LLULL, vol. 32, 2009, 103-133

ARITHMETICA PRACTICA Y *SPECVLATIVA* DE J. PÉREZ DE MOYA (1513-1596). ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO Y DIDÁCTICO

LUISA RUIZ HIGUERAS
FRANCISCO JAVIER GARCÍA GARCÍA
Universidad de Jaén

RESUMEN

La Didáctica de las Matemáticas, como campo de conocimiento científico, aporta modelos y herramientas muy pertinentes para realizar análisis de la evolución histórica de los conocimientos matemáticos, permitiendo borrar la ilusión de transparencia que impregna los saberes que integran actualmente el currículum escolar, haciéndolos que aparezcan como definitivos e intemporales.

En este trabajo nos acercaremos, en primer lugar, aunque muy brevemente, a la figura del bachiller Pérez de Moya, situándola en su contexto histórico y matemático, para centrarnos, posteriormente, en el libro Arithmetica Practica y Speculativa, *parte de su obra más relevante Tratado de Mathematicas* (1573), *realizando un análisis crítico con modelos propios de la Didáctica de las Matemáticas.*

ABSTRACT

Didactics of the Mathematics, as a field of scientific knowledge, provides models and relevant tools to analyse the historical evolution of mathematical knowledge, avoiding the illusion of transparency that impregnates current school mathematical knowledge, which provokes that it appears like something definitive and neglects its historical evolution.

In this paper we will start with a brief approach to Bachelor Pérez de Moya and his place in the historical and mathematical context. Then, we will focus on his work Arithmetica Practica y Speculativa, *which is the first part of his book* Tratado de Mathematicas (1573). *A critical analysis of this work through models provided by the Didactics of Mathematics will be carried out.*

Palabras clave: Matemáticas, Aritmética, Didáctica de las matemáticas, Análisis epistemológico y didáctico, Siglo XVI, España, Pérez de Moya.

Keywords: Mathematics, Arithmetic, Didactics of Mathematics, Epistemological and didactical analysis, 16th Century, Spain, Pérez de Moya.

Recibido el 23 de octubre de 2008
Aceptado el 6 de abril de 2009

ISSN 0210-8615

1. El Bachiller Juan Pérez de Moya: breve introducción biográfica

Nació el Bachiller Juan Pérez de Moya en la villa jiennense de Santisteban del Puerto, alrededor del año 1513, según coinciden todos los críticos. Aunque no es mucho lo que se conoce de su biografía, se sabe, como indica Valladares [1997], que estudió en Salamanca y Alcalá de Henares y que alcanzó el grado de Bachiller: «Sorprende un tanto que no pasara de ahí, cuando su copiosa y variada obra nos lo revela como un hombre de amplios conocimientos, más propios de quien ocupaba una cátedra» [VALLADARES, 1997, p. 374]. Así lo constata su contemporáneo Venegas en el prólogo que hace de la obra *Arithmetica Practica y Specvlativa* [1562], asegurando que el Bachiller «con público aplauso ha leydo en Salamanca, y en la Corte, y en otros muchos lugares insignes». Es probable que, concluidos sus estudios, se ordenara sacerdote, puesto que en 1536 consigue una capellanía fundada en su pueblo natal por el Conde Men Rodríguez de Benavides. Allí debió permanecer hasta 1554, instalándose posteriormente en Salamanca. Murió en la ciudad de Granada en 1596, tras nueve años de ocupar una canonjía en su catedral.

Biógrafos[1] de Pérez de Moya aseguran que fue un hombre extraordinariamente culto, con un espíritu rico y diverso. Leyó y asimiló todo lo publicado en su época. Explicó sus conocimientos en forma magistral; tanto, que fue difícil superarle en su tiempo. Tuvo un incansable interés en divulgar la ciencia matemática a través de sus obras: «teniendo todos tan abierto el camino para aprenderla que nadie pueda pretender ignorarla, pues el Bachiller Juan Pérez de Moya tanto ha trabajado en esta arte, para que nadie tenga trabajo en saberla» [EL BROCENSE, 1562][2].

Por su relevancia, cabe destacar la valoración que Menéndez Pelayo [1954] hace de la obra del Bachiller:

> «Moya fue un vulgarizador incansable de las ciencias exactas y sus aplicaciones, exponiéndolas con singular método, elegancia y claridad» [MENÉNDEZ PELAYO, 1954, p. 258].

Constituye un cabal ejemplo de humanista del Renacimiento. Así lo muestran sus obras, tanto matemáticas como no matemáticas, entre las que destaca su famosa *Filosofía Secreta*, punto de referencia entre literatos, pintores y escultores del Siglo de Oro para sus creaciones mitológicas.

2. Análisis epistemológico y didáctico de la *Arithmetica Practica y Specvlativa*

Las obras matemáticas del Bachiller comenzaron a publicarse en 1554 y se reeditaron hasta bien entrado el siglo XVIII, aunque son muy desiguales en su importancia[3].

El texto de *Arithmetica Practica y Specvlativa,* sobre el que haremos nuestro estudio, corresponde a la parte I del *Tratado de Mathematicas en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural,* editado en Alcalá en 1573[4]. Este *Tratado* constituye la obra más voluminosa del Bachiller, en la que recopila y amplía todo lo expresado en libros anteriores.

Cabe señalar por su pertinencia que, Pérez de Moya, en su introducción dirige unas palabras al «amado lector» y, en ellas, ratifica la gran utilidad de su obra: «se pone todo lo que de numeros y cuenta se puede dessear, diziendo vsos que siruan a las artes liberales, y mechanicas, de suerte que se pueda dello aprouechar toda suerte de hombres. Es materia que aunque no fuera tan necessaria auia de ser amada... Conserua la amistad, y concordia entre los tratantes. Haze (como refiere Platon) habiles, y promptos a los que son tardos de ente(n)dimiento.... Fue tan celebrada en toda la antiguedad q(ue) no auia cosa en el mu(n)do que no se reduxessen a numeros» [PÉREZ DE MOYA, 1573]. Como vemos, el Bachiller presenta magistralmente el objetivo y el destino de estas aritméticas: *Para que pueda aprovechar a toda suerte de hombres.*

La *Arithmetica Practica y Specvlativa* consta de diez libros, pero por limitaciones obvias de extensión, en este trabajo sólo nos aproximaremos a cuatro de ellos:

— Libro I: *Arithmetica Theorica o Specvlativa*,

— Libro II: *Arithmetica Practica*,

— Libro III: *Quebrados o Fractiones Comunes,*

— Libro VII: *De la muy subtil y muy ingeniosa regla del Algebra en Arithmetica, que por otro nombre se dice regla de la cosa*.

Rey Pastor (1934)[5] ha elogiado este tratado, considerado el más importante en la España del siglo XVI, no tanto por sus innovaciones (que no las tiene), sino por lo que supuso en el dominio didáctico: el Bachiller tuvo empeño en enseñar matemáticas, en hacerse entender. Su introducción en lengua vernácula de la *teoría de la cosa* —regla del álgebra en aritmética—, fue una de sus más insignes y significativas aportaciones.

2.1. ¿Por qué un análisis epistemológico y didáctico de esta obra?

El estudio de este tipo de obras, desde la Didáctica de las Matemáticas, nos permite comprender mejor los problemas que encontramos en la enseñanza de los conocimientos matemáticos[6]. El análisis epistemológico-histórico de la actividad matemática conlleva la identificación de los obstáculos y las rupturas epistemológicas en la construcción de los saberes, la indagación de la función de los problemas, de la demostración, de la evidencia, de la conjetura, del error, del rigor, etc. En suma, todo un conjunto de condiciones y restricciones que están íntimamente relacionadas con el saber puesto en juego: *la matemática*.

Los conocimientos que figuran en los manuales escolares actuales o los que presentan los profesores en las aulas aparecen, generalmente, como algo cerrado y acabado, algo definitivamente perfecto. Como consecuencia, «esta presentación elimina completamente la historia de los saberes, es decir, la sucesión de dificultades y preguntas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales a lo largo de la historia, el rechazo de ciertos puntos de vista que han resultado falsos e inadecuados, las innumerables discusiones que han ocasionado. Enmascara el verdadero funcionamiento de la ciencia, para poner en su lugar una génesis ficticia» [BROUSSEAU, 1998, p. 47].

La aproximación epistemológica al conocimiento matemático «permite una mejor comprensión de las dificultades cognitivas experimentadas por nuestros estudiantes, así como una mejor interpretación de los errores y las conceptualizaciones incorrectas que surgen en el aprendizaje de un contenido matemático específico» [VERGNAUD, 1990, p. 16].

Además, «ayuda a dar historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual tiende a presentar como objetos universales tanto en el espacio como en el tiempo» [ARTIGUE, 1991, p. 243].

El análisis epistemológico interviene también, de modo muy decisivo, en la configuración de los elementos constitutivos del sentido de un determinado conocimiento, determinado los diferentes significados con los que ha podido aparecer en su génesis histórica, así como su adaptación, más o menos idónea, a la resolución de distintos problemas.

2.2. *Elementos de Didáctica de las Matemáticas para un análisis epistemológico y didáctico*

Para llevar a cabo este tipo de estudio en la obra de Pérez de Moya, la Didáctica de las Matemáticas cuenta con múltiples elementos de análisis. Entre ellos, nosotros emplearemos:

— *Concepción* en el sentido dado por investigadores tales como Artigue [1991] o Brousseau [1998].

— *Obstáculo epistemológico* según lo consideran Bachelard [1983] y Brousseau [1986, 1998].

— Elementos de la teoría de la *transposición didáctica* y de la teoría *antropológica de lo didáctico* (TAD) de Chevallard [1991, 1992, 1997, 2007].

Concepción de un objeto matemático

El análisis epistemológico de un determinado objeto matemático nos conducirá a la determinación de toda una serie de concepciones históricas ligadas al mismo, ello nos permitirá poner en evidencia «toda la pluralidad de puntos de vista posibles que históricamente han estado asociados, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que le han sido asociados y observar su adaptación más o menos buena a las resolución de tal o cual clase de problemas» [ARTIGUE, 1991, p. 265]. Este será el sentido que emplearemos en nuestro estudio.

Obstáculos epistemológicos

Un *obstáculo epistemológico,* según lo define Brousseau [1998, pp. 120-126], es un conocimiento que tiene su dominio de validez, es decir, es útil y eficaz en numerosas ocasiones, pero fuera de los límites de dicho dominio, produce errores repetitivos y resistentes, difíciles de superar. Los obstáculos epistemológicos se presentan en la historia del conocimiento científico y en nuestros propios alumnos.

La localización y caracterización de este tipo de obstáculos constituye una valiosa aportación para la Didáctica de las Matemáticas, ya que ayuda a identificar las causas de los errores que presentan nuestros alumnos actuales. «Los nudos de resistencia severa que se presentan en la actualidad corresponden frecuentemente a los puntos donde se muestra un obstáculo epistemológico. Normalmente este obstáculo ha existido en la evolución histórica de un determinado concepto» [ARTIGUE, 1991, p. 255].

Teoría Antropológica de lo Didáctico: Praxeologías matemáticas

La noción de praxeología, en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), constituye una herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática, como una actividad humana más. Concisamente, en toda actividad humana es posible distinguir entre:

— El nivel de la *praxis* o del «saber hacer», que engloba un cierto *tipo de problemas* y cuestiones que se estudian, así como las *técnicas* para resolverlos.

— El nivel del *logos* o del «saber», en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan.

El par *praxis-logos* constituye una praxeología. Posteriormente, y con el fin de tener herramientas más precisas para analizar los procesos didácticos institucionales, Chevallard [1999] introdujo diferentes tipos de praxeologías, según el grado de complejidad de sus componentes: *puntuales, locales, regionales, globales.*

2.3. Concepciones y obstáculos: Breve aproximación a los Libros **Primero, Segundo y Tercero**

El Bachiller, en la introducción del *Libro Primero De esta obra. (Trata de Arithmetica, Theorica o Specvlativa)*, quiere ayudar a sus lectores a superar el obstáculo de la «experiencia común» en el estudio de las matemáticas. Utiliza una técnica didáctica, que repetirá en numerosas ocasiones en los restantes capítulos de esta obra. Consiste en dar dos concepciones de todo objeto matemático: una concepción de «*el natural*» —intuitiva y espontánea— y otra concepción de «*el matemático*» más formal y rigurosa.

Así, la noción de unidad, elemento básico para la construcción del número, la considera de dos modos: uno por *el matemático,* otro por *el natural* (es decir, por la experiencia básica que comúnmente tiene cualquier persona).

> «El Mathematico la considera como cosa abstracta, de la tal materia sensible, segun razon, solamente. Y segun esto la vnidad es indiuisible según cantidad, como lo affirma Aristoteles» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 3].

> «El natural considera la cosa segu(n) el ser conj(n)to co(n) alguna materia sensible, como Aristoteles affirma, dizie(n)do, vn real de plata, vn cavallo, vna piedra, y assi de todas las demas cosas. … Y deste modo, la vnidad es diuisible en infinito en quanto a la quantidad de su material subjecto» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 3].

Con esta consideración de los objetos de la aritmética *por el natural* y *por el matemático,* el Bachiller adopta una posición muy didáctica para que sus lectores diferencien dos tipos de registros epistemológicos, dos concepciones diferentes. Intenta hacerles entender que la concepción natural es la que todos normalmente adquirimos a través de la experiencia común, para conducirles a construir otra concepción diferente observando esa misma realidad bajo el punto de vista matemático: de modo abstracto, «según razón solamente». Los objetos reales se transforman en objetos matemáticos y adquieren otra dimensión epistemológica. La fuerte disociación entre estas dos concepciones la salva el Bachiller con numerosos ejemplos, facilitando al lector el acceso del contexto real a la *Arithmetica Specvlativa* o teórica.

> «Algunos para declarar la differencia q(ue) ay dela vnidad tomada como el natural, o como el Mathematico trae por exemplo, q(ue) quando de vn hombre, o otro animal le co(n)sideramos solamente segun el cuerpo, esta consideración es segu(n) el natural, porque el cuerpo del tal animal es vna materia sensible: y aunque una, es diuisible, segu(n) quantidad: y assi este tal cuerpo sera semejante a la vnidad natural. Mas si del hombre, o animal, consideramos solamente el anima (aunque tambien es vna) por ser cosa insensible, e indiuisible, diremos ser esto entendido segu(n) el Mathematico entiende la vnidad» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 3].

El tener como referente y apoyo sistemático la *experiencia básica* condujo a los propios matemáticos a configurar un fuerte *obstáculo epistemológico*: la disociación entre magnitudes y números. Las magnitudes las consideraban continuas mientras que los números eran tenidos siempre como discretos. Este obstáculo permaneció muy arraigado en la matemática desde la época griega.

En este sentido, el Bachiller expresa:

> «Porque el subjeto dela materia deste libro es quantidad, notaras q(ue) segu(n) el Philosopho[7], ay dos difiere(n)cias de qua(n)tidad, conuiene saber, co(n)tinua, o junta, y discreta, o apartada. La continua, que es lo q(ue) llamamos grandeza, se trata en la Geometria y Astronomia. La discontinua en los numeros».
>
> ... «la quantidad dizese co(n)tinua porq(ue) sus partes estan ju(n)tas o pegadas a vn cierto termino comun alas partes, como lo esta en vn madero, o en otra cualquiera cosa que tiene cuerpo. La quantidad discreta es, dicha así, porq(ue) sus partes no estan ju(n)tas ni pegadas a vn termino comun assi como 2, 3, 4 q(ue) cada número co(n)sta de vnidades distinctas» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 1].

Actualmente asociamos de modo habitual a cualquier cantidad de una magnitud, su medida: un número real y una unidad. Sin embargo, desde la época griega existía, en la matemática, una fuerte disociación entre magnitudes y números. Esta separación estaba ya establecida en *Los Elementos* de Euclides: *Los números no son magnitudes, son conjuntos de unidades y la unidad no puede ser dividida.* Esta concepción perdurará en la matemática hasta finales del siglo XIX, ya que en el año 1872 los trabajos de Cantor y Dedekind formulan una teoría rigurosa del número real[8].

El conjunto de los números naturales —discreto— sigue constituyéndose, para nuestros propios alumnos, en un obstáculo epistemológico para la construcción del conjunto de los números racionales —denso— y permanece generación tras generación, como fácilmente lo constatamos los profesores de matemáticas al observar en nuestras clases expresiones, tales como: *el siguiente inmediato de 1,5 es 1,6 y el siguiente inmediato de 1,6 es 1,7,...*

Adquiere notable interés en este *Libro Primero* la presentación que hace el Bachiller de las *relaciones entre cantidades* y las *relaciones entre números*, es decir, de las *proporciones*:

> «las quantidades que son de diuerso genero no se puede(n) co(m)parar.... Y assi no sera bie(n) co(m)parar numeros co(n) lineas, ni lineas co(n) superficies, ni superficies co(n) cuerpos. Porq(ue) ha de ser esta co(m)paracio(n) para q(ue) se pueda dezir ser de vn mismo genero, assi como vn numero a otro numero, vna linea a otra linea, vna superficie a otra superficie, vn cuerpo a otro cuerpo, y assi de las demas cosas» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 23].

Esto nos pone de manifiesto la existencia de otro *obstáculo epistemológico*: es necesario que dos magnitudes sean homogéneas, para poder ser comparadas. Al igual que el anterior, este obstáculo, también estuvo fuertemente arraigado en el pensamiento matemático desde la matemática griega. Incluso Galileo, contemporáneo de Pérez de Moya, formulaba sus leyes de acuerdo con este criterio[9]. «Esto impidió a los matemáticos encontrar, de forma significativa, dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional» [RUIZ HIGUERAS, 1998, p. 109]. E incluso, les impidió generar otras magnitudes, tales como la densidad (volumen/masa), o la velocidad (espacio/tiempo).

El *Libro Segundo* versa sobre lo que él denomina *Arithmetica Practica*. Lo presenta como el complemento imprescindible del *Libro Primero: Arithmetica Specvlativa*, argumentándolo del siguiente modo:

> «Digo que Arithmetica Practica es, vn arte que muestra poner en obra los preceptos y especulaciones, que la Arithmetica Speculatiua en los numeros co(n)sidera. Finalmente es vn arte que muestra contar, mediante lo qual viene el hombre a vsar de la razon (en que se diferencia de los irracionales) a cerca de los contratos y negocios de la humana vida: para no defraudar, ni ser defraudado. Y es de advertir, que qua(n)to mas la Arithmetica Specvlativa excede en nobleza a la Practica, tanto mas la practica excede, no solamente en vtilidad, a la Specvlativa, mas aun en loor: porque como dize Cicero(n). Toda la loor de la virtud consiste en la operario(n). Diuidese en arte mayor, y en menor. Arte mayor dizen a la Regla de la Cosa, o Algebra. Arte Menor dize(n) a las reglas necessarias a la contratacion de la humana vida....
>
> Especies en Arithmetica llamo unos modos de obrar co(n) los numeros, por causa de hallar algu(n) numero incognito dudoso demandado. … Las especies o reglas generales de la Arithmetica dizen ser siete, Numerar, Sumar, Restar, Multiplicar Partir, Progresiones y Rayzes» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 83].

Comienza el libro con el estudio del sistema de numeración árabe[10] y el romano. Indicando las ventajas del primero frente al segundo, así como su procedencia. Cabe señalar el modo en que el Bachiller explica el significado del *cero*:

> «… q(ue) el zero en lengua Arauiga, quiere dezir lo mismo q(ue) en lengua Española nada, pues sino vale nada, para que se pone en el numero de las diez figuras de la cue(n)ta? A eso se respo(n)de, q(ue) solame(n)te se pone porq(ue) tiene virtud y fuerça para dar valor de mayor aumento a las otras letras, aunque ella no lo tenga para si. Y digo, que assi como el señor sin el criado, ni el criado sin el señor no podrian viuir politicamente, ansi mismo con las dichas nueue figuras del Guarismo sin el zero, ni el zero sin las figuras, no podriamos contar todo lo que quisiessemos» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 88].

Presenta posteriormente:

— *Problemas de sumar: monedas, pesos, líquidos, áridos.*

— *Problemas de restar: reglas y aplicación a monedas, pesos, líquidos, áridos.*

— *Problemas de Multiplicar y Partir: aplicaciones a monedas, pesos, líquidos, áridos.*

La profusión de problemas de este tipo nos muestra las grandes dificultades sociales que implicaba el uso de los sistemas de pesos y medidas en la España del siglo XVI, eran enormemente complejos y, en consecuencia, muy costosos de utilizar. Cada magnitud tenía un sistema de medidas con intrincadas relaciones entre sus diferentes unidades y cada población mantenía unas peculiaridades en su sistema de unidades que hacía muy difícil cualquier intento de homogeneización[11].

No sólo en este libro de *Arithmetica Practica*, sino en todo su Tratado, el Bachiller muestra un gran afán por hacerse entender, por aclarar todos los conocimientos matemáticos a través de ejemplos y problemas concretos. Es muy frecuente encontrar a lo largo de su obra expresiones del tipo:

> «Y porq(ue) toda cosa para bien entenderse aprovechan mas los exemplos que los preceptos, pondre algunos. Y notarás por ello se entienda mejor lo que he dicho» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 525].

El *Libro Tercero,* Pérez de Moya lo dedica a *los Números quebrados o rotos o minucias* (denominados así, porque consideraba que todos eran menores que la unidad). Según explica el Bachiller:

> «La origen, o generacion de los números quebrados simples, sale quando partimos algun numero menor por otro mayor,... Y assi responderas, que partiendo siete cosas (sean ducados o lo que te pareciese) a dos co(m)pañeros a cada vno le cabe a 3 ducados y medio (lo pondras desta manera 1/2). ... Parte tres panes a quatro pastores, porque los tres panes no pueden ser partidos a quatro, de manera que quepa a pan entero a cada uno, por tanto pondras los cuatro debajo de los tres, haziendo vna raya en medio desta manera ? y quedara(n) partidos, la qual figura quiere dezir tres cuartos de un pan. Y ansi diras, q(ue) partiendo tres panes a cuatro pastores cabe a cada vno tres cuartos de un pan» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 178].

La concepción que Pérez de Moya presenta de los números *rotos o quebrados* es la heredada de la matemática árabe: partir un número menor por otro mayor. La fracción no se observa, en esta época, como el representante de un número racional, sino como una *operación* entre números. La designación como números *rotos o quebrados* tiene su origen en la traducción de la palabra árabe *kasr,* que proviene de *kasara*: romper[12], término con el que Al-Khowarizmi (780-850) los denominó en su Aritmética [YOUSCHEKEVITCH, 1976]. Pérez de Moya muestra conocer la obra del matemático árabe, a la que posiblemente tuvo acceso gracias a la traducción llevada a cabo por Juan de Sevilla (miembro de la escuela de traductores de Toledo desde 1135 a 1153).

Esta concepción de fracción como *operación entre dos números* se mantiene fuertemente en la actualidad en nuestros propios alumnos. Y, en muchas ocasiones, se constituye en un obstáculo epistemológico para la construcción del concepto de número racional.

Pérez de Moya no trata, ni trabaja, con números decimales, aún estaban por crear, no se difundieron entre los matemáticos hasta la publicación de la obra de Simón Stevin *La Disme* (La Décima) en 1585. Esta obra muestra cómo los números decimales simplifican las numerosas dificultades que existían en el cálculo con fracciones. La creación de los números decimales ayudará a superar los obstáculos epistemológicos ligados a la discretización del número y permitirá a los matemáticos ir abriendo el camino para la construcción del número real a partir de las s*ucesiones de Cauchy* (1789-1857).

2.4. **Libro Séptimo: Regla de la Cosa.** ***Primer libro de Álgebra de autor español. Un estudio desde la TAD***

Por su interés, y por la relevancia que supuso en su día la introducción de la *regla de la cosa* en España, gracias a la obra del Bachiller, llevaremos a cabo un análisis didáctico epistemológico, desde la TAD, de algunos elementos relevantes del *Libro Séptimo de esta obra que Trata de la muy subtil, y muy ingeniosa regla del Algebra en Arithmetica, que por otro nombre se dize regla de la cosa*[13].

En 1552 se imprimió el primer libro de álgebra en castellano: *Libro Primero de Arithmetica Algebratica*, escrito por el alemán Marco Aurel[14], texto en el que por primera vez se presentaba en nuestra lengua la «teoría de la cosa». Rey Pastor [1934] afirma que Pérez de Moya se basó en el texto de Aurel para escribir el *Libro Séptimo* sobre la *teoría de la cosa*. Dado que en 1562, se publica la primera edición del *Tratado* de Pérez de Moya, podemos postular que este texto constituyó, en su día, una verdadera primicia en cuanto a los libros de álgebra escritos por autor español: «mucho más completo e interesante que el tratado de álgebra publicado en Francia por Petelier en 1554» [SÁNCHEZ PÉREZ, 1929, p. 229, cit. por VALLADARES, 1997, p. 389].

Comienza el Bachiller su *Libro Séptimo* afirmando que:

> «Algebra es un modo de hallar algun numero dudoso demasiado subjeto a alguna proporcionalidad...
>
> Nombrese variamente, porque unos le dizen regla de Algebra, que quiere dezir restauracion. Otros Almucabula, que en Arauigo quiere dezir posicion, o contencion, o solidacion. Otros la nombran regla de la Cosa, o Coss, todos son nombres del efecto, porque obrando en ella (para hecho de buscar algun numero que tenga alguna propiedad o propiedades) se finge ser el numero que se busca una cosa» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 429].

Boyer [1986, p. 239] considera como un hecho universalmente aceptado la distinción de tres grandes etapas en el desarrollo histórico del Álgebra:

— *Retórica* o primitiva, en la que todo se escribía con las palabras del lenguaje ordinario.
— *Sincopada* o intermedia, en la que se adoptaron algunas abreviaturas.
— *Simbólica* o final que corresponde a la moderna simbolización en un lenguaje formal artificial.

Esta clasificación, aunque supone una simplificación excesiva del desarrollo del álgebra, nos permite situar la obra de Pérez de Moya en la segunda etapa.

En la introducción de este *Libro Séptimo (Regla de la cosa)*, el Bachiller muestra haber leído la obra del matemático alemán Johann Müller de Köngsberg (1436-1476), llamado también Reggiomontano o Juan de Monterregio, figura de transición entre la tradición escolástica y la tradición mercantil y también la obra de Leonardo de Pisa.

> «El inventor desta arte, segu(n) Leonardo Pisano, fue un Mahumeto hijo de Mofis Arauigo. Alfragano (como refiere Iuan de Monte Regio) dize que Diophanto, y que escriuio treze libros della. Otros dizen que el inventor, fue un Arauigo, dicho Gerber, y que deste nombre se deriuo Algebra. La utilidad desta regla, el q(ue) tratare con Euclides, lo podra bien entener» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 429].

También dice conocer la obra de Cardano (matemático italiano, 1501-1576) y valora mucho los libros del científico y catedrático portugués Pedro Núñez (1502-1578), puesto que recomienda insistentemente su lectura a aquellos que quieran ampliar conocimientos [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 489].

En primer lugar presenta los caracteres o dignidades: número, cosa, censo, cubo, censo de censo, primer relato, etc. hasta un total de treinta[15]. En la Tabla 1 se expresan sus equivalencias con las notaciones actuales:

Designación	Notaciones usadas por Pérez de Moya (1573)		Notación actual
número	n		1, 2, 3,....
cosa	co		χ
censo	ce		χ^2
cubo	co.co.co	co.ce	χ^3
censo de censo	ce.ce		χ^4
primer relato	co.ce.ce		χ^5
censicubo	ce.ce.ce		χ^6
segundo relato	co.ce.ce.ce		χ^7

Tabla 1. Notaciones algebraicas

El Bachiller define todas y cada una de estas dignidades, así, por ejemplo:

> «De suerte, que por número, se entie(n) vna cualquiera quantidad, compuesta de vnidades, assi de numero entero, como de roto, como de rayces. Es entendido en esta arte como el punto en Geometria.
>
> El segundo character, o dignidad, o quantidad proporcional, se dize Cosa, tomase por rayz de vn quadrado, y este es el primero de los characteres, de vna continua proporcion, su valor, es variable. … assi esta Cosa no tendra propio valor, antes tendra el que le quisieres dar, assi por enteros como por quebrados como por rayzes. Tomase en esta arte como linea en Geometria» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 432].
>
> «El tercero character, se dice censo, denota cuadrado, o potencia de Cosa, y por esto su valor es variable, porque siempre procede de la multiplicación de la Cosa por si misma. … Como si pones por ejemplo que la Cosa vale dos, el censo valdra quatro, y si la cosa vale tres el censo valdra nueue, y assi procederas en infinito. Es entendido el censo en esta arte, por lo que en Geometria la superficie.
>
> El cuarto character, se dize cubo, denota vn numero cubico, o que tiene rayz cubica. Procede cubicando la Cosa, o multiplicando el censo por la Cosa..... Tomase aqui por lo que en Geometria el cuerpo» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 433].

La consideración de la *cosa* o bien del *censo* como un carácter que representa un valor *variable,* es lo que va a constituir la base del álgebra que, posteriormente, Vieta y Descartes desarrollarían profundamente. Se trata de un paso de enorme trascendencia en el desarrollo del pensamiento matemático.

Según podemos observar en las anteriores definiciones, el Bachiller lleva a cabo una asociación entre caracteres algebraicos y elementos de geometría: el número con el punto, la cosa con el segmento, el censo con el área y el cubo con el volumen[16].

La identificación de la *cosa* con longitudes, el producto de dos *cosas* (o *censo*) con una superficie, y el de tres *cosas* (o *cubo*) con un volumen o cuerpo, constituyó un fuerte *obstáculo epistemológico* que detuvo la evolución del álgebra, al tener los matemáticos necesidad de representar estas operaciones con figuras geométricas, e incluso de justificar sus demostraciones con la denominada *evidencia geométrica*. Este obstáculo hizo que todos los cálculos estuviesen supeditados a su representación geométrica y que las soluciones necesariamente se validasen sobre el apoyo de la figura. Estuvo anclado en la matemática desde los griegos y perduró hasta que los trabajos de Descartes, en el siglo XVII[17], permitieron su superación.

Tras dedicar Pérez de Moya un impresionante trabajo para explicar a los lectores cómo se opera con esta nueva *regla del álgebra en aritmética*, que hoy denominaríamos «operaciones con polinomios», el Bachiller pasa a estudiar *Como hemos de hacer demandas por esta regla de la cosa*, constatando que:

> «... pues todo lo q(ue) se ha dicho, es ordenado para este fin. Y assi digo, que para hazer qualquiera demanda por esta regla, has de presuponer que la tal demanda es ya hecha, y respondida, y que la quieres prouar, poniendo por exemplo que la respuesta de la tal demanda fuesse vna cosa, con la qual procederas haziendo lo que la demanda pidiere, y lo que te viniere con la tal cosa, diras ser ygual a lo que quisieras que viniera, poniendo entre lo vno y lo otro esta figura W q(ue) quiere dezir ser lo vno igual, a lo otro. Desto se sigue ser necessarias dos partes en estas las ygualaciones. La vna lo que viniere con la operación de la Cosa, segun lo que la demanda pide. Y la otra lo que quisieras que viniera. Destas dos partes, la vna ha de ser semeja(n)te a la otra en proporción» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 539].

Propone estudiar siete tipos de *ygualaciones* o ecuaciones (Tabla 2).

	Notación actual	**Notación usada por P. de M.**
Simples	$5x = 10$	5co. yg.10 n.
	$6x^2 = 24$	6ce. yg. 24 n.
	$8x^3 = 216$	8co.ce. yg 216n.
	$7x^4 = 567$	7ce.ce. yg. 567
Compuestas	$x^2 + 6 = x$	1ce. p. 6n yg. 1co.
	$17x - 70 = x^2$	17co. m. 70n. yg 1ce.
	$3x^2 + 21x = 180$	3ce. p.21co.yg.180n.

Tabla 2. Notación usada para las «ygualaciones» (ecuaciones de primer y segundo grado)

Es muy importante señalar que, en la obra del Bachiller, la búsqueda de la solución de las ecuaciones se propone siempre tratando cada una como un caso particular, considerándolas totalmente independientes unas de las otras. La *organización matemática* que construye en torno a la resolución de ecuaciones corresponde a lo que en la TAD se denomina como un conjunto de *praxeologías puntuales*: problemas aislados con técnicas muy rígidas asociadas a cada uno de ellos y no válidas para ningún otro. Las técnicas que el Bachiller propone para su resolución se basan en la modelización geométrica de operaciones aritméticas. Cada ecuación se «modeliza» con una configuración geométrica adaptada de modo específico y único, con objeto de construir la solución a partir del análisis de sus propiedades (ver tablas 3a y 3b). Este modo de validación geométrica, si bien constituye una verdadera tecnología, ya que explica y justifica las técnicas algebraicas empleadas, no permite la unificación de todas las técnicas de resolución de ecuaciones. Las restricciones impuestas por la necesidad de validar toda transformación algebraica a partir de relaciones geométricas (tecnologías geométricas) no permite la emergencia de los números negativos (ni, por supuesto, de los imaginarios), impidiendo la integración de las diferentes praxeologías puntuales en una praxeología local.

Como consecuencia, el Bachiller no puede proponer tecnologías generales y, menos aún, teorías que las sustenten y justifiquen. Habría de pasar aún mucho tiempo para que esto fuese posible. En esta época no puede existir una solución general, ya que no se consideran como válidas las soluciones negativas, y, en consecuencia, tampoco las imaginarias. O mejor dicho, se consideran absurdas, sin sentido, por ello se las desprecia y no se las tiene en cuenta. El Bachiller las denomina números *absurdos*, *ficticios* o *imposibles*.

Esta concepción del número negativo y del número imaginario prevaleció en la matemática hasta el siglo XVII y constituyó un fuerte obstáculo epistemológico para el desarrollo del álgebra formal, ya que impedía todo tipo de consideración de casos generales en la resolución de ecuaciones. «La unificación de los problemas llega a ser un genuino problema matemático sólo cuando los números negativos han sido desarrollados y ocupan un mínimo espacio conceptual en la matemática» [RADFORD, 1995, p. 35].

De este modo, el álgebra sólo constituía una herramienta limitada a la resolución de problemas muy particulares, no llegaba a ser un modelo formal del pensamiento matemático. Los objetos matemáticos que formaban parte del álgebra, según Chevallard [1991], sólo tendrán, en esta época, consideración de *nociones paramatemáticas:* instrumentos útiles para la resolución de problemas.

Esta concepción del álgebra fue heredada del pensamiento matemático árabe: «Los árabes tenían un defecto: buscaban hechos sueltos más que principios generales y no tuvieron la facultad de deducir leyes generales de los hechos que habían descubierto» [RUSSELL, 1987, p. 18].

Sólo el matemático portugués Pedro Nuñez (1502-1578) en su *Libro de Algebra en Aritmética y Geometría* y el italiano Cardano (1501-1576) en su *Ars Magna* se atreven, en esta época, a considerar cantidades imaginarias en el desarrollo de los cálculos algebraicos. Pérez de Moya muestra conocer estos trabajos, por ello invita a los lectores más aventajados a estudiarlos:

> «Otras varias, y diuersas ygualaciones ay que dexo de poner, porque para sabios no es menester, y para principiantes no se entenderan. Quie(n) quisiere ver algo, lea el decimo d Arithmetica de Cardano. Y en las ygualaciones que el cubo y cosa, se ygualaren a numero. Lea al doctor Pedro Nuñez, al fin del tratado de Algebra que lo trata mas discretamente, que ninguno de los que antes lo inuentaron» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 589].

Análisis de praxeologías puntuales

Para mostrar las praxeologías que se configuran en la obra de Pérez de Moya, realizaremos un análisis, desde la TAD, del campo de problemas relativo a la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Es muy interesante observar, paso a paso, el proceso de resolución de las ecuaciones de segundo grado, tal y como lo propone el Bachiller en el *Capitulo en el que se ponen demandas para las ygualaciones.*

La metodología empleada por el Bachiller siempre parte de casos prácticos, muestra al lector las reglas que ha de aplicar en la resolución de «demandas» (problemas con datos concretos) y, posteriormente, en capítulo aparte, muestra la validación matemática de dichas reglas. Es decir, presenta las *técnicas* que permiten resolver los problemas y, por último, las justifica mediante *tecnologías* geométricas.

Comienza advirtiendo al lector, «que estas demandas no las pongo por muy subtiles, ni ingeniosas, sino para que se entienda con ellas el modo de proceder con la suposicion de la Cosa». [Pérez de Moya, 1573, p. 553]

Así, por ejemplo, veamos cómo resuelve la siguiente *demanda:*

> *Dame un numero que junta(n)dole su potencia, o quadrado, haga 42.*
>
> «Pon por caso que este numero que te piden, es vna cosa, su potencia es vn censo, juntando a esta potencia el mismo numero, sera 1ce. p. 1 co. lo qual ygualaras a los 42 n. que quisieras, deste modo
>
> 1ce. p. 1 co. yg. 42 n. (formulación actual: $x^2 + x = 42$)
>
> Sigue la regla, partiendo lo que viene con el character mediano, y menor, por lo que viene co(n) el mayor, por reduzir la ygualación a sola vna unidad. Mas porque lo que viene por el character mayor, es vno, no ay necesidad de partir, sino tomar la mitad de vno que viene con la cosa (que es character mediano deste exemplo) y sera medio, quadrale multiplica(n)do por otro medio, y sera un quarto, junta este quarto con los 42 (que vienen con el character menor) y seran 42 ?, saca la rayz cuadrada de 42 y vn quarto, y sera seys y medio, desto quita la otra mitad del vno que viene con el mediano (que es medio) y quedara 6, y tanto vale la cosa, y por consiguie(n)te 6 sera el numero que se demanda». [Pérez de Moya, 1573, p. 569].

Otro ejemplo de *demanda* que nos puede recordar los problemas que todos hemos resuelto en los cursos de matemáticas elementales:

> «*Dos tienen dineros, doblada quantidad vno que el otro, y multiplicando lo que tiene el primero, por lo q(ue) tiene el segundo, y añadiendo al producto lo que tiene el segundo, todo monta 40, demandase quanto tiene cada vno.*
>
> Pon por caso que el vno (qual dellos quisieres) tiene vna cosa y segun esto el otro tendra dos cosas, multiplica agora lo que tiene el vno por lo que tiene el otro,

y mo(n)tara dos ce(n)sos, junta a estos 2 ce. las 2 co. (que tiene el segundo) y porque las cosas son differentes de censos, juntar las has con la diction del mas, y assi mo(n)tará 2 ce. p. 2 co. lo qual ygualaras a los 40 que quisieras que montara, deste modo 2ce. p. 2co. yg. 40n. Y esto quiere decir que 2 ce(n)sos y 2 cosas valen 40 numeros, y porq(ue) es menester saber el valor de vna cosa, y porq(ue) la cosa es rayz de vn censo, reduze esta ygualacion a vn solo censo, lo qual se haze partiendo los 2 (que viene(n) con la cosa) y los 40 (que viene(n) con el numero) por los 2 (q(ue) vienen con el censo). Y es cosa euidente, porque si 2 ce p. 2 co. eran yguales o valian 40 n. que la mitad de dos ce(n)sos, y de dos cosas, seran yguales a la mitad de los quarenta numeros Y asi diras que si dos censos, mas dos cosas, eran yguales, o valian 40 numeros, di agora que vn solo censo, mas vna cosa, son yguales a 20 n. Esto hecho, para saber segun esto que valdra vna cosa (que es el intento) toma la mitad de vno (que fue el quociente que salio de la partición del mediano) y sera medio, quadrale, y sera vn quarto con los 20 (que fue el quociente del menor) y montara 20 enteros y vn quarto, de lo cual toma la rayz quadrada, que es 4 y medio, y destos 4 y medio quita la mitad de vno, que fue el quociente del mediano, y quedaran 4, tanto vale la cosa. Y porque el primero destos hombres fingiste tener vna cosa de dinero, di que tiene quatro ducados, o reales, o lo que quisieres. Y porque al segundo le pusiste dos cosas, toma dos quatros, que son 8, y tanto tiene el segundo, como lo podras pouar. Porque multiplicando 4 (que tiene el primero) por 8 del segundo hazen 32, a la qual quantidad si añades lo 8 que tiene el segundo, montara 40, como pide la demanda». [Pérez de Moya, 1573, p. 569-570].

Tras esta lectura, es evidente que la *regla de la cosa* es compleja, intrincada y costosa de aplicar, debido al enorme lastre del lenguaje retórico con el que se ha de poner en funcionamiento. Existe una gran distancia entre esta *regla* y las técnicas ágiles del cálculo algebraico que en la actualidad cualquier estudiante de secundaria puede manejar. La escritura «cósica» constituye, como hemos visto, un universo de símbolos mal avenidos, diversos, contradictorios, mezclados con el lenguaje natural. Como afirma Serfati [1987, p. 312], el inicio del álgebra lo podemos identificar como el período del «graffiti», destacando, así, el carácter personal que le daban los autores a las notaciones empleadas. Es, pues, el período de la «notación», período opuesto al del signo, que es social por naturaleza.

La emergencia de un sistema de signos aceptado por todos se hace lenta y dolorosamente en el curso de los siglos. Poco a poco, a lo largo del tiempo, se irá desgajando la escritura matemática de la lengua natural y, muy laboriosamente, se impondrá una escritura nueva, rigurosa, única.

A finales del siglo XVI Vieta comenzará a mejorar notablemente el simbolismo algebraico, pero será Descartes, en el siglo XVII, quien conducirá por el mejor camino el perfeccionamiento de la notación simbólica del Álgebra.

«Hasta el siglo XVII los intereses un poco más legítimos no se superponen a los individuales. Para perdurar, un signo debe ser reconocido y utilizado por un gran número de matemáticos y debe también mostrar su eficacia y su adecuación en la resolución de problemas... y ser fácil de imprimir.

La llegada hasta nuestros días de un conjunto de signos «modernos» reconocidos por todos, tiene, pues, el carácter de una auténtica selección natural» [SERFATI, 1987, p. 309].

Tecnologías basadas en la evidencia geométrica

Para explicar y justificar la intrincada técnica anterior, dado su carácter discursivo, el Bachiller desarrolla una tecnología basada en la *evidencia geométrica*. Para ello, construye figuras, tales como las que aparecen en las tablas 3a y 3b, y asigna a cada una de las cantidades de longitud determinadas en ellas los valores: 1co, 1/2 n., 1co + 1/2 n., 1co. – 1/2 n., etc. El producto de dos cantidades de longitud lo identifica con el área de un cuadrado o bien de un rectángulo, según sean iguales o diferentes sus lados. Basándose en la evidencia geométrica procede, según el caso, como se muestra en las tablas 3a y 3b[18].

La justificación geométrica de las técnicas válidas para calcular las soluciones en las ecuaciones de segundo grado constituyó toda una tradición matemática basada en los trabajos de Al-Khowarizmi. En este sentido Boyer [1986] asegura que «si comparamos las figuras tomadas del álgebra de Al-Khowarizmi con las figuras que encontramos en los elementos de Euclides, sacaremos como conclusión que el álgebra árabe tenía mucho en común con la geometría griega» [BOYER, 1986, p. 301].

Esta fuerte dependencia de la geometría para la búsqueda de soluciones algebraicas se constituyó en un obstáculo epistemológico, no sólo para el desarrollo del álgebra, como hemos señalado anteriormente, sino para el desarrollo de nuevos conjuntos numéricos (negativos e imaginarios), ya que mantenía anclados a los matemáticos en la manipulación exclusiva de los números positivos, pues sólo estos se podían considerar como medidas de cantidades de longitud o de superficie.

Cabe señalar que Pérez de Moya, en las demostraciones que presenta, supone que el coeficiente de x^2 es siempre la unidad, con objeto de evitar posibles irracionalidades, ya que, al basarse en la «evidencia geométrica», necesariamente todo número debe asociarlo con la longitud de un segmento. Es inmediato asociar a x^2 el área de un cuadrado de lado x, mientras que ax^2 debe asociarse al área de un cuadrado de lado $\sqrt{a} \cdot x$. No obstante, el Bachiller, anticipándose a los problemas que pueden surgir en la resolución de ecuaciones, presenta, en el artículo III del capítulo LXI: *En el que se pone regla para quadrar estas quantida-*

des o multiplicar unas por otras, cómo «quadrar» números, cosas y censos y en el artículo V de este mismo capítulo *muestra sacar rayz quadrada destas quantidades*:

> «Sera necesario algunas vezes sacar rayz cuadrada, destas quantidades, como si dixessen. Dame la rayz de nueue censos de a. Saca la rayz de nueue, y sera tres, di que son 3 a. … y assi sacaras rayz cuadrada de otro qualquiera numero que venga con estas quantidades. ... Si fueren los numeros sordos[19], di que es rayz de tal quantidad. Exemplo. La rayz cuadrada de 5a. porque 5 no tiene rayz justa en numeros, di que es r5 a». [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 596].

Las soluciones presentadas por el Bachiller, como asegura Van der Warden [1985, p. 38] ya figuraban en los tratados de Al–Khowarizmi, Luca Pacioli y Leonardo de Pisa, matemáticos que mostraban las técnicas anteriores para resolver geométricamente, de modo independiente, las seis ecuaciones que siguen:

$$ax^2 = bx \qquad ax^2 = c \qquad bx = c$$

$$ax^2 + bx = c \qquad ax^2 + c = bx \qquad ax^2 = bx + c$$

Con toda seguridad, Pérez de Moya debió estudiar estas obras, para ofrecernos su tratado de resolución de «*ygualaciones*», es decir, de ecuaciones en el lenguaje matemático actual.

El hecho de abordar la resolución de cada ecuación de modo independiente muestra cómo la técnica que permitía resolver una no era válida para cualquier otra; era preciso encontrar una técnica específica para cada una de ellas, debido a las grandes limitaciones que tenían los matemáticos al estar forzados a utilizar siempre números positivos que expresaban la medida de cantidades de longitud o de superficie. Por ello, se veían obligados a construir praxeologías puntuales aisladas unas de otras, sin posibilidad de encontrar una tecnología común que las validase a todas de modo uniforme. Esto muestra las limitaciones de las tecnologías geométricas construidas para validar las soluciones de las ecuaciones.

Pero, más aún, llama la atención la necesidad de dos tecnologías diferentes para un caso concreto: el de la «segunda igualación». Un análisis más fino de los tipos de ecuaciones de segundo grado que Pérez de Moya desarrolla, y que por restricciones de espacio no podemos detallar aquí, desvela que, tanto la primera como la tercera igualación admiten siempre una solución positiva y otra negativa. Puesto que la negativa no podía ser considerada en la matemática de la época, sólo una tecnología geométrica, para cada caso, justifica la existencia de la «única» solución aceptable. Sin embargo, la segunda igualación corresponde a un caso muy especial en el que siempre existen dos soluciones positivas[20]. Ni siquiera en este caso las tecnologías geométricas permiten unificar las técnicas de resolución y es por ello que el Bachiller se ve en la obligación de distinguir entre dos supues-

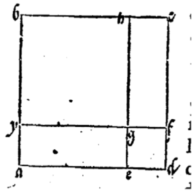
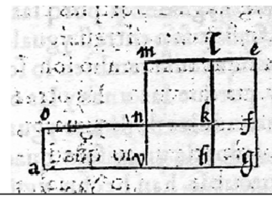
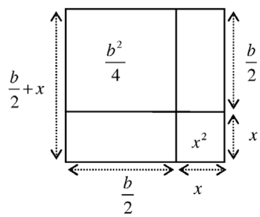
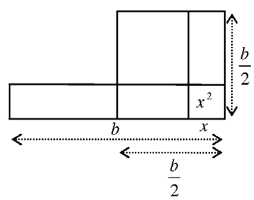
	Primera igualación Compuesta de tres cantidades donde censo y cosa se igualan a número.	**Segunda igualación** (primera suposición) Compuesta de tres cantidades donde censo y número se igualan a cosa.
Ecuación algebraica (notación actual)	$x^2 + bx = c$	$x^2 + c = bx$; siendo $x < \frac{b}{2}$ [primera suposición]
Modelo geométrico **[Pérez de Moya, 1573, p. 590-591]**		
Modelo geométrico		
Resolución	$\left(\frac{b}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + bx + x^2$ Como $bx + x^2 = c$, entonces: $\left(\frac{b}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ $\frac{b}{2}+x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$ $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}-x\right)^2 + x^2 + 2x\left(\frac{b}{2}-x\right) =$ $= \left(\frac{b}{2}-x\right)^2 + x^2 + bx - 2x^2 = \left(\frac{b}{2}-x\right)^2 + bx - x^2$ Como $bx - x^2 = c$, entonces: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}-x\right)^2 + c$ $\left(\frac{b}{2}-x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ $\frac{b}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

Tabla 3a. Desarrollo, en notación actual, de las tecnologías geométricas utilizadas por Pérez de Moya (ver ANEXOS A y B)

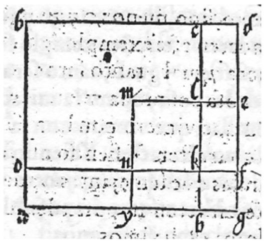
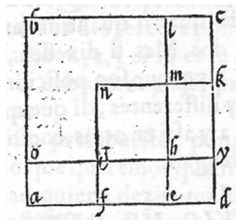
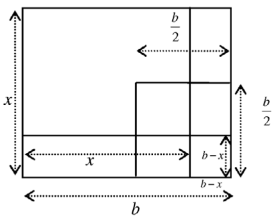
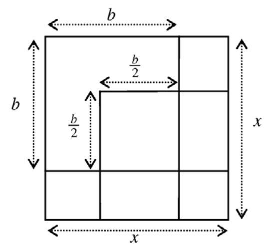
<table>
<tr><th></th><th>Segunda igualación
(segunda suposición)
Compuesta de tres cantidades donde censo y número se igualan a cosa.</th><th>Tercera igualación
Compuesta de tres cantidades donde cosa y número se igualan a censo</th></tr>
<tr><td>Ecuación algebraica</td><td>$x^2 + c = bx$; siendo $x > \frac{b}{2}$
(segunda suposición)</td><td>$bx + c = x^2$</td></tr>
<tr><td>Modelo geométrico
(Pérez de Moya, 1573, p. 590-591)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Modelo geométrico
(notación actual)</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Resolución</td><td>$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)(b-x) - (b-x)^2$
$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 - bx - \left(b^2 - 2bx + x^2\right) =$
$= \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + bx - x^2$
Como $bx - x^2 = c$, entonces:
$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + c$
$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$
$x - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$; $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$</td><td>$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (x-b)^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)(x-b)$
$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + x^2 - 2bx + b^2 + bx - b^2 = x^2 - bx$
Como $x^2 - bx = c$, entonces:
$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
$x - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$</td></tr>
</table>

Tabla 3b. Desarrollo, en notación actual, de las tecnologías geométricas utilizadas por Pérez de Moya (ver ANEXOS C y D)

tos en el mismo tipo de ecuación (para x > b/2 y para x < b/2), con el fin de poder construir, para cada caso, una tecnología que justifique la técnica de obtención de cada una de las soluciones.

En la actualidad, la resolución de ecuaciones de segundo grado figura en el currículo de enseñanza secundaria y los alumnos abordan la solución de una ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, siendo los coeficientes a, b y c números reales (positivos o negativos), con una técnica algebraica fiable y económica que les libera del pesado lastre del recurso a la representación geométrica. Sin embargo, el recurso a las tecnologías geométricas para demostrar relaciones algebraicas sigue bien presente. Es común encontrar en los libros de texto justificaciones geométricas de las identidades o productos notables: $(a \pm b)^2 = (a^2 \pm 2ab + b^2)$ y $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$, y, identidades que luego se constituyen en parte de la tecnología que justifica la resolución de la ecuación de segundo grado.

3. A modo de conclusión

En este trabajo hemos llevado a cabo una aproximación a la obra de Pérez de Moya a través de herramientas de análisis didáctico propias de la Didáctica de las Matemáticas, en especial: concepciones, obstáculos y praxeologías matemáticas.

Este análisis nos ha facilitado, en primer lugar, identificar concepciones históricas de diversos saberes matemáticos. Lo que nos permite, por un lado, conocer los objetos matemáticos tal y como «vivieron» en aquella época (y para algunos, incluso cómo surgieron) y, por otro lado, nos deja entrever la extraordinaria transformación que han experimentado a lo largo de los siglos. En especial, hemos constatado, cómo muchas de estas concepciones se constituyeron en fuertes obstáculos epistemológicos para el desarrollo de la matemática.

En segundo lugar, se han confrontado obstáculos históricos con obstáculos de aprendizaje de los alumnos, lo que ha permitido establecer su carácter epistemológico.

En tercer lugar, el análisis didáctico centrado en la «regla de la cosa» y la resolución de ecuaciones, muestra la atomización de la actividad matemática en torno al objeto ecuación en la obra del Bachiller. También en la actualidad las prácticas matemáticas escolares están fuertemente atomizadas. Sin embargo la razón es bien diferente: en la obra de Pérez de Moya, podríamos hablar de una atomización de origen epistemológico, es decir, la evolución del saber matemático hasta la fecha no permitía la integración de la resolución de ecuaciones en una praxeología local (por la ausencia de una tecnología común). En la actualidad, la atomización tiene su causa en las restricciones pedagógicas y escolares que pesan sobre la clase de matemáticas: la necesaria programabilidad del saber, la adecuación de la actividad matemática al «tiempo escolar» (clases de 50-60 minutos), la ineludible evaluabilidad de los saberes, la dispersión curricular de los objetos matemáticos escolares y su consiguiente pérdida de sentido,… entre otros factores, están en la raíz de esta atomización.

Sin embargo, se observa también cómo hay ciertos elementos praxeológicos que han evolucionado, aunque poco, en casi cinco siglos. Así, se ha constatado, por un lado, el carácter estereotipado y artificioso de los problemas matemáticos que se proponen para ser estudiados. No es de extrañar que, al leer la obra del Bachiller, sintamos cierta familiaridad con este tipo de problemas «ficticios» cuyo única justificación es el servir de prototipo sobre el que desarrollar, y así mostrar y hacer funcionar, la técnica matemática pretendida. Por otro lado, el recurso a tecnologías geométricas, común también en la obra del Bachiller (para las ecuaciones) y en la educación secundaria actual (para las identidades notables). De nuevo esta coincidencia obedece a razones bien diferentes: obstáculo epistemológico (el número como medida de una cantidad de longitud y el cuadrado de un número como medida del área de un cuadrado) en el caso de Pérez de Moya, frente a una estrategia didáctica en la actualidad (la ostensión geométrica y el carácter auto-tecnológico que se le atribuye a las representaciones gráficas).

Es importante indicar cómo, en un intervalo de algo más de cuatro siglos, se ha conseguido que, en el currículo matemático de nuestros escolares de nivel primario y secundario, estén contenidos la mayoría de los saberes que figuran en el *Tratado de Matemáticas* del Bachiller.

ANEXO A

Resolución que realiza Pérez de Moya de la "primera igualación (en la que censo y cosa se igualan a número), es decir, de la ecuación

$$x^2 + bx = c$$

Libro Séptimo de la *Arithmetica Practica y Specvlativa* de Juan Pérez de Moya. Editado en Alcalá, 1573. (p. 589 – 590)
Biblioteca del Instituto de Estudios Giennenses (ejemplar en microfichas).
Biblioteca de la catedral de Baeza (Jaén) (ejemplar original)

LIBRO. VII. 589

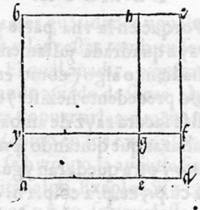
CAP. LX. EN QVE SE PO nen demoſtraciones de las tres ygualaciones, compueſtas de tres quantidades.

ARTICVLO PRIMERO, DE la demoſtracion de la primera ygualaciō compueſta de tres quantidades, del capitulo quarenta y ſeys, articulo primero.

SEA la linea a.e. la mitad del quociēte del numero de las coſas, o character mediano, la qual eſtenderemos haſta el punto d, o lo que mas, o menos te pareciere. Y ſea e. d. lado del cenſo que ſe ignora, el qual cenſo juntamente cō las coſas que en la vna parte de la ygualacion vienen, ſe ygualan con el quociente del numero, o character menor que eſtá en la otra parte de la ygualacion. Queriendo por eſta noticia ſaber quanto ſea el valor de vna coſa, que es lo miſmo que querer ſaber la rayz del quadrado, fundado ſobre la linea e.d. Haremos ſobre toda la linea a. d. el quadrado a.b.c.d. (por la doctrina de la propoſicion 45 del primero libro de Euclides) y ſobre la linea e.d. el quadrado e.d.f.g. que es el cenſo propueſto. Luego alargaremos las 2 lineas e.g. y f. g. haſta el punto h. y punto y. y reſultara deſto, que la figura b. h. g. y. ſera quadrada, y los dos rectangulos y.f.d.a. y e.d.c.h. ſeran yguales (como ſe demueſtra por la quarta prop. del ſegū do de Euclides) y porque a.e. es la mitad del quociente del numero de las coſas que nos fueron propueſtas, y la linea e. g. es lado del cenſo ignoto, ſera por tanto el rectangulo a.e.g.y. la mitad d̄l valor de las coſas, y otro tanto valdra el rectangulo g.f.c.h. y aſsi los dos rectangulos juntos ſeran el valor entero de las coſas. Y porq̄ las

590 ARITHMETICA

las coſas con el cenſo juntamente, ſe ygualaron a vn cierto numero, ſeran por eſta cauſa los dos rectangulos, y el cenſo, o quadrado g.f.d.e. en vna ſumma conocidos, a la qual ſumma añadiremos el quadrado b.h.g.y. el qual es noto, porque tiene por lado la linea y.g. que por ſer ygual a la linea a. e. que es conocida, reſulta el quadrado total a.b.c.d. el qual tambien ſera conocido, y por eſta cauſa ſu lado que es la linea a.d. ſera conocido. Quitādo luego deſta linea a.d. que nos es notoria la a.e. que tambiē nos es notoria, por ſer la mitad del quociente del numero de las coſas, reſtara noto el lado, o quātidad e.d. del quadrado e. d. f. g. y la rayz del miſmo quadrado ſera nota, que es el propoſito. Luego quando vn cenſo y algun numero de coſas notorias ſon yguales a algun numero, o quātidad notoria, bien es (como la regla manda) tomar la mitad de la quantidad que viniere con las coſas, o character mediano, que es a.e. y quadrarla, d̄ lo qual reſulta el quadrado b.h.g.y. y juntar a eſte quadrado la quantidad que viniere con el menor character, el qual character menor, es la ſumma de los dos rectangulos, y del quadrado e.d.f.g. y de toda la ſumma que es el quadrado total a.b.c.d. tomar la rayz q̄drada, la qual rayz correſponde a la quātidad, o lado a.d. del qual ſacando la mitad del quociente del character mediano, que es a.e. reſtara conocida la rayz del cenſo e.d.f.g. la qual rayz ſe repreſenta por el lado e. d. pueſto que la rayz ſea ſuperficie y el lado e.d. ſea linea, porque ſon cōformes en el numero de vnidades, ſiendo quantidades racionales. Mas quando la linea fuere quantidad irracional, ſera tambien la rayz irracional del miſmo nombre. Aduierte aqui, para mayor declaracion de lo



que ſe ha dicho, lo q̄ puſimos en la demāda decima d̄la primera ygualaciō ſimple cōpueſta de dos quantidades.

ANEXO B

Resolución que realiza Pérez de Moya de la "segunda igualación" (en la que censo y número se igualan a cosa), es decir, de la ecuación:

$$x^2 + c = bx, \quad \text{si} \quad x < b/2 \quad \text{(primera suposición)}$$

Libro Séptimo de la *Arithmetica Practica y Specvlativa* de Juan Pérez de Moya. Editado en Alcalá, 1573. (p. 590 – 591)
Biblioteca del Instituto de Estudios Giennenses (ejemplar en microfichas)
Biblioteca de la catedral de Baeza (Jaén) (ejemplar original)

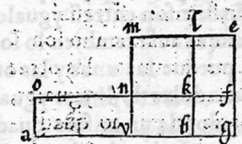
ARTICVLO II. DESTE CAP. LX. *En que ſe demueſtra la ſegunda ygualaciõ, compueſta de tres quantidades del capitulo quarenta y ſeys articulo ſegundo.*

Q x + c = b

PAra demoſtracion de lo que ſe haze en la ſegunda ygualacion, compueſta de tres quantidades, ſea el quociẽte del numero de las coſas del character mediano, la linea a. g. la qual partiras en dos partes yguales, por la doctrina de la prop. decima del primero de Euclides en el punto. y. Preſupongamos que el lado del cenſo es menor que la mitad de la a.g. aſsi como es h.g. y conſtituyremos el cenſo, o quadrado g. f. k. h. y eſtenderemos la linea f. k. haſta cortarſe en el punto o. con otra que ſalga del punto a. equidiſtante a la g. f. ſera agora el rectangulo a. o. f. g. el valor entero del quociẽte de las coſas, o character mediano, y el rectangulo h. k. o. a. ſera el numero, o quantidad que viene con el character menor, que con el mayor, ſe ygualan al mediano, y queremos por eſta noticia ſaber quanto ſea el valor de vna ſola coſa. Deſcriue ſobre la linea y.g. el quadrado y. g. e. m. (por la prop. 45 d̃l primero d̃ Euclides) el qual es notorio, porque lo es ſu lado y.g. Eſtiende agora la linea h.k. haſta el pũto l. del lado e.m. ſea la cortadura de la o.f. y la m.y. en el punto

DE MOYA.

el punto n. neceſſariamente los rectãgulos y. h. k. n. y k. f. e. l. que ſon ſuplementos, ſeran entre ſi yguales, y añadiendoles comunmente a cada vno el quadrado h. g. f.k. los dos rectangulos g.e.l.h. y g.y.n.f. ſeran yguales. Y porq̃ el rectangulo a.y.n.o. es tambien ygual al rectangulo y.g. f.n. ſigueſe por comun conceſsion, q̃ los dos rectangulos a.o.n.y. y h. l. e. g. ſeran entre ſi yguales, por lo qual ſi con cada vno dellos ſe jũtare el rectangulo y. h. k. n. reſultara el rectangulo a. h. k. o. que es el numero que puſimos ygual al gnomon, compueſto de los dos ſuplementos, y del quadrado h.g.f.k. y aſsi ſacando del valor del quadrado y.g.e.m. que es conocido, el gnomõ (que por ſer ygual al quociẽte del numero, o menor character que ſe puſo notorio) quedara el q̃drado n.m.l.k. conocido. Y porq̃ ſu lado n.k. es ygual a la linea y.h. ſera la linea y. h. conocida, la qual ſacada de y.g. (que tambien es conocida) reſtara h.g. conocida, la qual es la do del cẽſo, o quadrado h. g. f. k. por lo qual el valor d̃ vna coſa q̃dara conocido.



ANEXO C

Resolución que realiza Pérez de Moya de la “segunda igualación” (en la que censo y número se igualan a cosa) , es decir, de la ecuación :

$$x^2 + c = bx, \quad \text{si} \quad x > b/2 \quad \text{(segunda suposición)}$$

Libro Séptimo de la *Arithmetica Practica y Specvlativa* de Juan Pérez de Moya. Editado en Alcalá, 1573. (p. 590 – 591)
Biblioteca del Instituto de Estudios Giennenses (ejemplar en microfichas).
Biblioteca de la catedral de Baeza (Jaén) (ejemplar original)

Mas propongamos ſegundariamē te del principio que el lado del cenſo no fueſſe h.g. como ſe ha dicho, ſino a.h. de la figura ſiguiente. Funda ſobre la h.a. el quadrado. a. b. c. h. y alarga la b.c. y la g.e. haſta el pūto d. do concurren, y ſera agora el rectangulo a.g.d.b. el valor del quociente de las coſas, o character mediano, el qual es ignoto, aunque el numero dellas es notorio. Y porque a.b.c.h. es el cenſo, el rectangulo h.g.d.c. ſera el numero, o quantidad del quociente que viene con el menor character q̃

LIBRO. VII. 591

ſe puſo conocido, y es el numero q̃ auiamos pueſto quādo fingimos que el cenſo ignoto fueſſe h.g.f.k. la cauſa de lo qual es, porque los rectangulos a.h.k.o. y h.g.d.c. ſon entre ſi yguales, porque lo ſon tambien a.h. y h.c. con los dos h.k. y h.g. Y porque a.h.k.o. es el numero que ſe propuſo ygual al gnomon, compueſto de los dos rectangulos y.g.f.n. y k.f.e.l. Y por eſto, ſi del quadrado y.g.e.m. quitaremos el dicho gnomon (que es ygual al quociente del character menor, o numero) reſtara el quadrado n.k.l.m. notorio, y ſu lado n.k. ſera notorio, y por conſiguiente y.h. ſu ygual, la qual jūtaremos con a.y. (mitad del quociente del mediano character, o coſas) y toda la linea a.h. (q̃ es lado del cenſo en eſta ſegunda ſupoſicion) ſera notoria, y aſsi el valor d̃ la coſa, q̃ es la rayz deſte quadrado, o linea a.h. ſera notoria. Eſto demueſtra Euclides en la prop. 5. del ſegundo.

ANEXO D

Resolución que realiza Pérez de Moya de la "tercera igualación" (en la que cosa y número se igualan a censo), es decir, de la ecuación

$$bx + c = x^2$$

Libro Séptimo de la *Arithmetica Practica y Specvlativa* de Juan Pérez de Moya. Editado en Alcalá, 1573. (p. 589 – 590)
Biblioteca del Instituto de Estudios Giennenses (ejemplar en microfichas).
Biblioteca de la catedral de Baeza (Jaén) (ejemplar original)

ARTICVLO III. DESTE CAP. LX. En que ſe demueſtra la tercera ygualacion, compueſta de tres quātidades que ſe puſo en el articulo 3, del cap. 46.

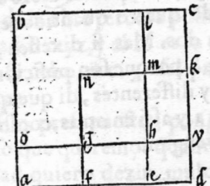
SEa el cenſo ignoto el quadrado a. b.c.d. y cortemos de ſu lado a.d. la linea a.e. la qual ſirua por el quociente de la quantidad que viene con las coſas, ſaca del punto e. la linea e. l. equidiſtante al lado d.c. y ſera por tāto el rectangulo a. e. l. b. el valor de todo el quociente de las coſas, o chāracter mediano, y el rectangulo e. d. c. l. (que es la reſta) ſera el quociente del numero, o character menor que

PRACTICA

ſe propuſo mas cō las coſas en la vna parte de la ygualacion. Parte agora el numero de las coſas que puſimos ſer a.e. en dos partes yguales en el pūto f. por la doctrina dē la decima propoſicion del primero de Euclides. Y digamos que ſi con el quadrado de f.e. juntaremos el rectangulo e.d.c.l. que es el numero propueſto, y de toda la ſumma tomaremos la rayz quadrada, y juntaremos con ella la otra mitad del quociente de la quantidad que vino cō las coſas, o character mediano (que es a.f.) reſultará el lado dēl cenſo a.d.c.b. que era ignoto, el qual lado es correſpondiente al valor de vna coſa. Para prouar eſto, toma de la linea d.c. la d.y. ygual a la d.e. y ſacando del punto y. la y.o. equidiſtante a la a.d. Luego conſtituye ſobre d. f. el quadrado f.d.k.n. y la linea y.o. y f.n. ſe cortaran en el punto g. y con la e.l. ſera en h. y el encuētro de n.k. cō e.l. ſera en el punto m. y ſera por eſto la figura e.d.y h. quadrada, y los dos rectangulos e.h.g.f. y el y.k.m.h ſeran entreſi yguales. Y porq̄ las dos lineas a.f. y k.c. ſon entreſi yguales, y por la miſma cauſa tambien lo ſon f. e. y k. y. porque las vnas y las otras reſtan ſacandolas de lineas yguales, que ſon lados de vn miſmo quadrado. Y porque ſe han hecho yguales a.f. y f.e. ſeran por comun concebſiō las dos lineas y.k. y k.c. yguales, y los dos rectangulos y.h.m.k. y m.l. c. k. ſeran entreſi yguales, y tambien ſerā yguales a los dos rectangulos e.h.g. f. y k.c.l.m. luego ygual ſera el rectā gulo e.d.c.l. (que es la quātidad que ſe propuſo) al gnomon, y el quadrado que es compueſto del quadrado e.d.y.h. y de los ſuplementos e. h. g. f. y h.m.k.y. Y porque el ſobredicho rectangulo e.d. c. l. es numero notorio, ſer lo ha tambien el gnomon. Iūtemos pues cō el gnomō el quadrado

DE MOYA.

g. n. m. h. que nos es notorio, porq̄ ſu lado g.h. es notorio, por ſer ygual a la linea, o quantidad e. f. y reſultara de todo vna ſumma notoria, q̄ es el quadrado f.n.k.d. cuyo lado f.d. ſera notorio. Iunta pues con la linea a. f. q̄ es la mitad del quociente de las coſas q̄ nos es notoria, y toda la linea a. d. q̄ es lado del q̄drado, o cenſo a.d.c.b. ſera notoria, y aſsi la rayz quadrada dēl dicho cēſo (que es el valor de la coſa) ſera notoria, q̄ es lo que ſe pretende. Y eſto preten



de moſtrar Euclides en la propoſiciō ſexta del libro ſegundo.

Las ygualaciones ſimples de dos quātidades, no tienen neceſsidad de demoſtracion vltra de lo que en las demandas ſe pone ſobre cada vna.

NOTAS

1. Caballero Venzalá [1993], Chica Arellano [1999], Leal y Leal [1972], Higueras [1999], Valladares [1997].
2. Francisco Sánchez de las Brozas (1523-1601), nacido en Brozas (Cáceres), conocido como «el Brocense», catedrático de Retórica en la Universidad de Salamanca, donde conoció a Pérez de Moya. Hace estos comentarios sobre la obra del Bachiller en la introducción al *Libro Séptimo* de la *Arithmetica Practica y Speculativa,* edición de 1562.
3. Un listado preciso de todas sus obras se encuentra en Valladares [1997].
4. Este texto se encuentra depositado en la Biblioteca de la catedral de Baeza.
5. «No vacilaremos en calificar de excelente la parte de Aritmética práctica, muy clara y agradablemente escrita, la cual demuestra el conocimiento de varios libros extranjeros… La obra más notable del Bachiller Pérez de Moya es su *Arithmetica Practica y Speculativa*, la cual alcanzó multitud de ediciones, y fue muy conocida fuera de España» [REY PASTOR, 1934, p. 104, 105].
6. El relevante matemático Jean Dieudonné afirma que «no es posible comprender las matemáticas actuales si no se ha trabajado y estudiado la evolución de sus problemas y las circunstancias históricas en las que surgieron. [Dieudonné, 1989, p. 15].
7. Entre el número (discreto) y la magnitud (continua) hay una oposición que no escapó a Aristóteles: «llamamos multiplicidad lo que es, en potencia, divisible en partes no continuas, y magnitud, lo que es divisible en partes continuas». Posteriormente, en esta misma línea, Euclides, aunque no definió la magnitud, sin embargo, la caracterizó por poder ser dividida en partes de la misma naturaleza [Citado por DAUMAS y GUILLEMOT, 1993, p. 40].
8. En la revista *Mathamatische Annalen* fue publicado en 1872 el primero de los trabajos de Cantor sobre los fundamentos de la aritmética. Ese mismo año apareció también la obra de Dedekind *Continuidad y números irracionales*. Estas obras perseguían un único objetivo: construir una teoría rigurosa del número real [RUIZ HIGUERAS, 1998, p. 133].
9. Galileo formulaba sus leyes mediante proporciones homogéneas, es decir, e:e’ = t:t’, en lugar de, e:t = e’:t’, expresión que para nosotros es equivalente y permite poner de manifiesto la noción de velocidad constante que caracteriza dicho movimiento.
10. El sistema decimal de posición —sistema indoarábigo— se conoció en España a través de la obra *Liber Algorismi de practica arismetrice*, escrita por Juan de Sevilla, miembro de la escuela de traductores de Toledo de 1135 a 1153. Esta obra traduce el tratado de aritmética de Al-Khowarizmi (780-850) primer libro de matemáticas que explica el sistema de numeración posicional. Según Youschekevitch [1976, p. 15] las obras de Al-Khowarizmi han ejercido una influencia preponderante en el desarrollo de las matemáticas. Decenas de generaciones de matemáticos se han formado con su estudio.
11. Felipe II propuso llevar a cabo la unificación de los sistemas de medidas en España y América, pero no llegó a buen término. Tendremos que esperar a la Revolución Francesa para que se instaure el Sistema Métrico Decimal. Concretamente, en España, no se logró hasta el último cuarto del siglo XIX.
12. De igual modo derivan los términos con los que se designan en francés: *nombre rompu,* en inglés: *fraction,* en alemán: *bruch.*

13. Según afirma Bebbouchi [1996, p. 442] la matemática árabe designará, de modo general, a la primera incógnita de una ecuación como «chai» (cosa), que en Europa se tradujo por la palabra latina «res» (así la nombra Leonardo de Pisa), aunque en español e italiano se denominó «cosa» (empleada por Lucas Paccioli y Pérez de Moya), en alemán «coss» (utilizada así por Rudolff [1553]) y en francés «nombre cossique». Se supone que, al traducir el término árabe «chai» al castellano, se denominó «xai» y éste pudo ser el origen de la designación de la primera incógnita de una ecuación como «x».
14. Marco Aurel, en la introducción de este libro, asegura: «Assi que por se cosa nueua la que trato y jamas vista, ni declarada, y podra ser que ni aun entendida, ni imprimida en España, me he atrevido a tratarla, y escribirla en lengua tan por entero repugnante ala mia» [AUREL, 1552, introducción no paginada].

De la biografía de Marco Aurel, según asegura Rey Pastor [1934], sólo se sabe que en 1541 era maestro de escuela en Valencia.

15. Estas notaciones no son originales de Pérez de Moya, ya las empleaba Marco Aurel y matemáticos que él cita y en los que dice basarse: Leonardo de Pisa, Juan de MonteRegio, Cardano, Pedro Nuñez [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 589].
16. Aún perviven, en nuestra cultura escolar, restos de esta asociación. Así, seguimos diciendo: «*equis al cuadrado*» o bien «*equis al cubo*» en la lectura de expresiones, tales como: x^2, x^3, cuando podríamos decir «*equis a la segunda*» o bien «*equis a la tercera*», de modo análogo a como leemos x^4: «*equis a la cuarta*» y todas las sucesivas potencias de x.
17. Para Descartes, el *censo* (el actual x^2) no sugería el área de un cuadrado de lado x, sino la longitud de un segmento de recta, cuarto término de la proporción $1:x = x: x^2$, que representaba aplicando sencillamente el teorema de Thales.
18. En estas tablas empleamos la notación algebraica actual para hacer más comprensible el proceso seguido por el Bachiller.
19. Pérez de Moya denomina números sordos «a los numeros superficiales que no tienen rayz dable en numeros, assi como 12, 10 y otros semejantes, de los quales no se dara numeros que sirua de sus rayzes. Quiero decir que no aura numero q(ue) multiplicado por si mismos haga 12, ni 10» [PÉREZ DE MOYA, 1573, p. 14].
20. Para la segunda igualación, sencillos razonamientos, a partir de las relaciones de Cardano-Vieta, permiten demostrar que, salvo el caso de una solución doble (que será $x=b/2$, que Pérez de Moya no considera), esta ecuación siempre tiene discriminante positivo, dos soluciones positivas y distintas y que las dos soluciones x_1 y x_2 tienen que sumar b, por lo que una de ellas debe ser menor que $b/2$ (primera suposición) y la otra mayor que $b/2$ (segunda suposición).

BIBLIOGRAFÍA

ARTIGUE, M. (1991) «Epistémologie et Didactique». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10* (2.3), 241-287.

AUREL, M. (1552) *Libro Primero de Arithmetica Algebratica.* Valencia, Casa de Ioan de Mey (Ejemplar depositado en la Biblioteca de la Universidad de Valencia).

BACHELARD, G. (1983) *La formación del espíritu científico.* Buenos Aires, Siglo XXI (Edición original, 1948).

BEBBOUCHI, R. (1996) «La symbolique mathématique comme obstacle épistémologique». En: E. Barbin (ed) *Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques*. Besançon, Université de Franche-Comté, 441-447.

BOYER, C. (1986) *Historia de las Matemáticas*. Madrid, Alianza Universidad.

BROUSSEAU, G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble, La Pensée Sauvage.

CABALLERO VENZALÁ, M. (1993) *Semblantes en la niebla.* Jaén, Instituto de Estudios Giennenses.

CATALOGUE OF BOOKS PRINTED IN THE XVth CENTURY NOW IN THE BRITISH MUSEUM (1971) Part IX and Part X. London.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble, La Pensé Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1992) «Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportés pour une approche anthropologique». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1),* 73-112.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (1997) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, ICE-Horsori.

CHEVALLARD, Y. (1999) «L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221- 266.

CHEVALLARD, Y. (2007) «Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique». En: Ruiz-Higueras, Estepa y García (eds) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 705-747.

CHICA ARELLANO, F. (1999) «Juan Pérez de Moya en su vertiente de orador sagrado». *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses, 171*, 147-198.

DAUMAS, D.; GUILLEMOT, M. (1993) «Faut-il toujours raison garder?». En: E. Barbin (ed.) *Histoire des problèmes, histoire des Mathématiques*. París, Marketing, 33-59.

DIEUDONNÉ, J. (1989) *En honor del espíritu humano. Las Matemáticas hoy.* Madrid, Alianza Universidad.

HIGUERAS MALDONADO, J. (1999) *Humanistas giennenses (s. XIV-XVIII)*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Jaén.

LEAL y LEAL, L. (1971-1972) «El Bachiller Juan Pérez de Moya». *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses, 70*, 17-36.

MENÉNDEZ PELAYO, M. (1953-1954) *La ciencia española*. Madrid, C.S.I.C., T.III. Recuperable en formato digital: *http://descargas.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/p260/35759397903917506300080/029354_0002.pdf*

NUÑEZ, P. (1567) *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometría.* En Anvers, En casa de la Biuda y herederos de Iuan Stelsio (Ejemplar depositado en la Biblioteca Nacional de Portugal).

PARADÍS, J. y MALET, A. (1989) *Los orígenes del Álgebra: de los árabes al Renacimiento.* Barcelona, PPU.

PÉREZ DE MOYA, J. (1562) *Arithmetica Practica y Specvlativa.* En Salamanca, Por Mathias Gast (Ejemplar depositado en la Biblioteca del Monasterio de San Lorenzo de El Escorial).

PÉREZ DE MOYA, J. (1573) *Tratado de Mathematicas en que se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural.* Alcalá, Juan Gracián (Ejemplar depositado en la Biblioteca de la Catedral de Baeza – Jaén).

RADFORD, L. (1995) «Before the others unknowns were invented: Didactics inquiries on the methods and problems of medieval Italian algebra». *For the Learning of Mathematics, 15(3)*, 28-38.

REY PASTOR, J. (1934) *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Madrid, Junta de Investigaciones Histórico-Bibliográficas. Recuperable en formato digital en: *http://www.ateneodemadrid.com/biblioteca_digital/libros/Libro-00004.pdf*

RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1987) «Presentación y notas». En: *Diálogos de la Arithmetica Practica y Specvlativa (1562)*. Universidad de Zaragoza, 1-20.

RUDOLFF, C. (1553) *Die Coss. Mit schönen Exempeln der Coss.* Durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt. Zu Königsperg in Preussen gedrückt durch Alexandrum Lutemyslensem im jar (Ejemplar depositado en la Biblioteca de la Universidad de Bielefeld). Recuperable en formato digital en: *http://www.ub.uni-bielefeld.de/diglib/rechenbuecher/coss/index.htm*

RUIZ HIGUERAS, L. (1998) *La noción de función. Análisis epistemológico y didáctico.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

RUSSEL, B. (1987) *La perspectiva científica*. Barcelona, Ariel.

SÁNCHEZ PÉREZ, J.A. (1929) *Las Matemáticas en la Biblioteca del Escorial*. Madrid, Imprenta de Estanislao Maestre.

SERFATI, M. (1987) «La question de la Chose». En: E. Barbin, (Ed.) *Histoire et épistémologie des Mathematiques: Les mathématiques dans la culture d'une époque,* pp. 309-335.

STEVIN, S. (1634) *Les ouvres mathematiques de Simon Stevin de Brugès; le tout augmenté par Albert Girad.* Leyde, Bonaventura & Abraham Elsevier (Ejemplar depositado en la Biblioteca Nacional de España). La edición original de Stevin data de 1585. Recuperable una transcripción digital en: *La Disme: http://www.xs4all.nl/~adcs/stevin/telconst/10sme.html*

VALLADARES REGUERO, A. (1997) «El Bachiller Juan Pérez de Moya: Apuntes bio-bibliográficos». *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses, 165*, 371-412.

VAN DER WAERDEN, B.L. (1985) *A History of algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether.* Berlin, Springer-Verlag.

VERGNAUD, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10, 2.3,* 133-170.

YOUSCHKEVITCH, A. (1976) *Les Mathématiques arabes: VIII-XV siècles.* París, Librairie Philosophique J. Vrin.