Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VIII No.1 (2001), pp. 46–54

NOTAS DE CLASE

ESTRUCTURA DIFERENCIAL NO CONMUTATIVA SOBRE UN ÁLGEBRA ENVOLVENTE UNIVERSAL

Berenice Guerrero (*)

Resumen. Presentamos dos métodos para construir estructuras diferenciales no conmutativas sobre un álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie $\mathcal{G}$. Un procedimiento consiste en cuantizar una estructura diferencial, previamente definida, sobre el álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. Otro procedimiento consiste en construir la estructura diferencial sobre el álgebra envolvente cuántica $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$ directamente. Los dos métodos están ligados en el límite y son ilustrados con ejemplos.

Palabras clave: Grupos cuánticos, álgebras de Hopf, geometría no conmutativa.

1. Introducción

Construir un cálculo diferencial sobre un álgebra envolvente universal cuántica es equivalente a determinar una geometría diferencial no conmutativa sobre un álgebra asociativa, (ver [3]).

Se sabe que sobre un álgebra dada se puede construir más de una estructura diferencial. Y también se sabe que sobre un álgebra asociativa arbitraria se puede construir al menos un cálculo diferencial, (ver [6]).

La estructura diferencial construida se denomina conmutativa o no conmutativa dependiendo de si el álgebra sobre la cual se construye el cálculo diferencial es conmutativa o no, (ver [6]).

Si $\mathcal{G}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, construir un cálculo diferencial sobre $\mathcal{G}$ significa construir un cálculo diferencial sobre su álgebra envolvente universal $\mathcal{U} = (U(\mathcal{G}))$ generada por $\mathcal{G}$, (ver [7]).

(*) Berenice Guerrero, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional-Sede Bogotá. e-mail: aguerrer@ciencias.ciencias.unal.edu.co, beregue@matematicas.unal.edu.co.

Algebra envolvente universal.
El álgebra envolvente universal, (ver [4]), $\mathcal{U} = (U(\mathcal{G}))$ se define como el álgebra asociativa que resulta del cociente del álgebra tensorial $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ por el ideal bilátero $\mathcal{I}$ generado por las relaciones

$$R(X,Y) = [X,Y] - X \otimes Y + Y \otimes X, \qquad X, Y \in \mathcal{G},$$

que satisface la propiedad universal expresada por medio del siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{T}(\mathcal{G}) \arrow[d] \\ & \mathcal{U}(\mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

Es importante resaltar que $\mathcal{U}$ es un álgebra de Hopf, es decir tiene estructura de álgebra, de co-álgebra y existe una aplicación antipodal de $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, (ver [4]).

Que sea un álgebra asociativa significa que es un espacio vectorial con un producto asociativo

$$m : \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \to \mathcal{U},$$

$$m \circ (I \otimes m) = m \circ (m \otimes I),$$

donde I es la aplicación idéntica, y con una unidad $i : \mathbb{C} \to \mathcal{U}$.

Que sea una co-álgebra significa que es un espacio vectorial complejo con un co-producto Δ asociativo

$$\Delta : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \otimes \mathcal{U},$$

$$(I \otimes \Delta) \circ (\Delta \otimes I) \circ \Delta,$$

y con una co-unidad ϵ

$$\epsilon : \mathcal{U} \to \mathbb{C}.$$

La aplicación antípoda es una aplicación lineal S

$$S : \mathcal{U} \to \mathcal{U},$$

la cual satisface la relación de compatibilidad

$$m \circ (I \otimes S) \circ \Delta = m \circ (S \otimes I) \circ \Delta.$$

Algebra de Hopf diferencial.
Un álgebra de Hopf diferencial es un álgebra de Hopf graduada $\Omega = \oplus \Omega^p$, equipada con un operador d, el cual es una derivación graduada de grado $+1$,

($d^2 = 0$), que satisface la propiedad de compatibilidad repecto a la estructura de álgebra de Hopf:

$$(d \otimes id + \tau \otimes d) \circ \Delta = \Delta \circ d, \qquad \epsilon \circ d = 0,$$

donde Δ es el co-producto, ϵ es la co-unidad de Ω y $\tau : \Omega \to \Omega$, tiene grado cero y satisface

$$\tau(a) = (-1)^p a \quad \text{para todo } a \in \Omega.$$

Cálculo diferencial sobre $(U(\mathcal{G}))$.
Un cálculo diferencial sobre el álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, (ver [11]), es una álgebra de Hopf diferencial $(\Omega,\ d)$, donde Ω es generado por $\Omega^0 = \mathcal{U}(\mathcal{G})$ y por las diferenciales $d(\Omega^0)$,

$$\Omega = \Omega^0 \cup d(\Omega^0).$$

2. Cálculo diferencial sobre el álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathcal{G})$

Dada un álgebra de Lie $\mathcal{G}$, podemos construir un álgebra de Lie generada por los elementos del álgebra y sus diferenciales. El álgebra envolvente universal de esta álgebra de Lie tiene estructura de álgebra de Hopf diferencial. El procedimiento es el siguiente:

Sea $\mathcal{G}$ un álgebra de Lie de dimensión finita n sobre un campo K y generada por los campos vectoriales $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, con corchete

$$[X_i, X_j] = c_{ij} X_k, \quad c_{ij} \quad \text{constantes de estructura de } \mathcal{G}.$$

Sean

$$dX_1 = \hat{X}_1, \ \ dX_2 = \hat{X}_1, \ \ldots \ dX_n \ = \hat{X}_n$$

las diferenciales de los elementos de la base de $\mathcal{G}$. Con los elementos de la base del álgebra $\{X_i\}$ y sus diferenciales $\{dX_i\}$ construimos el álgebra de Lie $\mathcal{L}$ definida por

$$\mathcal{L} = \oplus \mathcal{L}^p \quad \text{donde } \ \mathcal{L}^0 = \mathcal{G} = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle,$$

$$\mathcal{L}^1 = \langle \hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n \rangle \ \ \mathcal{L}^p = 0 \ \text{ para todo } p \geq 2.$$

Definimos el corchete de Lie sobre $\mathcal{L}$ de tal manera que su restricción a $\mathcal{L}^0$ es simplemente el corchete de Lie del álgebra de Lie $\mathcal{G}$, así:

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k \qquad \text{para} \qquad X_i, X_j \in \mathcal{L}^0$$

y para los elementos $\hat{X}_i$ definimos la aplicación lineal $d : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ por

$$dX_i = \hat{X}_i \quad y \quad d\hat{X}_i = 0 \ \text{ para } \ \text{todo} \ \ X_i \in \mathcal{L}, \ 1 \leq i \leq dim(\mathcal{G}),$$

de donde d es una derivación graduada de grado $+1$, es decir satisface

$$d[X, Y] = [dX, Y] + (-1)^p [X, dY] \ \text{ para } \ X \in \mathcal{L}^p, \ Y \in \mathcal{L}.$$

Entonces el corchete de Lie sobre los elementos de $\mathcal{L}$ está dado por

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k, \quad [X_i, \hat{X}_j] = a_{ij}^k \hat{X}_k \quad [\hat{X}_i, \hat{X}_i] = 0.$$

Por ser $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie existe el álgebra envolvente universal de $\mathcal{L}$. Sobre el álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ podemos definir una estructura de álgebra de Hopf. El álgebra de Hopf diferencial $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ representa el cálculo diferencial sobre el álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

El operador d extendido sobre $\Omega = \mathcal{U}(\mathcal{L})$ está definido como la única derivación graduada que extiende al operador d definido sobre $\mathcal{L}$.

3. Cáculo diferencial sobre el álgebra envolvente cuántica

Dada un álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ de un álgebra de Lie $\mathcal{G}$, su álgebra cuántica $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$ se obtiene deformando las operacions que le dan una estructura de álgebra de Hopf co-Poisson, (ver [3] y [5]).

Un álgebra Hopf co-Poisson $\mathcal{U}$ es un álgebra de Hopf $(\mathcal{U}, \Delta, \epsilon, S)$ en la cual está definido un co-corchete de Poisson, es decir, existe una aplicación

$$\delta : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$$

que satisface la identidad de co-Jacobi, la identidad de co-Leibniz y la compatibilidad con el co-producto Δ y además $(\mathcal{U}(\mathcal{G}), \ \delta, \ \Delta, \epsilon, S)$ tiene estructura de biálgebra con el co-corchete δ, (ver [2] y [12]).

Una cuantización del álgebra envolvente es una deformación de la estructura de álgebra de Hopf co-Poisson por medio de un parámetro h de tal forma que el nuevo espacio

$$(\mathcal{U}_h(\mathcal{G}), \ \delta, \ \Delta_h, \epsilon_h, S_h)$$

tenga estructura de álgebra de Hopf y satisfaga la condición de que en el límite cuando $h \to 0$, se recupere la estructura de biálgebra de Lie de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ inducida por δ.

Un cálculo diferencial sobre el álgebra cuántica $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$ consta de un álgebra de Hopf diferencial (Ω_h, d_h) generada por

$$\Omega_h^0 \cup d_h(\Omega_h^0) \qquad \text{con} \qquad \Omega_h^0 = \mathcal{U}_h(\mathcal{G})$$

y de un operador diferencial d_h definido sobre Ω_h.

4. Nexos entre las dos estructuras diferenciales.

La relación evidente que puede existir entre el cálculo diferencial (Ω_h, d_h) y el álgebra de Hopf graduada $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ es que la primera sea una cuantización de la segunda.

Con el fin de que el cálculo diferencial (Ω_h, d_h) sea una cuantización de $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ se debe cumplir que en el límite, cuando $h \to 0$, el álgebra Ω_h coincida con $\mathcal{U}(\mathcal{L})$, siendo $\mathcal{L}$ el álgebra de Lie definida en 2., como extensión del álgebra de Lie $\mathcal{G}$, y que d_h coincida con el operador diferencial d de $\mathcal{U}(\mathcal{L})$, (ver [11]).

Entonces si (Ω_h, d_h) es una deformación del álgebra de Hopf diferencial $(\mathcal{U}(\mathcal{L}), d)$, el álgebra cuántica (Ω_h, d_h) es un álgebra de Hopf diferencial y es un cálculo diferencial del álgebra envolvente cuántica $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$.

Si $(\mathcal{G}, \delta)$ es una biágebra de Lie, y si $(\mathcal{U}(\mathcal{L}), d)$ representa el cálculo diferencial sobre el álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, entonces la biálgebra de Lie puede extenderse a una biálgebra de Lie $(\mathcal{L}, \delta_{\mathcal{L}})$

$$\delta_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}.$$

En ese caso decimos que el cálculo diferencial sobre $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ y la biálgebra de Lie $(\mathcal{G}, \delta)$ son compatibles si $(\mathcal{L}, \delta_{\mathcal{L}})$ es una biálgebra de Lie como extensión de la biálgebra $(\mathcal{G}, \delta)$, y esto se cumple, si y sólo si,

$$\delta_{\mathcal{L}} \circ d = d \circ \delta_{\mathcal{L}}.$$

Esta es una condición necesaria y suficiente para obtener un cálculo diferencial sobre $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$ partiendo de un cálculo diferencial sobre $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, (ver [11]).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U}(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{U}_h(\mathcal{G}) \arrow[d, dashed] \\
\mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{U}(\mathcal{L}) \arrow[r] & \Omega_h
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{G}$ álgebra de Lie
$\mathcal{U}(\mathcal{G})$ álgebra envolvente universal de $\mathcal{G}$
$\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$ cuantización de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$
$\mathcal{L}$ álgebra de Lie, extensión del álgebra $\mathcal{G}$
$\mathcal{U}(\mathcal{L})$ estructura diferencial de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$
Ω_h estructura diferencial de $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$
Ω_h cuantización de $\mathcal{U}(\mathcal{L})$

5. Ejemplo

Sea $\mathcal{G}$ el álgebra de Lie de las matrices triangulares superiores de orden 2×2 con traza nula

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix},$$

generada por los campos vectoriales X_1, X_2, donde $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ y $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, con conmutador

$$[X_1, X_2] = -2X_2, \quad [X_i, X_j] = 0 \; i = j.$$

Introducimos las diferenciales

$$dX_1 = \hat{X}_1, \qquad dX_2 = \hat{X}_2$$

y definimos $\mathcal{L}$ extensión del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ como el álgebra de Lie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 \oplus \mathcal{L}^1 \text{ con } \mathcal{L}^0 =< X_1, X_2 >, \quad \mathcal{L}^1 =< \hat{X}_1, \hat{X}_2 >$$

con conmutador

$$[X_1, X_2]_{\mathcal{L}} = -2X_2, \quad [X_i, X_j]_{\mathcal{L}} = 0 \; i = j,$$

$$[\hat{X}_1, X_2]_{\mathcal{L}} = -\hat{X}_2, \; [\hat{X}_2, X_1]_{\mathcal{L}} = \hat{X}_2, \quad [\hat{X}_i, \hat{X}_j]_{\mathcal{L}} = 0 \; i = j.$$

5.1 Algebra envolvente universal de $\mathcal{G}$.
El álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ tiene estructura de álgebra de Hopf con las operaciones co-producto Δ, co-unidad ϵ y antípoda S y además el co-conmutador δ completa la estructura de álgebra de Hopf co-Poisson definidas por,

$$\begin{aligned}
\Delta(X_i) &= X_i \otimes I + I \otimes X_i, \quad i = 1, 2, \quad X_i \in \mathcal{G} \\
\epsilon(X_i) &= 0, \qquad X_i \in \mathcal{G}, \\
S(I) &= I, \qquad S(X_i) = -X_i, \qquad X_i \in \mathcal{G}, \\
\delta(X_1) &= 2(X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1), \\
\delta(X_2) &= 0
\end{aligned}$$

y extendidas a los elementos del álgebra $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, (ver [8]).

5.2 Cálculo diferencial sobre $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.
Como ya dijimos, un cálculo diferencial sobre $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ está determinado por el álgebra envolvente universal del álgebra de Lie $\mathcal{L}$. Es decir, por el álgebra de Hopf graduada $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ con un operador diferencial d de grado 1, $d^2 = 0$, que satisface las propiedades de compatibilidad siguientes:

$$(d \otimes id + \tau \otimes d) \circ \Delta = \Delta \circ d, \; \epsilon \circ d = 0, \; S \circ d = d \circ S. \tag{1}$$

Sabemos que el álgebra $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ es el cociente del álgebra asociativa tensorial

$$\mathcal{T}(\mathcal{L}) = \oplus(\otimes\mathcal{L}),$$

dividido por el ideal bilátero $\mathcal{I}$ generado por las relaciones determinadas por el conmutador de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
X_1X_2 - X_2X_1 &= -2X_2,\\
\hat{X}_1X_2 - X_2\hat{X}_1 &= -\hat{X}_2,\\
\hat{X}_2X_1 - X_1\hat{X}_2 &= \hat{X}_2.
\end{aligned}$$

Por (1) la estructura de álgebra de Hof está determinada por las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
\Delta(X_i) &= X_i \otimes I + I \otimes X_i, \quad i = 1, 2,\\
\Delta(\hat{X}_i) &= \hat{X}_i \otimes I + I \otimes \hat{X}_i, \quad i = 1, 2,\\
\epsilon(X_i) &= 0, \qquad \epsilon(\hat{X}_i) = 0,\\
S(X_i) &= -X_i, \quad S(\hat{X}_i) = -\hat{X}_i, \qquad X_i, \hat{X}_i \in \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

La diferencial d sobre $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ es la única derivación graduada que extiende el operador d definido sobre $\mathcal{L}$.

El álgebra de Hopf graduada $(\mathcal{U}(\mathcal{L}), d)$ es el cálculo diferencial del álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

5.3 Cálculo diferencial sobre el álgebra cuántica.
El álgebra cuántica es una deformación del álgebra de Hopf co-Poisson $(\mathcal{U}(\mathcal{G}), \delta)$ por medio de un parámetro h

$$(\mathcal{U}_h(\mathcal{G}), \Delta_h, \epsilon_h, S_h, \delta),$$

de tal forma que $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$ sea un álgebra de Hopf y en el límite clásico, $h \to 0$, el álgebra $(\mathcal{G}, \delta)$ recupere la estructura de biálgebra de Lie.

La estructura de álgebra de Hopf de la deformación $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$ está determinada por el conmutador, el co-producto Δ_h, la co-unidad ϵ_h y la aplicación antípoda S_h definidas por las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2]_h &= 2\frac{e^{hX_2} - e^{-hX_2}}{e^h - e^{-h}},\\
\Delta_h(X_1) &= X_1 \otimes e^{hX_2} + e^{-hX_2} \otimes X_1,\\
\Delta_h(X_2) &= X_2 \otimes I + I \otimes X_2,\\
\Delta_h([X_1, X_2]) &= [X_1, X_2] \otimes e^{hX_2} + e^{-hX_2} \otimes [X_1, X_2],\\
\epsilon_h(X_1) &= \epsilon_h(X_2) = 0,\\
S_h(X_1) &= -e^{hX_2}X_1e^{-hX_2},\\
S_h(X_2) &= S(X_2) = -X_2.
\end{aligned}$$

Partiendo del álgebra cuántica $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$ introducimos los elementos $d_hX_1 = \hat{X}_1,\ d_hX_2 = \hat{X}_2$ y definimos $\Omega_h = \Omega_h^0 \oplus \Omega_h^1$ donde

$$\Omega_h^0 = \mathcal{U}_h(\mathcal{G}), \qquad \Omega_h^1 = d_h(\Omega_h^0) = d_h(\mathcal{U}(\mathcal{G})),$$

con el operador d_h compatible con las operaciones de álgebra de Hopf del álgebra cuántica $\mathcal{U}_h(\mathcal{G})$. Entonces usando (1) las operaciones sobre Ω_h resultan definidas así:

$$\begin{aligned}
\Delta_h(\hat{X}_1) &= \hat{X}_1 \otimes e^{hX_2} + e^{-hX_2} \otimes X_1 \\
&\quad + X_1 \otimes he^{hX_2}\hat{X}_2 - he^{-hX_2}\hat{X}_2 \otimes X_1, \\
\Delta_h(\hat{X}_2) &= \hat{X}_2 \otimes I + I \otimes \hat{X}_2, \\
[\hat{X}_1, X_2] &= h\hat{X}_2 \frac{e^{hX_2} + e^{-hX_2}}{e^h - e^{-h}}, \\
[\hat{X}_2, X_1] &= -h\hat{X}_2 \frac{e^{hX_2} + e^{-hX_2}}{e^h - e^{-h}}, \\
\Delta_h([\hat{X}_1, X_2]) &= [\hat{X}_1, X_2] \otimes e^{hX_2} + e^{hX_2} \otimes [\hat{X}_1, X_2] \\
&\quad + [X_1, X_2] \otimes h\hat{X}_2 e^{hX_2}, \\
\Delta_h([\hat{X}_2, X_1]) &= [\hat{X}_2, X_1] \otimes e^{hX_2} + e^{-hX_2} \otimes [\hat{X}_2, X_1],
\end{aligned}$$

$$\epsilon_h(\hat{X}_i) = 0, \qquad i = 1, 2,$$
$$S_h(\hat{X}_1) = -he^{hX_2}[\hat{X}_2, X_1]e^{-hX_2}, \qquad S_h(\hat{X}_2) = -\hat{X}_2.$$

5.4 Cuantización del cálculo diferencial $\mathcal{U}(\mathcal{L})$.
Sobre $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ también podemos determinar la estructura de álgebra de Hopf co-Poisson. Basta extender el co-conmutador δ a los elementos de $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ con la condición de compatibilidad

$$\delta = (d \otimes id + \tau \otimes d) \circ \delta,$$

el cual quedá definido por las igualdades

$$\begin{aligned}
&\delta(X_1) = 2(X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1), \\
&\delta(X_2) = 0, \qquad \delta(\hat{X}_2) = 0, \\
&\delta(\hat{X}_1) = 2(\hat{X}_1 \wedge X_2 + X_1 \wedge \hat{X}_2).
\end{aligned}$$

El co-conmutador δ determina una estructura de biálgebra de Lie sobre $\mathcal{L}$. Gracias a esta estructura es posible cuantizar el álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ de tal manera que la deformación $\mathcal{U}_h(\mathcal{L})$ tenga estructura de álgebra de Hopf y que en el límite cuando $h \to 0$ se recupere la estructura de biálgebra de Lie de $\mathcal{L}$.

Si consideramos el cálculo diferencial $(\Omega_h, \Delta_h, \epsilon_h)$ construido en el numeral 4.3, observamos que en el límite clásico, $h \to 0$, se recupera la estructura del álgebra de Hopf graduada $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ del numeral 4.2, y la de biálgebra de Lie de $\mathcal{L}$. Es decir, el cálculo diferencial $(\Omega_h, \Delta_h, \epsilon_h, S_h)$ es una cuantización del cálculo diferencial $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ del álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

Bibliografía

[1] G.E. Arutyunov and P.B. Medvedev, *Quantization of the external algebra on a Poisson-Lie group*, hep-th/9311096, Nov. (1993), 1–20.

[2] V. Chari and A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge University, 1994

[3] A. Connes, *Géométrie non commutative*, InterEditions 1990, 1997.

[4] J. Dixmier, *Enveloping algebras*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 11, American Mathematical Society, 1996.

[5] V. Drinfeld, *Quantum groups*, ICM-86, Academic Press, pp. 798-820, 1986.

[6] P. Etingof and D. Kazhdan, *Quantization of Poisson algebraic groups and Poisson homogeneous spaces*, q-alg 9510020, (1995), 1–9.

[7] N. van den Hiligenberg, R Martini and G.F.Post, *Quantization of differential calculi on universal enveloping algebras*, J. Math. Physics **37**-8 (1997), 101–122.

[8] B. Guerrero, *Sobre una estructura diferencial cuántica*, Revista Colombiana de Matemáticas **32**-2 (1998), 101–122.

[9] J.H Lu and A. Weinstein, *Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat descompositions*, J. Differential Geometry, **31** (1990), 501–526.

[10] J. Madore, *An introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, Cambridge University Press, 1999.

[11] R. Martin and P.H.M. Kersten, *Differential Calculus on Universal Enveloping Algebras of Lie Algebras*, Memorandum 1261, University of Twente, Enschede, 1995.

[12] S. Majid, *Fundations of Quantum Group Theory*, Cambridge University Press, 1995.