Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VIII No. 1 (2001), pp. 1–7

LOS DIAGRAMAS DE LA MATEMÁTICA Y LA MATEMÁTICA DE LOS DIAGRAMAS

ARNOLD OOSTRA(*)

Abstract. Some remarks on the role of diagrams in mathematics.

Resumen. Algunas reflexiones sobre el papel de los diagramas en la matemática.

Key words: Diagram; notation; semiotics; category theory; C. S. Peirce.

Palabras clave: Diagrama; notación; semiótica; teoría de categorías; C. S. Peirce.

Hace unos mil años, a fines del siglo X, un personaje europeo viajaba por el norte de España que a la sazón estaba bajo dominio árabe. En ese periplo conoció una escritura para los números distinta a la que había sido impuesta por los romanos más de mil años antes y que aún se usaba en toda Europa occidental. En el año 999 este personaje llegó a ser el papa Silvestre II, pero no utilizó la influencia que ello le confería con el fin de divulgar la notación arábiga: para ello se requerirían unos 450 años y los esfuerzos de matemáticos como Leonardo de Pisa (Fibonacci) quien en 1202 publicó un tratado dedicado a estos símbolos nuevos. Pues la superioridad de esta notación no consiste en

(*) Arnold Oostra, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima. e-mail: oostra@bunde.tolinet.com.co.

los símbolos empleados sino en sus propiedades, que sólo se evidencian al hacer cálculos aritméticos con ellos [11, 29].

Puede considerarse que los símbolos son casos particulares de la familia más amplia de los diagramas. Según el ejemplo anterior, a veces coexisten diagramas distintos que representan lo mismo. Las diferencias de fondo entre los diagramas diversos puede no ser evidente, lo cual conduce a la pregunta: ¿Qué propiedades caracterizan un 'buen' diagrama?

1. ¿Qué es un diagrama?

Los diagramas son ubicuos en toda actividad humana y, por lo tanto, en la ciencia. En casi cualquier texto de biología, química, física o matemáticas pueden encontrarse ejemplos de símbolos y de diagramas. Pero son tan dispares que resulta difícil, si no imposible, dar una definición precisa que los abrigue a todos.

Un diagrama podría describirse, de manera muy amplia, como una representación plana no lingüística elaborada con el fin de aclarar un texto. Así, la presencia de un diagrama supone la existencia de algo que éste representa y de un contexto lingüístico en el cual está inserto [12]. Esta caracterización es abierta y esencialmente vaga, pero por una parte incluye ejemplos paradigmáticos y por otra es susceptible de precisiones diversas en contextos diferentes. Una situación similar se encuentra al querer definir 'juego' o 'demostración' [21, 25].

2. ¿Los diagramas pueden ser necesarios?

Uno de los paradigmas en el uso de diagramas lo constituye *Elementos*, de Euclides. Casi cada proposición va acompañada de un diagrama; en la prueba de muchas el diagrama sirve de guía; la prueba de algunas no puede desprenderse del diagrama propuesto por el alejandrino [8].

Con el correr del tiempo, en la historia de la matemática puede distinguirse un proceso de desvisualización. Comenzó con Descartes en el siglo XVII quien hizo corresponder una ecuación algebraica a cada curva; en la misma época nace la geometría proyectiva, que toma fuerza a comienzos del siglo XIX y en la cual ocupan un lugar importante objetos no graficables como el punto en el infinito; a mediados del mismo siglo XIX aparecen las geometrías no euclidianas; este descubrimiento transforma la geometría hasta el punto de convertirla en un estudio de sistemas deductivos, propuesta cristalizada en *Fundamentos de la Geometría*, de Hilbert (1899), un texto de geometría en el cual los diagramas pueden eliminarse sin que la argumentación pierda sentido ni rigor [1, 14]; a fines del siglo XIX se estudiaron por primera vez las curvas fractales; en el siglo XX la matemática quedó sellada con el formalismo de la escuela Bourbaki, "de quien podría decirse que escribió mil páginas sin un solo diagrama" (V. I. Arnold, citado por Davis [4]).

Este proceso ha conducido a una actitud de desconfianza y hasta de culpabilidad en el uso de los diagramas en matemáticas, llegándose a aceptar ideas como las siguientes: el ojo es un engañador, no se puede creer en lo que se ve; lo único fiable es una demostración textual rigurosa; la verdad no puede encontrarse en una imagen visual.

Con este consenso tácito contrastan las afirmaciones de importantes matemáticos y pensadores.

- Aristóteles: "El alma nunca piensa sin una imagen mental" [26].
- J.-L. Lagrange: "La importancia, para el matemático, de la facultad de observación" [4].
- K. F. Gauss: "La matemática es la ciencia del ojo" [4].
- J. J. Sylvester: "La mayoría si no todas las grandes ideas modernas en matemática tienen su origen en la observación" [4].
- C. S. Peirce: "El pensamiento creativo se debe a la manipulación mental de diagramas. Pienso con diagramas visuales, nunca con palabras" [15].
- D. Hilbert: "Las figuras geométricas son fórmulas gráficas y ningún matemático podría prescindir de su uso" [13].

De hecho, el desarrollo de diversas teorías se ha visto afectado de manera decisiva por los diagramas y símbolos empleados. El cambio de la notación romana a la arábiga para los números propició el origen del álgebra y el renacer de la matemática investigativa en Europa occidental; aunque Newton haya descubierto primero el cálculo, la notación de Leibniz para las derivadas e integrales es mucho más sugestiva, se emplea de manera casi universal y ayuda a la solución de problemas; la teoría de la relatividad sería imposible sin la notación tensorial; uno de los creadores de la teoría matemática de categorías sostiene que una notación (la de flecha para la función) condujo a un concepto (el de categoría) [18, 26].

Fuera de la matemática pueden citarse ejemplos aún más contundentes. ¿Cómo describir de manera verbal toda la información contenida en un mapa? El resultado sería un discurso ininteligible cuyo uso sería complicado en extremo. Y los mapas son útiles: Guillermo de Baskerville y su ayudante Adso resolvieron el misterio de la biblioteca elaborando un diagrama de la misma [7]. ¿Cómo es posible reproducir melodías y sinfonías compuestas siglos antes de las grabaciones electrónicas? Mediante ciertos diagramas y símbolos. De otro lado, en la ingeniería no es posible sobrestimar la utilidad de los diagramas de circuitos electrónicos y de los diagramas de flujo.

3. ¿Los diagramas pueden ser suficientes?

La desvisualización de la matemática la ha hecho caer en una falacia. Pues el hecho de que cierto diagrama conduzca a conclusiones equivocadas no implica que todos los diagramas lleven a errores y que, por lo tanto, debe desterrarse toda representación visual. Lo que implica, más bien, es que algunos diagramas están elaborados o interpretados de manera incorrecta. Si se describiera con precisión cierto tipo de diagramas y se especificaran para ellos reglas de formación y de transformación (gramática o sintaxis) y una interpretación (significado o semántica), nunca se llegaría a conclusiones erróneas.

En la matemática ya hay ejemplos de tales desarrollos. Uno es la mencionada teoría de categorías, cuyo tema es todo lo que puede expresarse con flechas: según sus fundadores, ella se inicia con la observación de que muchas propiedades de sistemas matemáticos pueden unificarse y simplificarse mediante una presentación con diagramas de flechas [17, 18].

Así, en primer lugar la teoría de categorías es un lenguaje unificador que permite expresar conceptos muy generales allende las fronteras artificiales entre las ciencias, que permite precisar analogías percibidas antes sólo de manera muy tenue y que aún permite transportar problemas y soluciones de un contexto a otro. Poco después de su creación la teoría de categorías trascendió el carácter de *abstract nonsense* al concebir el proyecto audaz de elaborar una fundamentación categórica para toda la matemática, sustituyendo la pertenencia de conjuntos por la composición de flechas. Los dividendos han sido magníficos: se construyeron categorías que constituyen modelos para la independencia de la hipótesis del continuo y del axioma de elección; para la topología y la lógica intuicionistas; para el cálculo lambda y la tesis de Church; para las construcciones de los números reales y el cálculo con infinitesimales [19, 20]. Aún así, la teoría de categorías ha podido independizarse como una ciencia con sus propias preguntas y soluciones pero que nunca ha renunciado a sus raíces, pues en ella a todo nivel pueden elaborarse demostraciones rigurosas empleando únicamente diagramas [9].

Aunque menos conocido, otro ejemplo espectacular del poder de los diagramas bien manejados es el sistema de Gráficos Existenciales debido a C. S. Peirce. Precisando en cada caso reglas de formación, de interpretación y de transformación de los gráficos se obtienen, entre otras, versiones diagramáticas del cálculo proposicional, del cálculo de predicados y de cálculos modales entre los que se cuentan S_4 y S_5. Cabe destacar que las pocas reglas para estas lógicas gráficas son homogéneas en el sentido de que las variaciones de un subsistema a otro son mínimas y naturales [12, 23, 24, 27, 28, 30].

Así pueden entrar los diagramas al álgebra y a la lógica, las más abstractas de las ciencias matemáticas y en las que el uso de los dibujos es menos común.

4. ¿Cuáles son los mejores diagramas?

En primer lugar, puede pedirse que un diagrama sea claro, por lo menos más sencillo que aquello que representa. En caso contrario sucedería como en un país del cual tuvo noticia Lewis Carroll [2]:

> “Qué cosa tan útil es un mapa de bolsillo” anoté.

> "Esa es otra cosa que hemos aprendido de *su* nación," dijo Mein Herr, "la hechura de mapas. Pero la hemos llevado mucho más lejos que *ustedes*. ¿Cuál considera usted el *mayor* mapa que sería realmente útil?"
>
> "Cerca de seis pulgadas por milla."
>
> "¡Sólo *seis pulgadas*!" exclamó Mein Herr. "Nosotros pronto llegamos a seis *yardas* por milla. Luego intentamos *cien* yardas por milla. ¡Y luego surgió la idea más grandiosa de todas! ¡De hecho hicimos un mapa del país, en la escala de *una milla por milla*!"
>
> "¿Lo han usado mucho?" inquirí.
>
> "Nunca ha sido extendido aún," dijo Mein Herr: "los campesinos objetaron: ¡dijeron que cubriría todo el país y no dejaría entrar la luz del sol! Así que ahora usamos el país mismo, como su propio mapa, y le aseguro que funciona casi igual de bien".

En segundo lugar, se espera que exista una correspondencia o isomorfismo entre el diagrama y la situación que representa, de suerte que en la sintaxis del diagrama se reflejen las propiedades de lo representado. Cuanto más fuerte es el isomorfismo, tanto mejor será el diagrama. Leibniz anotó al respecto: "En los símbolos se observa una ventaja para el descubrimiento que es máxima cuando ellos expresan la naturaleza exacta de una cosa de manera concisa y, como si fuera, la dibujan; cuando eso sucede, en efecto, la labor del pensamiento se ve disminuida maravillosamente" [16]. Esto explica en parte la superioridad de la notación arábiga sobre la romana: los dígitos que representan un número corresponden a los cocientes que se obtienen al dividirlo entre potencias de diez.

Los diagramas ideales se obtienen cuando el isomorfismo anterior permite ver en ellos las transformaciones de lo representado y sus interacciones con otras situaciones. De nuevo, un buen ejemplo es la notación arábiga, que se presta de manera perfecta para realizar cálculos aritméticos. Otro ejemplo notable de un sistema diagramático con estas características es la notación de C. S. Peirce para los dieciséis conectivos binarios [3, 10, 29].

5. Propuestas

- Como estudiantes y docentes de matemáticas deberíamos pensar mejor y con más detenimiento en los símbolos, notaciones y diagramas que empleamos. Por ejemplo, la notación de Leibniz de las derivadas parece más indicada para los cursos de ingeniería y de física mientras que la de Newton es más sugestiva para los estudiantes de matemáticas.
- En matemáticas se debería revaluar a fondo el papel de los diagramas en las demostraciones. Una demostración textual es, en muchos casos, una posible formalización parcial de un diagrama impreciso. Quizás hay

otras formalizaciones, tal vez gráficas, en las cuales no se pierde la idea presentada en el diagrama.

- Una discusión sobre el concepto, el significado y las cualidades deseables de los diagramas abre las puertas a la ciencia de los diagramas: a un estudio general de las representaciones (lógica) o, más amplio aún, a un estudio general de los signos (semiótica). Referencia obligada en tal investigación es el legado del padre de la semiótica moderna, Charles S. Peirce. [22, 31].

Bibliografía

[1] Alberto Campos, *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, editor: Alberto Campos, Bogotá, 1994.

[2] Lewis Carroll, *Sylvie and Bruno Concluded*, in: The Complete Works of Lewis Carroll, Penguin Books, London, 1988.

[3] Glenn Clark, *New light on Peirce's iconic notation for the sixteen binary connectives*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997), 304–333.

[4] Philip J. Davis, *Visual theorems*, Educational Studies in Mathematics **24** no. 4 (1993), 333–344.

[5] Raymond Duval, *Semiosis y noesis*, Lecturas en Didáctica de la Matemática – Escuela Francesa, CINVESTAV-IPN, México (1993), 118–144.

[6] Raymond Duval, *Semiosis y Pensamiento Humano*, Universidad del Valle, Cali, 1999.

[7] Umberto Eco, *El Nombre de la Rosa*, Lumen, Barcelona, 1982.

[8] Euclides, *Elementos*, traducción de María Luisa Puertas Castaños, Planeta DeAgostini, Madrid, 1996.

[9] Peter J. Freyd and Andre Scedrov, *Categories, Allegories*, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[10] Mireya García, Jhon Fredy Gómez y Arnold Oostra, *Simetría y Lógica: La notación de Peirce para los 16 conectivos binarios*, Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá (2001), 1–26.

[11] Martin Gardner, *Miscelánea Matemática*, Biblioteca Científica SALVAT, Barcelona, 1987.

[12] Eric M. Hammer, *Logic and Visual Information*, Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University, Stanford, 1995.

[13] David Hilbert, *Problemas Matemáticos*, Conferencia ante el Congreso Internacional de Matemáticos, París, 1900.

[14] David Hilbert, *Fundamentos de la Geometría*, reimpresión de la traducción por Francisco Cebrián (1953) a la séptima edición en alemán (1930), Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1996.

[15] Beverley Kent, *The interconnectedness of Peirce's diagrammatic thought*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997), 445–459.

[16] Frederick C. Kreiling, *Leibniz*, in: Morris Kline (Ed.), *Mathematics: An Introduction to its Spirit and Use*, W. H. Freeman, San Francisco (1978), 33–38.

[17] F. William Lawvere and Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[18] Saunders MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag, New York, 1971.

[19] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[20] Ieke Moerdijk and Gonzalo E. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[21] Arnold Oostra, *Perspectivas diversas de la demostración matemática*, Notas de Matemática y Estadística **39** (1999), 1–6.

[22] Charles Sanders Peirce, *What is a sign?* (1894).

[23] Don D. Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, Mouton, The Hague, 1973.

[24] Pierre Thibaud, *La Lógica de Charles Sanders Peirce: Del Álgebra a los Gráficos*, Paraninfo, Madrid, 1982.

[25] Luis Vega, *Matemáticas y demostración: las vicisitudes actuales de una antigua liaison*, en: Alejandro Garciadiego, Francisco Rodríguez Consuegra y Luis Vega (Fernando Zalamea, Ed.), *El Velo y la Trenza*, Editorial Universidad Nacional, Bogotá, (1997), 49–79.

[26] Hans Christian von Baeyer, *Nota bene*, The Sciences **39** no. 1 (1999), 12–15.

[27] Fernando Zalamea, *Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX*, Mathesis **9** (1993), 391–404.

[28] Fernando Zalamea, *Lógica Topológica: una introducción a los gráficos existenciales de Peirce*, XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.

[29] Shea Zellweger, *Untapped potential in Peirce's iconic notation*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997), 334–386.

[30] J. Jay Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*, Ph. D. dissertation, University of Chicago, 1964.

[31] J. Jay Zeman, *Peirce's Theory of Signs*, in: Thomas A. Sebeok (Ed.), *A Perfusion of Signs*, Indiana University Press, Bloomington (1977).