UN PROBLEMA SULLE PIASTRE SU CUI AGISCE UN CARICO CONCENTRATO E SUE GENERALIZACIONI ANALITICHE

di

GUIDO FUBINI † [1]

Institute for Advanced Study
Princeton N. J.

È classico il problema di studiare una piastra elastica S. su un punto O della quale agisce un carico concentrato P. In realtà questo carico agisce su un piccolo intorno s di O. Qual'è l'effetto di questo intorno s? Ecco il problema che io studio in qualche caso specialmente importante. La nota finisce con qualche generalizzazione dell'enunciato di tale problema.

Siano S, s due figure piane; tutti i punti di s e del suo contorno siano interni ad S. Sia O un punto interno ad s e quindi anche ad S, e sia r la distanza da O a un punto generico di S o di s. Con Σ indicheremo il contorno di S, con σ il contorno di s. Con $S-s$ indicheremo l'insieme dei punti di S, che *non* sono interni ad s, ma giacciono su σ oppure sono esterni ad s. Con $\bar{s}$ indicheremo l'area di s. Se s è un cerchio (di centro O e raggio R), sarà $\bar{s}=\pi R^2$.

Supporremo che S sia la sezione mediana di una piastra elastica la cui rigidità N è, per semplicità, supposta uguale ad 1. In conseguenza di carichi agenti sulla piastra, i punti di S soffriranno certi abassamenti z che, sul contorno Σ di S, soddisferanno a certe condizioni al contorno che supporremo omogenee (Se per esempio la piastra è incastrata, la z e la sua derivata saranno nulle su Σ, ecc.).

Noi diremo che s tende a zero, se la massima distanza da O ad un punto di s tende a zero.

Se la piastra S è dappertutto scarica, eccetto che nei

[1] Morto a New-York (giugno 1943) mentre l'articolo stava in tipografia.

punti di s, e se su s agisce un carico P, uniformemente distribuito su s (con densità P/s), l'abbassamento z in un punto della piastra S sarà proporzionale al carico P, ma dipenderà anche dall'area s. Al limite, quando s tende a zero, z sarà l'abbassamento dovuto ad un carico concentrato P agente sul punto O. Si tratta di vedere, almeno nei casi fisicamente più importanti, ciò che avviene prima di passare a limite. I casi fisicamente più importanti sono quelli in cui

1° s è un cerchio di centro O e di raggio R,
2° s è un rettangolo di centro O.

Qui studierò solo il primo caso e proverò che *l'abbassamento z è uguale a $P(z_1+R^2z_2)$, ove z_1, z_2 sono due funzioni completamente determinate dalla figura S e dal punto O.* (Si noti che R^2 è, a meno del fattore costante π, uguale all'area di s). E in primo luogo si conclude che, quando si considera il carico come concentrato, si trascura un termine *che contiene il fattore R^2*, (o, ciò che è lo stesso, l'area di s). Il seguente metodo conduce a una semplice dimostrazione del risultato.

Poniamo entro s

$$(1) \qquad z=\frac{P}{s}\,\frac{r^4}{64}+v \qquad \text{(entro } s)$$

(ove v è funzione biarmonica e regolare con le sue derivate nei punti di s) e fuori di s (cioè entro $S-s$) poniamo

$$(2) \qquad z=A(r^2\log r+\varphi)+B(\log r+\psi) \qquad \text{(fuori } s, \text{ entro } S-s).$$

ove A, B sono costanti indeterminate e φ, ψ sono funzioni biarmoniche in S, regolari con le loro derivate, tali che sul contorno Σ di S le funzioni

$$r^2\log r+\varphi, \qquad \log r+\psi$$

soddisfino alle condizioni al contorno, correspondenti al problema considerato. Le funzioni φ, ψ sono completamente determinate dall'area S e dal punto O.

Se i valori della funzione z definita da (1) e delle sue derivate normali prima, seconda e terza nei punti del contorno

σ di s sono uguali ai valori analoghi per la funzione (2), allora le due funzioni (1) e (2) daranno l'abbassamento in ogni punto dell'area totale $S = s + (S - s)$ dovuto a un carico totale P distribuito uniformemente su s.

Le condizioni testè enunciate dicono che, sui punti di σ, i valori di $w = v - A\varphi - B\psi$ e delle sue derivate normali prima, seconda e terza sono uguali ai valori di

$$Ar^2 \log r + B \log r - \frac{P}{\bar{s}} \frac{r^4}{64} \qquad (\bar{s} = \pi R^2)$$

e delle sue derivate normali prima, seconda e terza. Notando che nei punti di σ è $r = R$, e indicando con apici le derivate normali troviamo che *nei punti di* σ è

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} w = AR^2 \log R + B \log R - \dfrac{P}{\pi R^2} \dfrac{R^4}{64} \\[2ex] w' = A(R + 2R \log R) + \dfrac{B}{R} - \dfrac{P}{\pi R^2} \dfrac{R^3}{16} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} w'' = A(3 + 2 \log R) - \dfrac{B}{R^2} - \dfrac{3}{16} \dfrac{P}{\pi R^2} R^2 \\[2ex] w''' = \dfrac{2A}{R} + \dfrac{2B}{R^3} - \dfrac{3}{8} \dfrac{P}{\pi R^2} R. \end{cases}$$

Essendo w biarmonica e regolare con le sue derivate entro s, dalle (I) si trae

$$w = AR^2 \log R + B \log R - \frac{PR^2}{64\pi} + \\ + \frac{1}{2}\left(A(1 + 2 \log R) + \frac{B}{R^2} - \frac{P}{16\pi}\right)(r^2 - R^2).$$

Sostituendo questo valore di w nelle (II), se ne deduce

$$A(1 + 2 \log R) + \frac{B}{R^2} - \frac{P}{16\pi} = A(3 + 2 \log R) - \frac{B}{R^2} - \frac{3}{16} \frac{P}{\pi}$$

$$2A + 2\frac{B}{R^2} = \frac{3}{8}\frac{P}{\pi}. \tag{3}$$

La prima di queste dà

$$2\frac{B}{R^2} + \frac{1}{8}\frac{P}{\pi} = 2A.$$

Da questa e da (3) si ha senz'altro

$$B = \frac{P}{16\pi}R^2 \qquad A = \frac{1}{8}\frac{P}{\pi}.$$

E le (4) dimostrano il teorema enunciato: *In* $S - s$ *è*:

$$z = P\frac{r^2 \log r + \varphi}{8\pi} + PR^2\frac{\log r + \psi}{16\,\pi}$$

(il secondo termine contiene R^2 a fattore; il primo termine e il coefficiente di R^2 sono independenti da R). Si noti che, *se* S *è una piastra rettangolare semplicemente appoggiata, il coefficiente di* $PR^2/16\pi$ *è la ben nota funzione di Green.*

Al limite $R=0$, il secondo termine tende a zero; si ottiene la formola dell'abbassamento dovuto a un carico concentrato. Che il secondo termine tendesse a zero per $R=0$ si poteva prevedere ammettendo ciò che la intuizione fisica suggerisce: che cioè, mentre il carico va concentrandosi nel punto O, l'abbassamento di O non cresce indefinitamente.

Problemi analitici

Vediamo il significato analitico del problema che abbiamo risoluto in un caso particolare. Sia u una funzione, regolare entro s con le sue derivate tale che

$$\int_s \Delta_2 \Delta_2 u \, d\bar{s} = P \quad (d\bar{s} \text{ elemento d'area di } s).$$

Il campo s non è più supposto essere un cerchio di centro O. Allora $\Delta_2 \Delta_2 u$ sarà, entro s, la densità di carico corrispondente ad un carico totale P agente sull'area s. Sostituiamo una tale funzione u alla precedente funzione $\frac{P}{s}\frac{r^4}{64}$. Dovremo determinare, entro s, una funzione biarmonica $w = v - A\varphi - B\psi$ tale che i valori di w, w', w'', w''' nei punti di σ siano uguali ai valori corrispondenti per la funzione

$$Ar^2 \log r + B \log r - u.$$

E probabile che, almeno nei tratti essenziali, si ritroveranno risultati analoghi ai precedenti. Ma il problema sembra molto interessante, perchè non facile. Le relazioni che legano, su σ, i valori di una funzione w (biarmonica in s e regolare con le sue derivate) e quelli delle sue derivate normali prima, seconda e terza sono tutt'altro che semplici.

E, naturalmente, problemi analoghi si possono enunciare per altre equazioni differenziali: questi problemi sono intimamente collegati allo studio della soluzione fondamentale della equazione considerata.

Una osservazione

Restiamo per un momento nell'ambito della teoria delle piastre, senza però supporre che s sia un cerchio, o che la densità p della corrispondente distribuzione di carico sia una costante. Ma naturalmente supporremo sempre

$$\int_s p \, d\bar{s} = P \qquad (P = \text{carico totale} = \text{costante}).$$

Noi potremo considerare P come risultante dei carichi $p\,d\bar{s}$ concentrati in ogni elemento $d\bar{s}$, e studiare in conseguenza per ogni punto A di $S-s$ il valore dell'integrale (analogo ai noti integrali di Poisson per la teoria del potenziale),

$$\frac{1}{8\pi}\int p\bar{r}^2 \log \bar{r}\, d\bar{s},$$

ove $\bar{r}$ è la distanza da A a un punto dell'elemento superficiale $d\bar{s}$. Ma dall'attuale punto di vista, il problema importante è lo studio di questo integrale, quando p ed s variano in modo tale che $\int p\, d\bar{s} = P = \text{cost.}$ (specialmente nel caso che s tenda a zero).