SUPERFICIES CUYAS CURVAS *D* SON GEODESICAS O TRAYECTORIAS ISOGONALES DE LAS LINEAS DE CURVATURA

por

L. A. SANTALÓ
Facultad de Ciencias Matemáticas, etc.
Instituto de Matemáticas. Universidad Nacional del Litoral
Rosario

Introducción. Se llaman curvas *D* de una superficie aquellas cuya esfera osculatriz en cada punto es tangente a la superficie. La ecuación diferencial de estas curvas fué dada por primera vez por Darboux (1).

En otro trabajo publicado anteriormente (2), hemos dado una propiedad característica de las curvas *D*, identificándolas con las curvas extremales de la torsión geodésica total. Como la ecuación diferencial de las curvas *D* es de 2°. orden, lo mismo, por ejemplo, que la ecuación de las geodésicas o la de las trayectorias isogonales de las líneas de curvatura de una superficie, ocurre preguntar en qué casos dichas curvas coincidirán. A este respecto vamos a demostrar, como objeto principal de este trabajo, los dos teoremas siguientes:

1°. *Las únicas superficies cuyas líneas geodésicas son cur-*

---

(1) C. R. Académie Sciences Paris, 1871, pág. 733. Para bibliografía sobre estas curvas ver la *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften* III_3, D 3, págs. 181 - 182. Como literatura más reciente sobre estas líneas hemos encontrado: W. BLASCHKE, *Bestimmung der Flächen deren D-Linien gleichzeitig Böschungslinien sind*, Mathematische Zeitschrift, 27, 1928, págs. 150 - 153. H. KEILER, *D-Linien und L-Linien auf Ellipsoiden*, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, 1927. L. A. SANTALÓ, *Curvas extremales de la torsión total y curvas* D, Publicaciones del Instituto de Matemáticas, Vol. III, nº 5, Rosario, 1941.

(2) *Loc. cit.*

vas D, son la esfera y el cilindro de revolución. Como caso límite de ambas se puede considerar el plano.

2º. *Las únicas superficies cuyas curvas D coinciden con las trayectorias isogonales de las líneas de curvatura son el cono y cilindro de revolución, el toro y las cíclicas de Dupin.*

Este segundo teorema comprende, como caso particular, el siguiente: Las únicas superficies de revolución cuyas loxodrómicas son curvas D son aquellas cuya sección meridiana es una circunferencia o una recta, es decir, el toro y los conos y cilindros de revolución. Sin embargo, en nº. 3, daremos de este último teorema una demostración directa, con el fin de obtener, de paso, la ecuación diferencial de las curvas D de las superficies de revolución.

Al final, como ejemplo, mencionaremos brevemente algunas propiedades de las curvas D sobre las superficies cilíndricas.

1. *Superficies cuyas geodésicas son curvas D.* El ángulo que forma el radio de la esfera osculatriz a una curva con la normal principal de la misma, está dado por

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{\rho'}{\rho\tau}$$

siendo ρ el radio de curvatura y τ la torsión.

Si la curva es geodésica de una superficie y además debe ser curva D, deberá ser $\vartheta = 0$ y por tanto $\varkappa = \frac{1}{\rho} = \text{cte}$. Por tanto, el problema de hallar las superficies para las cuales las geodésicas son curvas D, equivale al de hallar las superficies cuyas geodésicas tienen curvatura constante.

La curvatura de las geodésicas, por tener estas curvas su plano osculador normal a la superficie, coincide con la curvatura de la sección plana normal en la dirección de la tangente a la geodésica. Por tanto valdrá [3]

$$\varkappa = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}. \tag{1.1}$$

---

[3] Ver, por ejemplo, W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, I, pág. 91. Generalmente seguiremos la notación de este libro.

Vamos a elegir un sistema de coordenadas y un parámetro conveniente. Tomando como líneas coordenadas $u=$cte., $v=$cte. las de curvatura, es

$$F=0, \qquad M=0 \tag{1.2}$$

y si como parámetro de las ecuaciones $u=u(s)$, $v=v(s)$ de las geodésicas, tomamos el arco de las mismas, será

$$Eu'^2+Gv'^2=1 \tag{1.3}$$

con lo cual (1.1) queda $\varkappa=Lu'^2+Nv'^2$. Si $\varkappa$ debe ser constante, su derivada será cero y tenemos por tanto la ecuación

$$L_u u'^3+L_v v'u'^2+N_u u'v'^2+N_v v'^3+2Lu'u''+2Nv'v''=0. \tag{1.4}$$

Por otra parte, con el sistema de coordenadas elegido, las ecuaciones diferenciales de las geodésicas se escriben (¹)

$$\begin{aligned} &2Eu''+E_u u'^2+2E_v u'v'^2-G_u v'^2=0,\\ &2Gv''+G_v v'^2+2G_u u'v'-E_v u'^2=0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

El problema queda reducido a buscar las superficies para las cuales toda solución de (1.5) lo sea también de (1.4).

Como $E.G \neq 0$, de (1.5) se deduce

$$\begin{aligned} u''&=-\frac{1}{2E}\left[E_u u'^2+2E_v u'v'-G_u v'^2\right]\\ v''&=-\frac{1}{2G}\left[G_v v'^2+2G_u u'v'-E_v u'^2\right] \end{aligned} \tag{1.6}$$

y sustituyendo en (1.4) queda

$$\begin{aligned} \frac{L}{E}\left(E_u u'^2+2E_v u'v'-G_u v'^2\right)u'+\frac{N}{G}\left(G_v v'^2+2G_u u'v'-E_v u'^2\right)v'&\\ -L_u u'^3-L_v v'u'^2-N_u u'v'^2-N_v v'^3=0.& \end{aligned} \tag{1.7}$$

(¹) G. Darboux, *Theorie des surfaces*, t. II, pág. 418.

Esta relación debe ser una identidad respecto u', v' puesto que fijado el punto u, v se debe cumplir para cualquier par de valores u', v'. Por tanto tenemos el sistema

$$\begin{aligned}
&EL_u - LE_u = 0 \\
&GN_v - NG_v = 0 \\
&(NE - 2LG)E_v + EGL_v = 0 \\
&(LG - 2EN)\,G_u + EGN_u = 0.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Recordemos además que las ecuaciones de Codazzi en el sistema de coordenadas elegido se escriben (5)

$$\begin{aligned}
&2EGL_v - (EN + GL)E_v = 0 \\
&2EGN_u - (EN + GL)G_u = 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Con estas ecuaciones, las dos últimas de (1.8) dan

$$3(EN - GL)E_v = 0, \qquad 3(EN - GL)G_u = 0. \tag{1.10}$$

Vamos a distinguir dos casos:

1°. Alguna de las derivadas E_v, G_u es distinta de cero. Entonces (1.10) nos da

$$\frac{L}{E} = \frac{N}{G}, \tag{1.11}$$

o sea, recordando que en el sistema de coordenadas que estamos utilizando las curvaturas principales están dadas por

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}, \tag{1.12}$$

resulta que será $R_1 = R_2$ en todo punto de la superficie. Todos los puntos son, pues, umbílicos y *la superficie debe ser una esfera* (6). Como en este caso es $R_1 = R_2 = \text{cte.}$, es inmediato comprobar que también se satisfacen las dos primeras condiciones (1.8).

(5) Blaschke, *loc. cit.*, pág. 117.
(6) Blaschke, *loc. cit.*, pág. 97.

2º. Las dos derivadas E_v, G_u son iguales a cero. Recordemos que la curvatura de Gauss puede expresarse en la forma [7]

$$K = -\frac{1}{2W}\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{E_v}{W} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{G_u}{W}\right],$$

siendo $W = \sqrt{EG}$. De aquí, si $E_v = G_u = 0$, será $K = 0$ y por tanto *la superficie es desarrollable.* En este caso una familia de líneas de curvatura será la de las generatrices; supongamos que sea la correspondiente a $u =$ cte. Las curvas $v =$ cte. serán las trayectorias ortogonales de estas generatrices. Vamos a ver que satisfacen al sistema (1.5) y por tanto que son geodésicas. En efecto, siendo $E_v = 0$ la segunda ecuación (1.5) se ve inmediatamente que es satisfecha. En cuanto la primera observemos que llamando s_u el arco de las curvas $v =$ cte. es $ds_u^2 = Edu^2$ y por tanto

$$u' = \frac{1}{\sqrt{E}}, \qquad u'' = -\frac{E_u}{2E^2},$$

con lo cual se comprueba que efectivamente la primera ecuación (1.5) es satisfecha.

Por tanto las líneas de curvatura $v =$ cte. son geodésicas y según un teorema muy conocido [8] si una línea de curvatura es geodésica es una curva plana. Además el plano de cada una de estas curvas $v =$ cte., siendo geodésicas, debe ser normal a la superficie y en consecuencia la superficie desarrollable estará formada por rectas perpendiculares a un plano, o sea, es un cilindro.

Por otra parte, la curvatura de las secciones rectas $v =$ cte. es, según (1.12) $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{L}{E}$ y según la primera ecuación del sistema (1.8) $\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{1}{R_1} = 0$, es decir, R_1 es constante. Por tanto dichas secciones rectas son circunferencias.

En definitiva tenemos el resultado:

Las únicas superficies cuyas líneas geodésicas son curvas

---

(7) Blaschke, *loc. cit.*, pág. 117. Aquí debemos hacer $F = M = 0$, según (1.2).

(8) Ver por ejemplo L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Vol. I, pág. 296.

D, son la esfera y el cilindro de revolución. Como caso límite de ambas se puede considerar el plano.

2. Hemos visto cuáles son las únicas superficies cuyas geodésicas tienen curvatura constante. Aún apartándonos del objeto principal de este trabajo, ocurre preguntarse cuáles serán las *superficies cuyas líneas geodésicas tienen todas torsión constante.*

Vamos a indicar rápidamente la solución, sin escribir todos los cálculos, los cuales, por otra parte, no ofrecen ninguna dificultad. El problema se resuelve de la misma manera anterior. Basta recordar que la torsión de la geodésica definida por $u=u(s)$, $v=v(s)$ (o torsión geodésica) en el mismo sistema de coordenadas anterior y siendo también s el arco, está dada por

$$\tau_g = \frac{GL-EN}{\sqrt{EG}}\, u'v'. \tag{2.1}$$

Si esta expresión debe ser constante, su derivada respecto s debe ser cero. Tendremos así una ecuación en E, G, L, N y sus derivadas parciales y u', v', u'', v''. Substituyendo en esta ecuación u'', v'' por sus valores deducidos de (1.5) y escribiendo que el resultado es una identidad respecto las variables u', v', después de simples transformaciones y teniendo en cuenta las ecuaciones de Codazzi (1.9) se obtienen como primeras condiciones

$$(GL-EN)\, G_u = 0, \qquad (GL-EN)\, E_v = 0. \tag{2.2}$$

Si $GL-EN=0$, las restantes condiciones son también satisfechas; es, como dijimos antes, el caso de la esfera.

Si $GL-EN \neq 0$, debe ser $G_u = E_v = 0$. Con estos valores las restantes condiciones devienen $LE_u - EL_u = 0$, $GN_v - NG_v = 0$. Estamos, pues, en las mismas condiciones que en el caso anterior y por tanto el resultado es el mismo: *Las únicas superficies cuyas líneas geodésicas tienen torsión constante son el cilindro de revolución, la esfera y el plano.*

3. *Curvas D de las superficies de revolución.* Una superficie de revolución está dada por ecuaciones paramétricas de la forma

$$x_1 = f(u)\cos v, \quad x_2 = f(u)\,\mathrm{sen}\, v, \quad x_3 = u, \tag{3.1}$$

siendo $\rho = f(u)$ la función que da el radio de los paralelos según la altura u.

De (3. 1) se deduce que los coeficientes de las dos primeras formas fundamentales de la teoría de superficies valen

$$\begin{gathered} E = 1 + f'^2, \quad F = 0, \quad G = f^2 \\ L = -\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{f}{\sqrt{1+f'^2}}, \end{gathered} \tag{3. 2}$$

indicando con un acento la derivada. De aquí

$$\begin{aligned} &E_u = 2f'f'', \quad E_v = 0, \quad G_u = 2ff', \quad G_v = 0 \\ &L_u = -\frac{f'''(1+f'^2) - f'f''^2}{(1+f'^2)^{3/2}}, \qquad L_v = 0 \\ &N_u = \frac{f'(1+f'^2) - ff'f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \qquad N_v = 0. \end{aligned} \tag{3. 3}$$

La ecuación diferencial de las curvas D de una superficie, en el sistema de coordenadas curvilíneas formado por las líneas de curvatura es [9]

$$a(u'v'' - v'u'')\, u'v' + bu'^5 + cu'^3 v'^2 + du'^2 v'^3 + ev'^5 = 0 \tag{3. 4}$$

siendo

$$\begin{aligned} a &= 6(GL - EN)\, EG \\ b &= 2EG(LE_u - EL_u) \\ c &= 3(EG_u - GE_u)\,(GL - EN) + 2G^2\,(LE_u - EL_u) \\ d &= 3(EG_v - GE_v)\,(GL - EN) + 2E^2\,(NG_v - GN_v) \\ e &= 2EG(NG_v - GN_v). \end{aligned} \tag{3. 5}$$

En el caso actual de las superficies de revolución, teniendo en cuenta los valores (3. 2) y (3. 3) resulta

(9) L. A. Santaló, *loc. cit.*, pág. 137.

$$
\begin{aligned}
a &= -6f^3\sqrt{1+f'^2}\,(1+f'^2+ff'') \\
b &= 2f^2\sqrt{1+f'^2}\,((1+f'^2)f'''-3f'f''^2) \qquad\qquad (3.6) \\
c &= -\frac{6f^2f'}{\sqrt{1+f'^2}}((1+f'^2)^2-f^2f''^2)+\frac{2f^4}{\sqrt{1+f'^2}}((1+f'^2)f'''-3f'f''^2) \\
d &= e = 0.
\end{aligned}
$$

Prescindiendo de los paralelos $u'=0$, que evidentemente pueden considerarse como curvas D, puesto que su esfera osculatriz no está determinada, y tomando v como variable independiente, la ecuación (3. 4) de las curvas D sobre la superficie de revolución (3. 1) queda

$$
-au''+bu'^4+cu'^2=0, \qquad (3.7)
$$

donde a, b, c son funciones de u dadas por (3. 6).

4. Se llaman *loxodrómicas* de una superficie de revolución las curvas de la misma que cortan a todos los meridianos bajo un ángulo constante. Llamando ϑ a este ángulo y siendo (3. 1) las ecuaciones de la superficie de revolución, será

$$
\cot\vartheta = k = \frac{\sqrt{1+f'^2}du}{f\,dv} \qquad (4.1)
$$

y por tanto la ecuación diferencial de las loxodrómicas que cortan a los meridianos bajo el ángulo constante ϑ será

$$
\frac{du}{dv} = u' = \frac{kf}{\sqrt{1+f'^2}}. \qquad (4.2)
$$

Queremos ver en qué casos estas loxodrómicas son curvas D. De (4. 2) se deduce

$$
u'' = \frac{du'}{du}\,\frac{du}{dv} = \frac{1+f'^2-ff''}{(1+f'^2)^2}\,kff'. \qquad (4.3)
$$

Sustituyendo (4. 2) y (4. 3) en (3. 7) y teniendo en cuenta (3. 6), después de simplificar queda, como condición para que la loxodrómica definida por $\cot\vartheta=k$ sea curva D de la superficie,

$$\frac{2f^6k^2}{(1+f'^2)^{3/2}}(1+k^2)\,[(1+f'^2)f''' - 3f'f''^2] = 0. \tag{4. 4}$$

Es decir: exceptuados los paralelos ($k=0$) que pueden considerarse como curvas *D, las superficies de revolución no contienen ninguna loxodrómica real que sea curva D, excepto en el caso de ser*

$$(1+f'^2)\,f''' - 3f'f''^2 = 0 \tag{4. 5}$$

en cuyo caso todas las loxodrómicas son curvas D (10).

Es bien sabido que la ecuación (4. 5) es la ecuación diferencial de los círculos del plano (11), inclusive las rectas como caso límite de círculos de radio infinito, por tanto:

Las únicas superficies de revolución cuyas loxodrómicas son curvas D son aquellas cuya sección meridiana es una circunferencia o una recta, es decir: el toro y los conos y cilindros de revolución. Se incluyen entre los toros las superficies engendradas por circunferencias que cortan al eje de rotación.

---

(10) Si se prescinde de la condición de que la loxodrómica sea real, la ecuación (4,4) admite la solución de $k^2 + 1 = 0$, o sea cot $\vartheta = i$. Según (4.1) esta condición equivale a

$$(1 + f'^2)\, du^2 + f^2\, dv^2 = 0,$$

o sea, según (3.2) $ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2 = 0$. Es decir, se trata de las *curvas de longitud nula* o *curvas isotropas* de la superficie.

Este resultado es general para cualquier superficie. En efecto, tomando como siempre las líneas de curvatura como líneas coordenadas, es $ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2$. Las líneas de longitud nula están definidas por la ecuación

$$v'^2 = \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = -\frac{E}{G},$$

de la cual se deduce, derivando respecto u,

$$2\, v'\, v'' = -\frac{E_u\, G - E\, G_u}{G^2} - \frac{E_v\, G - E\, G_v}{G^2}\sqrt{\frac{E}{G}}\; i\,.$$

Tomando u como variable independiente y $v = v\,(u)$ como función, en la ecuación (3.4) de las curvas D deberemos hacer $u' = 1$, $u'' = 0$. Sustituyendo entonces en la misma ecuación v' y $v'v''$ por los valores anteriores y teniendo en cuenta (3.5), se obtiene una identidad. Por tanto: *Las curvas de longitud nula de una superficie cualquiera satisfacen a la ecuación diferencial de las curvas D.*

(11) Basta eliminar α, β, γ entre $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \gamma^2 = 0$ y sus tres primeras derivadas considerando y como función de x, para obtener la ecuación $(1 + y'^2)\; y''' - 3\, y'\, y''^2 = 0$, que es la ecuación (4.5).

5. *Superficies cuyas curvas D son trayectorias isogonales de las líneas de curvatura.* En las superficies de revolución las secciones meridianas y los paralelos son las líneas de curvatura. Por tanto el resultado anterior es un caso particular del problema general siguiente: ¿cuáles son las superficies cuyas curvas D cortan a las líneas de curvatura bajo un ángulo constante? Vamos a resolver esta cuestión.

En todo lo que sigue prescindiremos del caso del plano y de la esfera, para los cuales las líneas de curvatura no están determinadas.

Tomando como siempre las líneas de curvatura como líneas coordenadas $u=$ cte., $v=$ cte., y llamando ϑ al ángulo que forma una curva $u=u(s)$, $v=v(s)$ con la línea $v=$ cte., es

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{Gv'^2}{Eu'^2}. \tag{5.1}$$

Si $\vartheta=$ cte., la derivada de esta expresión debe ser cero, o sea

$$(EG_u - GE_u)\, u'^3 v'^2 + (EG_v - GE_v)\, u'^2 v'^3 + 2EG\,(u'v'' - v'u'')\, u'v' = 0. \tag{5.2}$$

Esta será la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales de las líneas de curvatura. Queremos que toda solución de esta ecuación satisfaga a la ecuación (3.4) de las curvas D. Despejando el último término de (5.2) y sustituyendo en (3.4) para eliminar las derivadas segundas, se tiene

$$\left[-\frac{a}{2EG}(EG_u - GE_u) + c\right] u'^3 v'^2 + \left[-\frac{a}{2EG}(EG_v - GE_v) + d\right] u'^2 v'^3 + bu'^5 + ev'^5 = 0. \tag{5.3}$$

Esta ecuación debe satisfacerse para todo par de valores u', v'. Debe ser, por tanto, una identidad. Las condiciones $b=0$, $e=0$, según (3.5), dan

$$LE_u - EL_u = 0, \qquad NG_v - GN_v = 0 \tag{5.4}$$

y con estas condiciones, también los coeficientes de $u'^3 v'^2$ y de $u'^2 v'^3$ en (5.3) se comprueba inmediatamente que se anulan.

Para estudiar las superficies para las cuales se cumplen las condiciones (5.4) distinguiremos dos casos, según sea $L.N=0$, o bien $L.N \neq 0$.

Si $L.N \neq 0$, la primera relación (5.4) nos dice, según (1.12), que $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R_1}\right)=0$, o sea, que el radio de curvatura principal correspondiente a las curvas $v=$ cte. es constante a lo largo de las mismas. De aquí se deduce que la evolvente de las normales a la superficie en los puntos de toda línea $v=$ cte. se reduce a un punto y por tanto [12] que estas normales forman un cono de revolución; por consiguiente las líneas de curvatura $v=$ cte. serán trayectorias normales de las generatrices de un cono de revolución, o sea, son circunferencias. Análogamente, la segunda condición (5.4) nos dice que $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R_2}\right)=0$ y por tanto también las líneas de curvatura del segundo sistema serán circunferencias. Se trata, pues, de superficies cuyas líneas de curvatura, de uno y otro sistema, son circunferencias. Se sabe que con esta propiedad sólo hay las superficies llamadas *cíclidas de Dupin* [13], incluyendo el toro como cíclida degenerada.

Si $L.N=0$, quiere decir que una de las curvaturas principales es cero y que, por tanto, la superficie es desarrollable. Si es, por ejemplo, $L=0$, $N \neq 0$, se tratará de una superficie desarrollable cuyas líneas de curvatura distintas de las generatrices, por las mismas razones anteriores, son todas circunferencias. Será un cono o un cilindro de revolución.

En resumen: *Las únicas superficies cuyas curvas D coinciden con las trayectorias isogonales de las líneas de curvatura, son el cono y el cilindro de revolución, el toro y las cíclidas de Dupin.*

6. *Curvas D sobre cilindros.* Las curvas D sobre las superficies cilíndricas se determinan fácilmente. Sea $X=X(s)$ la ecuación de la sección recta del cilindro referida al arco como parámetro y sea E el vector constante de módulo unidad que indica la dirección de las generatrices. La ecuación de la superficie cilíndrica será

---

(12) Ver, por ejemplo, BIANCHI, *loc. cit.*, pág. 415.

(13) BIANCHI, *loc. cit.*, pág. 415.

$$Y(s, \lambda) = X(s) + \lambda E. \tag{6.1}$$

Como ecuación diferencial de las curvas D es cómodo, en este caso, tomar la forma dada por Darboux ([14])

$$\frac{3Y'Y''}{Y'^2} = \frac{2V'Y''+V''Y'}{V'Y'} \tag{6.2}$$

donde los acentos indican derivadas respecto el parámetro s y V es el vector unitario normal a la superficie, es decir, en el caso de la superficie (6.1), siendo $T=X'$ el vector tangente, será $V=T \wedge E$ ($\wedge$ indica el producto vectorial).

Llamando $\varkappa$ a la curvatura de la curva plana sección recta del cilindro y N al vector normal a la misma, las fórmulas de Frenet para las curvas planas son $T' = \varkappa N$, $N' = -\varkappa T$, y por consiguiente se tendrá

$$Y' = T + \lambda' E, \qquad Y'' = \varkappa N + \lambda'' E$$

$$V' = \varkappa N \wedge E, \qquad V'' = \varkappa' N \wedge E - \varkappa^2 T \wedge E.$$

De aquí, siendo $T.(N \wedge E) = 1$,

$$Y'Y'' = \lambda'\lambda'', \qquad Y'V' = \varkappa, \qquad Y'V'' = \varkappa', \qquad V'Y'' = 0.$$

Por tanto, sustituyendo en (6.2), la ecuación diferencial que define la función $\lambda = \lambda(s)$ que sustituída en (6.1) nos dará las curvas D del cilindro es

$$3\lambda'\lambda''\varkappa = \varkappa'(1 + \lambda'^2).$$

Integrando resulta

$$\log (1 + \lambda'^2)^{3/2} = \log c\varkappa$$

y de aquí

$$\lambda = \int_0^s \sqrt{C\varkappa^{2/3} - 1}\, ds. \tag{6.3}$$

([14]) Darboux, *loc. cit.*, o también L. A. Santaló, *loc. cit.*, pág. 135.

La constante C está definida por la pendiente $\lambda' = \sqrt{C\varkappa^{2/3} - 1}$ del punto inicial.

Si $\varkappa =$ cte., o sea, el cilindro es de revolución, resulta $\lambda = as + b$, y las curvas D son hélices (es decir, geodésicas) como debía ser según el teorema del nº. 1.

Si $\varkappa$ no es constante, para que la curva dé la vuelta completa al cilindro debe ser siempre $C\varkappa^{2/3} - 1 \geqq 0$ y por tanto si $\varkappa_m$ indica el valor mínimo de la curvatura de la sección recta, debe ser

$$C \geqq \varkappa_m^{-2/3}.$$

Esto nos dice que a partir de un punto donde la sección recta del cilindro tenga la curvatura $\varkappa$, únicamente darán la vuelta completa al cilindro aquellas curvas D cuya pendiente sea superior a

$$\lambda' = \left[\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_m} \right)^{2/3} - 1 \right]^{1/2}.$$

El radio R de la esfera osculatriz en un punto de las curvas D de un cilindro se determina fácilmente. Sea $\rho = \dfrac{1}{\varkappa}$ el radio de curvatura de la sección recta; el radio de curvatura R de la sección normal según la tangente a la curva D será el radio de la esfera osculatriz, y por tanto, por el teorema de Euler de la curvatura de las secciones normales, es $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\cos^2\varphi}{\rho}$. Pero $\operatorname{tang}\varphi = \lambda'$ y por tanto, según (6.3)

$$R = C\rho^{1/3}.$$