Si $f(x)$ es una función continua y definida para $a \leqq x \leqq b$ y es $n > 2$, existen, necesariamente si n es un entero y sólo posiblemente si n no es entero, puntos interiores α, β, tales que

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\beta - \alpha = \frac{b-a}{n}.$$

SUMARIO

Se señalan ciertas propiedades generales de las funciones contínuas que se utilizan para demostrar el siguiente Teorema del valor medio:

Si $f(x)$ es contínua y definida para $a \leqq x \leqq b$ y es $n > 2$ existenten, necesariamente si n es entero y sólo posiblemente si n no es entero, puntos interiores α, β tales que

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\beta-\alpha=\frac{b-a}{n}$$

Si entre las funciones contínuas se consideran las derivables, un simple paso al límite conduce a los teoremas del valor medio y de Rolle del cálculo diferencial.

SUMMARY

Certain general properties of continuous functions are pointed out, and used to prove the following mean value theorem:

If $f(x)$ is a continuous and definite function in $a \leqq x \leqq b$ an $n > 2$ there exist interior points α, β, necessarily when n is an integer, and only possible if n is not, such that

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\beta-\alpha=\frac{b-a}{n}$$

If derivable functions are considered amongst continuous functions, the Mean Value and Rolle's differential calculus theorems are obtained simply by stepping up to the limiting values.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Relacionado con el tema aunque con alcance diferente, hemos consultado: G. FUBINI, *El teorema del valor medio para funciones no derivables*; BEPPO LEVI. *Sobre un teorema de Wiertrass el teorema de Rolle y el anterior teorema de Fubini*, ambos trabajos en volumen II nº 2 de la serie de Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Universidad del Litoral (Rosario 1940, Rep. Argentina). Los resúmenes del Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik y Zentralblatt für Mathematik (1933) referentes a N. Cioranescu *Quelques propriétés générales des fonctions continues.*