Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 2 (2003), pp. 92–109

UNA CONTRIBUCIÓN A LA TEORÍA DE MODELOS DE KRIPKE PARA EL INTUICIONISMO

JUAN ANDRÉS MONTOYA A. (*)

Resumen. Se estudia la semántica de Kripke para la lógica intuicionista. En primer lugar se encuentra una amplia clase de órdenes para los cuales el teorema sobre la existencia de modelos de Kripke de teorías intuicionistas consistentes es válido. Mediante una codificación de prehaces como estructuras clásicas se demuestra un teorema tipo Lowenheim-Skolem descendente y un teorema tipo Lowenheim-Skolem ascendente. Finalmente se introduce una construcción de ultraproductos para prehaces, se estudian sus propiedades elementales y se utilizan para probar algunos resultados parciales acerca de axiomatizabilidad de clases de prehaces.

Abstract. We study the Kripke semantics for intuitionistic logic. We found a large class of orders for which the theorem on the existence of Kripke models of intuitionistically consistent theorist is valid. By means of a codification of presheaves as classical structures a downward and a upward Lowenheim-Skolem theorem are proved. Finally we introduce a ultraproduct construction for presheaves, we study its elementary properties and use them to prove some partial results about the axiomatizability of classes of presheaves.

Palabras clave: prehaces, lógica intuicionista, forzamiento.

Key Words: presheaves, intuitionistic logic, forcing.

2000 Mathematics Subject Classifications: 03C65, 03H05.

El objetivo de este artículo es desarrollar las bases de una teoría de modelos [M2] para la clase de objetos conocidos como modelos de Kripke. Los modelos de Kripke son conjuntos o estructuras relacionales que varían continuamente sobre un orden, nosotros no introducimos una teoría de modelos original, usamos

(*) Juan Andrés Montoya A., Albert Ludwigs Universität Freiburg.
e-mail: jancaromo@yahoo.com
Agradecimientos al Profesor Xavier Caicedo.

como lógica, la lógica intuicionista y como noción de satisfacción el ya clásico forzamiento de Kripke.

El escrito presupone conocimientos básicos de lógica. El lector interesado puede empezar consultando [E].

0. LÓGICA INTUICIONISTA Y MODELOS DE KRIPKE

La lógica intuicionista surge a comienzos del siglo pasado como una respuesta a la lógica clásica, en la cual la noción de implicación codificada por el conectivo $\rightarrow$ presenta problemas para los intuicionistas, como que para todo par de proposiciones p y q se tenga que $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es una fórmula válida aunque el contenido de estas proposiciones no esté conectado de manera alguna. El hecho anterior es una consecuencia inmediata del principio de tercio excluso que no vale en la lógica intuicionista, en la cual es imposible probar esta extraña propiedad de la implicación material. La lógica intuicionista formalizada primero por Arend Heyting, codifica algunas de las ideas pioneras de su maestro Lutzen Brouwer, quien entre otras muchas cosas proponía una noción de implicación estricta mucho mas cercana a la noción intuitiva de consecuencia. Una axiomatización para la lógica intuicionista de predicados puede ser encontrada en muchos textos vea por ejemplo [VD].

Dado un conjunto parcialmente ordenado Σ, visto como categoría, y dado un vocabulario de primer orden τ, un $\tau - modelo\ de\ Kripke$ sobre Σ es un prehaz $F : \Sigma \rightarrow Est_\tau$ donde Est_τ es la categoría cuyos objetos son $\tau - estructuras$ y cuyas flechas son $\tau - homomorfismos$. Un $\tau - prehaz$ sobre Σ es simplemente un funtor de Σ en la categoría Est_τ de τ-estructuras y τ-morfismos. Aún siendo un objeto tan simple modela adecuadamente la noción de estructura variable. Un prehaz de conjuntos sobre un orden Σ es una estructura que evoluciona coherentemente sobre el orden Σ y es también un objeto de la categoría Set^Σ la cual es un $Topos$, es decir una categoría generalizada de conjuntos, la categoría de conjuntos y estructuras variables sobre Σ.

A lo largo del escrito a los conjuntos parcialmente ordenados los llamaremos simplemente órdenes. Es importante notar que una $\tau-$estructura clásica es un $\tau-$modelo de Kripke sobre un orden con un solo elemento, por lo que podemos considerar la lógica clásica, la lógica de estructuras clásicas, como un caso particular del intuicionismo, un caso límite en el espectro de posibles modos de variación, el caso de variación nula. Los modelos de Kripke son sólo un caso intermedio en el espectro de posibles variaciones, del que el caso más general parece ser el de prehaces sobre categorías generales, la semántica de prehaces sobre categorías es un tipo de semántica completa para el intuicionismo mas general que la de modelos de Kripke (vea [GH]).

1. TEORÍA CLÁSICA DE MODELOS DE PREHACES

Los desarrollos que presentamos a continuación corresponden a hechos bien conocidos en teoría de modelos del intuicionismo, todos ellos pueden encontrarse en la literatura usual (vea por ejemplo [G] o [VD]).

Sea $F{:}\Sigma \to Est_\tau$ un modelo de Kripke de $\tau - estructuras$.

Definición 1. Dado a en Σ, la $\tau-$estructura $F(a)$ es llamada la **fibra** sobre a. A esta estructura la denotaremos como F_a.

Definición 2. Dados elementos a y b de Σ, si $a \leq b$ entonces F_{ab}, la **función de transición** de la fibra F_a en la fibra F_b, es un $\tau-$homomorfismo, el cual corresponde a la flecha $F(a \leq b)$

Definición 3. Dados Σ un orden y F un $\tau - prehaz$ sobre Σ, definimos la relación de **forzamiento** de la siguiente manera:

1. Si $\alpha(x_1, ..., x_n)$ es atómica, $F \Vdash_a \alpha[a_1, ..., a_n]$ si y sólo si $F_a \models \alpha[a_1, ..., a_n]$, donde $a \in \Sigma$ y $a_1, ..., a_n \in F_a$
2. $F \Vdash_a \alpha \wedge \beta[a_1, ..., a_n]$ si y sólo si $F \Vdash_a \alpha[a_1, ..., a_n]$ y $F \Vdash_a \beta[a_1, ..., a_n]$.
3. $F \Vdash_a \alpha \vee \beta[a_1, ..., a_n]$ si y sólo si $F \Vdash_a \alpha[a_1, ..., a_n]$ o $F \Vdash_a \beta[a_1, ..., a_n]$.
4. $F \Vdash_a \urcorner\beta[a_1, ..., a_n]$ si y sólo si, para todo $b \geq a$ $F \nVdash_b \beta[F_{ab}(a_1), ..., F_{ab}(a_n)]$.
5. $F \Vdash_a \alpha \to \beta[a_1, ..., a_n]$ si y sólo si para todo $b \geq a$ si $F \Vdash_b \alpha[F_{ab}(a_1), ..., F_{ab}(a_n)]$, entonces $F \Vdash_b \beta[F_{ab}(a_1), ..., F_{ab}(a_n)]$.
6. $F \Vdash_a \exists x\beta(x, a_1, ..., a_n]$ si y sólo si existe $u \in F_a$ tal que $F \Vdash_a \beta[u, a_1, ..., a_n]$.
7. $F \Vdash_a \forall x\beta(x, F_{ab}(a_1), ..., F_{ab}(a_n)]$ si y sólo si, para todo $b \geq a$ y para todo $u \in F_b$ se tiene que $F \Vdash_b \beta[u, F_{ab}(a_1), ..., F_{ab}(a_n)]$.

Lema 1 (Preservación hacia el futuro)**.** *Sea F un $\tau-$ modelo de Kripke sobre Σ y $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una $\tau-$ fórmula. Dado $a \in \Sigma$ si $F \Vdash_a \varphi[a_1, ..., a_n]$ entonces $F \Vdash_b \varphi[F_{ab}(a_1), ..., F_{ab}(a_n)]$ para todo $b \geq a$.*

Para la prueba vea [VD], lema 5.3.4.

Definición 4. Si T es una $\tau-$teoría. $F \Vdash T$ si y sólo si para toda sentencia $\alpha \in T$ y para todo $a \in \Sigma$, $F \Vdash_a T$.

En lo que sigue $T \vdash \alpha$ denotará que la teoría T deduce intuicionísticamente la fórmula α, el lector interesado en la noción de deducibilidad intuicionista puede consultar [VD].

Teorema 1 (Completez). *Si T es una τ-teoría intuicionisticamente consistente, existe un τ-modelo de Kripke F tal que $F \Vdash T$.*

La prueba para el caso enumerable se sigue del Teorema 4 que se encuentra más adelante.

Definición 5. Dados un par de órdenes Σ, Δ, una función $h : \Sigma \to \Delta$ es un **homomorfismo fuerte** o abierto si y sólo si para todo $x \in \Sigma$ y todo $z \in \Delta$ tal que $z \geq h(x)$ existe un $y \geq x$ para el cual $h(y) = z$.

Definición 6. Dado un preorden Σ y un elemento a de Σ, el **creciente** de a en Σ, denotado como $[a)_\Sigma$, es el conjunto: $\{b \in \Sigma : a \leq b\}$.

Note que h es un homomorfismo fuerte si y sólo si $h\left([x)_\Sigma\right) = [h(x))_\Delta$ para todo x en Σ, de allí el nombre de homomorfismo abierto, además si h es un homomorfismo fuerte de Σ en Δ y F es un τ-modelo de Kripke sobre Δ podemos definir un τ-modelo de Kripke F^{-h}, llamado el **retracto** de F vía h, de la siguiente manera:

- Dado $x \in \Sigma$ las fibras quedan completamente definidas por la ecuación $F^{-h}(x) = F(h(x))$.
- Las transiciones en F^{-h} se definen del siguiente modo. Si x y y son elementos de Σ, $x \geq y$ y $a \in F^{-h}(x)$ entonces $F^{-h}_{xy}(a) = F_{h(x)h(y)}(a)$.

Lema 2 (Homomorfismos fuertes). *Dado F un τ-modelo de Kripke sobre Δ, h un homomorfismo fuerte de Σ en Δ y F^{-h} el retracto de F vía h, se tiene entonces que para todo $a \in \Sigma$ y para toda $\tau-$ fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$: $F^{-h} \Vdash_a \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y sólo si $F \Vdash_{h(a)} \varphi[a_1, ..., a_n]$.*

Para la prueba vea [VD] lema 5.4.10.

Diremos que una teoría T tiene modelos si y sólo si existe un orden Σ y un modelo de Kripke F sobre Σ tales que $F \Vdash T$.

Teorema 2 (Compacidad). *Una teoría T tiene modelos si y sólo si todo subconjunto finito Γ_0 de T tiene modelo.*

La prueba del teorema de compacidad es inmediata a partir del teorema de completez y del que la noción de deducción de la lógica intuicionista es finitaria.

Definición 7. Sea F un modelo de Kripke sobre Σ y a un elemento de Σ, la **restricción** de F al creciente de a es el modelo de Kripke $F \upharpoonright_{[a)_\Sigma}$.

Lema 3 (Independencia del pasado)**.** *Dados un τ-modelo de Kripke F sobre Σ, $a \in \Sigma$ y una τ-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una τ-fórmula. Para todo $b \geq a$; $F \Vdash_b \varphi[a_1, ..., a_n]$ si y sólo si $F \upharpoonright_{[a)} \Vdash_b \varphi[a_1, ..., a_n]$.*

La prueba es fácil, se deja al lector.

El lema de independencia del pasado vale no sólo para restricciones de modelo de Kripke a crecientes sino que en general valdrá para toda restricción de un modelo de Kripke a un abierto del orden base con la topología inducida por el orden, donde dado un orden Σ un subconjunto A es un abierto si y sólo si para todo $a \in A$ se tiene que: $[a)_\Sigma \subset A$.

2. COMPLETEZ

Definición 8. Un orden Σ es **universal** si y sólo si toda teoría enumerable e intuicionísticamente consistente T tiene un modelo de Kripke sobre Σ.

Dado un orden Σ y elementos $a, b \in \Sigma$ diremos que son elementos **incompatibles** si y sólo si no existe $c \in \Sigma$ tal que $a, b \leq c$.

Definición 9. Un orden Σ es **no atómico** si y sólo si para todo $a \in \Sigma$ existen $b, c \in \Sigma$ incompatibles tales que $b, c \gneqq a$.

Debe advertirse que la noción aquí utilizada de "no atómico" no corresponde a la noción corriente de átomo.

En adelante notaremos mediante $2^{\prec\omega}$ al conjunto de las palabras finitas sobre el conjunto $\{0, 1\}$ con la relación de orden: $\eta \sqsubseteq \varepsilon$ si y sólo si η es un segmento inicial de ε. Este orden incluye como elemento mínimo a la palabra vacía que denotaremos $\emptyset$.

Teorema 3. *Si un orden Σ es universal entonces es no atómico.*

Demostración. Basta considerar la siguiente sentencia, $\neg\forall x \forall y(\neg(x = y) \vee \neg\neg(x = y))$. Esta sentencia es intuicionísticamente consistente, para comprobarlo es suficiente exhibir un modelo de Kripke F que la fuerce. Construiremos un tal modelo de Kripke de conjuntos F sobre el árbol binario $2^{\prec\omega}$. Tomamos $F(\emptyset) = \{\emptyset_l, \emptyset_r\}$ un conjunto con dos elementos diferentes, suponemos definido $F(\zeta)$ y pasamos a definir $F(\zeta\hat{\ }0)$ y $F(\zeta\hat{\ }1)$ de la siguiente manera:

- $F(\zeta\hat{\ }0) = F(\zeta) \cup \{(\zeta\hat{\ }0)_l, (\zeta\hat{\ }0)_r\}$ donde estos dos últimos elementos son diferentes entre si y diferentes de todos los elementos en $F(\zeta)$.
- $F(\zeta\hat{\ }1) = F(\zeta)/\sim_{\zeta\hat{\ }1} \cup \{(\zeta\hat{\ }1)_l, (\zeta\hat{\ }1)_r\}$, con $\sim_{\zeta\hat{\ }1}$ la relación de equivalencia que identifica los elementos ζ_r y ζ_l de $F(\zeta)$, y donde $(\zeta\hat{\ }1)_l, (\zeta\hat{\ }1)_r$ son dos elementos nuevos y diferentes.

Para terminar la construcción del modelo de Kripke F debemos definir las transiciones $F_{\zeta,\zeta\hat{\ }1}$ y $F_{\zeta,\zeta\hat{\ }0}$. $F_{\zeta,\zeta\hat{\ }0}$ será la inclusión y $F_{\zeta,\zeta\hat{\ }1}$ la proyección en el cociente. Con esto hemos terminado, y lo que hemos hecho no es otra cosa que construir un modelo de Kripke tal que en todo nodo del orden de base aparecen dos elementos nuevos que en los nodos futuros a la derecha se vuelven iguales y en los nodos futuros a la izquierda se mantienen diferentes; es decir, hemos construido un modelo de Kripke en el que en cualquier nodo del orden aparecen en la fibra respectiva elementos que no son no iguales pero que tampoco son densamente iguales y ésta es precisamente la condición que debe cumplirse para que se fuerce la sentencia indicada.

Sea Σ un orden para el cual existe un modelo de Kripke F tal que para todo $a \in \Sigma$, $F \Vdash_a \neg\forall x\forall y(\neg(x = y)\vee\neg\neg(x = y))$. Por definición del forzamiento de la negación se tiene que para todo $b \geq a$ $F \nVdash_b \forall x\forall y(\neg(x = y)\vee\neg\neg(x = y))$, existe entonces $c \in \Sigma$ tal que $c \geq b$ y elementos u, v en F_c tales que $F \nVdash_c \neg(u = v)$ y $F \nVdash_c \neg\neg(u = v)$, por lo que existen $d, e \geq c$ tales que $F \Vdash_d (F_{cd}(u) = F_{cd}(v))$ y $F \Vdash_e \neg(F_{ce}(u) = F_{ce}(v))$. Con ello hemos probado que para todo $a \in \Sigma$ existen $e, d \in \Sigma$ los cuales son mayores que a y son incompatibles. $\square$

Es interesante notar que la condición de no atomicidad es la que se le exige a un forzamiento en teoría de conjuntos para que los filtros genéricos no estén en el universo base y para que en consecuencia el forzamiento no sea inocuo.

Definición 10.

1. T una teoría es **cerrada para deducción** si y sólo si para toda sentencia α*:* si $T \vdash \alpha$ entonces $\alpha \in T$.
2. T tiene la **propiedad de Henkin** si y sólo si para toda fórmula $\alpha(x)$*:* si $T \vdash \exists x\alpha(x)$ existe entonces una constante c tal que $T \vdash \alpha(c)$.
3. T tiene la **propiedad de la disyunción** si y sólo si para todo par de sentencias α, β: si $T \vdash \alpha \vee \beta$ entonces $T \vdash \beta$ o $T \vdash \alpha$.

Definición 11. Diremos que una teoría T es **prima** si y sólo si es cerrada para deducción, tiene la propiedad de Henkin y tiene la propiedad de la disyunción.

Lema 4. *Dada T una teoría enumerable y α una sentencia tal que $T \nvdash \alpha$ existe una teoría prima y enumerable Γ tal que $T \subset \Gamma$ y $\Gamma \nvdash \alpha$.*

Para una prueba del lema el lector puede consultar [VD], lema 5.3.8.

El teorema a continuación es esencialmente el lema 5.3.10 en [VD] y nuestra prueba difiere muy poco de la prueba allí presentada. Se incluye pues la consideramos muy informativa.

Teorema 4. *El árbol $\omega^{\prec\omega}$ de sucesiones finitas de números naturales es universal.*

Demostración. Primero invocamos el lema 4 para encontrar una extensión prima y enumerable $T^{\emptyset}$ de T. Sea τ el vocabulario de $T^{\emptyset}$ y C el conjunto de constantes en τ. Sea $(C_i)_{i\in\omega}$ una colección disyunta de conjuntos enumerables de nuevas constantes y $C^i = C \cup C_1 \cup, ..., \cup C_i$. Construimos recursivamente una colección de teorías primas y enumerables $(\Gamma_a)_{a\in\omega^{\prec\omega}}$de la siguiente manera:

- $\Gamma_{\emptyset} = T^{\emptyset}$.
- Suponemos construida la teoría Γ_a sobre el vocabulario $\tau \cup C^n$ donde n es la longitud de a. Sea $\{\langle \alpha_i, \beta_i \rangle\}_{i\in\omega}$ una enumeración de los pares de sentencias en el vocabulario $\tau \cup C^n$ tales que $\Gamma_a, \alpha_i \nvdash \beta_i$ para todo i, podemos aplicar nuevamente el lema anterior y por cada i encontrar una $\tau \cup C^{n+1}$ teoría prima $\Gamma_{a\hat{\ }i}$ tal que $\alpha_i \in \Gamma_{a\hat{\ }i}$, $\Gamma_{a\hat{\ }i} \nvdash \beta_i$ y $\Gamma_a \subset \Gamma_{a\hat{\ }i}$.

Con esto hemos terminado con nuestra construcción de las $(\Gamma_a)_{a\in\omega^{\prec\omega}}$ y estamos listos para construir un modelo de Kripke F sobre $\omega^{\prec\omega}$.

- Dado $a \in \omega^{\prec\omega}$, el universo de F_a es el cociente $C^n / \sim_a$. Donde n es la longitud de a y $\sim_a$ es la relación de equivalencia determinada por Γ_a, es decir que para todo par $c, d \in C^n$ se tiene que $c \sim_a d$ si y sólo si $\Gamma_a \vdash c = d$.
- Dada $\alpha(c_1, ..., c_n)$, una $\tau \cup C^n$ sentencia atómica $F_a \vDash \alpha(c_1, ..., c_n)$ si y sólo si $\alpha(c_1, ..., c_n) \in \Gamma_a$.
- Para terminar si $a \leq b$ la transición F_{ab} está definida por: si $n = longitud(a)$ y $c \in C^n$ entonces $F_{ab}([c]_a) = [c]_b$.

Hecho 1. *Para todo $a \in \Sigma$ y toda $\tau \cup C$-sentencia α se tiene que $F \Vdash_a \alpha$ si y sólo si $\alpha \in \Gamma_a$.*

La prueba de la afirmación es por inducción sobre fórmulas.

- Si α es atómica la afirmación se tiene por la construcción del modelo de Kripke.
- La conjunción se deja como ejercicio al lector.
- $F \Vdash_a \alpha \vee \beta$ si y sólo si $F \Vdash_a \alpha$ o $F \Vdash_a \beta$ si y sólo si por hipótesis de inducción $\alpha \in \Gamma_a$ o $\beta \in \Gamma_a$ si y sólo si $\alpha \vee \beta \in \Gamma_a$ dado que Γ_a es prima.
- Supongamos que $F \Vdash_a \alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \rightarrow \beta \notin \Gamma_a$ existe entonces un número natural n tal que $\alpha \in \Gamma_{a\hat{\ }n}$ y $\beta \notin \Gamma_{a\hat{\ }n}$ pero entonces por la hipótesis de inducción $F \Vdash_{a\hat{\ }n} \alpha$ y $F \nVdash_{a\hat{\ }n} \beta$ y entonces $F \nVdash_a \alpha \rightarrow \beta$. Esto nos da una dirección. Supongamos ahora que $F \nVdash_a \alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma_a$ entonces para todo $\eta \in \omega^{\prec\omega}$ tal que $\eta \geq a$, $\alpha \in \Gamma_\eta$ implica $\beta \in \Gamma_\eta$ y entonces por la hipótesis de inducción para todo $b \geq a$ si $F \Vdash_b \alpha$ entonces $F \Vdash_b \beta$, lo que nos da la otra dirección.
- La negación es similar al item anterior, se deja como ejercicio.
- Supongamos primero que $F \Vdash_a \forall v\alpha(v)$ y $\forall v\alpha(v) \notin \Gamma_a$. Existe un natural n y una constante c tales que $\alpha(c) \notin \Gamma_{a\hat{\ }n}$. Entonces por la hipótesis de inducción $F \nVdash_{a\hat{\ }n} \alpha(c)$ y entonces $F \nVdash_a \forall v\alpha(v)$. Esto nos da una dirección del si y sólo si que queremos probar, la otra dirección es similar y se deja como ejercicio así como el caso del cuantificador existencial.

$\square$

Teorema 5. *Existe un homomorfismo fuerte de $2^{\prec\omega}$ en $\omega^{\prec\omega}$.*

Demostración. Vamos a realizar un esquema de la prueba. Lo primero a tener en cuenta es que si $a \in 2^{\prec\omega}$ entonces $[a)_{2^{\prec\omega}} \cong 2^{\prec\omega}$ y que si $b \in \omega^{\prec\omega}$ entonces $[b)_{\omega^{\prec\omega}} \cong \omega^{\prec\omega}$. Esto nos permite describir la costrucción de un homomorfismo fuerte $g : 2^{\prec\omega} \rightarrow \omega^{\prec\omega}$ de la siguiente manera.

Es suficiente construir una función parcial $f \dot{:} 2^{\prec\omega} \rightarrow \omega^{\prec\omega}$ tal que:

1. f es monótona en su dominio
2. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n \in \mathit{Rango}(f)$
3. Si $\eta \in 2^{\prec\omega}$ es tal que $f(\eta) = \emptyset$ y $f(\eta\hat{\ }i) = n$, para algún $n \in \mathbb{N}$ y algún $i \in \{0,1\}$ entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon \sqsupseteq \eta$ tal que $f(\varepsilon) = m$
4. Si f está definida en η y $f(\eta) = n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces f no está definida en ε, para todo $\varepsilon \sqsupset \eta$.

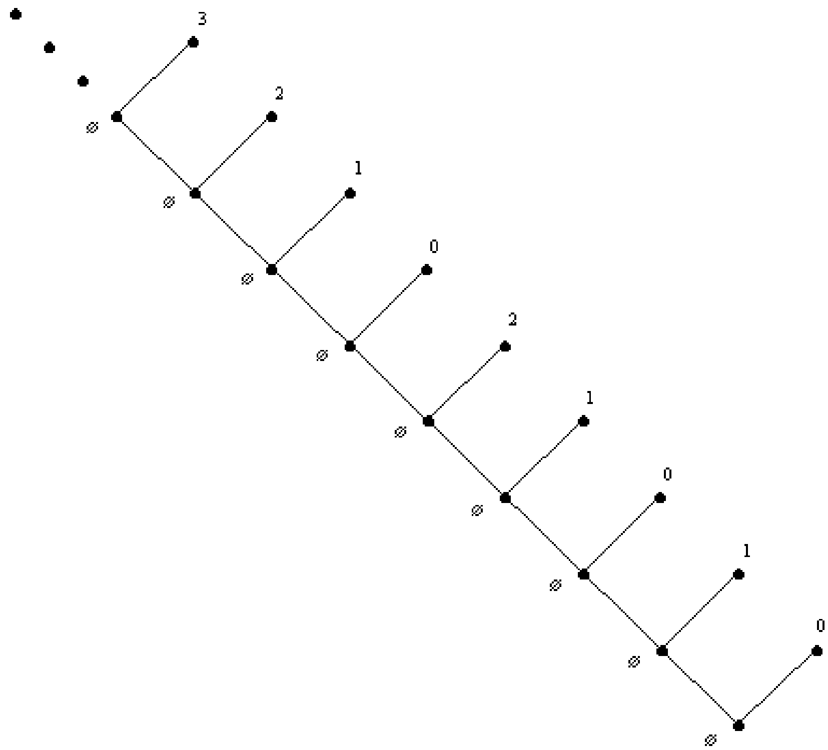
Construir esta función parcial es suficiente ya que si tenemos f y $\eta \in dom\,(f)$ tal que $f\,(\eta) = n$, $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $[\eta)_{2^{\prec\omega}} \cong 2^{\prec\omega}$ y $[n)_{\omega^{\prec\omega}} \cong \omega^{\prec\omega}$. Ahora para continuar con la construcción del homomorfismo fuerte debemos construir una función parcial $f_\eta \vdots [\eta)_{2^{\prec\omega}} \to [n)_{\omega^{\prec\omega}}$ que cumpla:

1. f_η es monótona en su dominio
2. Si $m \in \mathbb{N}$ entonces $n\hat{\ }m \in Rango\,(f_\eta)$
3. Si $f_\eta\,(\varepsilon) = n$ y $f_\eta\,(\varepsilon\hat{\ }i) = n\hat{\ }m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y algún $i \in \{0,1\}$ entonces para todo $s \in \mathbb{N}$ existe $\delta \in dom\,(f_\eta)$ tal que $f_\eta\,(\delta) = m\hat{\ }s$ y $\delta \sqsupseteq \varepsilon$.
4. Si $f_\eta\,(\varepsilon) = n\hat{\ }m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ entonces f_η no está definida en todo $\delta \sqsupset \varepsilon$.

Lo que significa que tenemos que construir una función f_η la cual no es más que una nueva versión de la f original.
El numeral 4 garantiza que los dominios de las funciones parciales construidas no agotan los elementos en $2^{\prec\omega}$. El numeral 3 garantiza que las funciones parciales definidas son "parcialmente abiertas" y por lo tanto si tomamos la unión de todas las funciones parciales construidas en los diferentes instantes de la construcción, tendremos una función global $g : 2^{\prec\omega} \to \omega^{\prec\omega}$ monótona y abierta.
Veamos que la construcción de f es posible.

1. Si η es una cadena de ceros entonces $f\,(\eta) = \emptyset$
2. $f\,(\emptyset) = \emptyset$, $f\,(1) = 0$ y $f\,(0\hat{\ }1) = 1$
3. Dado un natural n con $n \geq 2$ existe único par $s, i \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\sum_{j=2}^{s+1} j\right) + 1 > n = \left(\sum_{j=2}^{s} j\right) + i$ con $0 \leq i \leq s+1$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ y $s, i \in \mathbb{N}$ la pareja de naturales determinada por n, si ε es una cadena de $(n-1)$ ceros, entonces $f\,(\varepsilon\hat{\ }1) = i - 1$.
Es fácil comprobar que f satiface las cuatro condiciones requeridas. Quizá el siguiente dibujo aclare la forma de la función.



□

Como un corolario del lema de homomorfismos fuertes y del teorema anterior tenemos que la existencia de un homomorfismo fuerte $f : \Sigma \to 2^{\prec\omega}$ es una condición suficiente para que Σ sea universal.

Problema 1. *¿Es la condición de que exista un homomorfismo fuerte de Σ en $2^{\prec\omega}$ una condición necesaria para que Σ sea universal?.*

3. PROPIEDADES DE LOWENHEIM-SKOLEM

Sea F un τ-modelo de Kripke sobre un orden Σ, podemos codificar a F, usando ideas de [C], como una τ^*-estructura de primer orden F^*, donde τ^* es una pequeña modificación del vocabulario original τ, vocabulario del que sólo supondremos que no posee constantes.

El nuevo vocabulario τ^* consta de los siguientes símbolos:

- Un nuevo predicado monádico Σ^*.
- Un predicado binario $\preceq$.
- Un nuevo predicado binario Fib.
- Un nuevo predicado de aridad cuatro Tr.
- Por cada símbolo de relación $n-aria$ R del vocabulario τ, un símbolo de relación $n+1-aria$ R^*.
- Por cada símbolo f de función $n-aria$ en el vocabulario original un nuevo símbolo f^* para una relación $n+2-aria$.

Definido el vocabulario, definimos la τ^*-estructura F^* de la siguiente manera:

- $|F^*| = |F| \cup |\Sigma|$. Con $|F| = \{b : b \in F(a)$ para algún a en $\Sigma\}$.
- La interpretación en F^* de los símbolos del vocabulario τ^* se define por:
  - $F^* \vDash \Sigma^*[a]$ si solo si $a \in |\Sigma|$.
  - $F^* \vDash a \preceq b$ si solo si $a, b \in |\Sigma|$ y $a \leq b$.
  - $F^* \vDash R^*[a, a_1, ..., a_n]$ si solo si $a \in |\Sigma|$, $a_1, ..., a_n \in F_a$ y $F \Vdash_a R[a_1, ..., a_n]$.
  - $F^* \vDash f^*[a, a_1, ..., a_n, b]$ si solo si $a \in |\Sigma|$, $a_1, ..., a_n, b \in F_a$ y $F \Vdash_a f[a_1, ..., a_n] = b$.
  - $F^* \vDash Fib[a, a_1]$ si solo si $a \in |\Sigma|$ y $a_1 \in F_a$.
  - $F^* \vDash Tr[a_1, a_2, a, b]$ si solo si $a, b \in |\Sigma|$, $a \leq b$, $a_1 \in F_a$, $a_2 \in F_a$ y $F_{ab}(a_1) = a_2$.

Es posible definir una traducción recursiva de las fórmulas del vocabulario τ en un fragmento del lenguaje τ^* de tal manera que $F^* \vDash \varphi^*[a, a_1, ..., a_n]$ si y sólo si $F \Vdash_a \varphi[a_1, ..., a_n]$ para todo a en el orden Σ, y toda tupla $a_1, ..., a_n$ de elementos en F_a. La definición de la traducción es como sigue:

- Si R es un símbolo de relación $n-$aria en el vocabulario τ,
  $(R(x_1, ..., x_n))^* = R^*(x, x_1, ..., x_n)$.
- Si f es un símbolo de función $n-$aria en el vocabulario τ,
  $(f(x_1, ..., x_n) = y)^* = f^*(x, x_1, ..., x_n, y)$.
- Dadas fórmulas α, β, $(\alpha \wedge \beta)^* = \alpha^* \wedge \beta^*$, y $(\alpha \vee \beta)^* = \alpha^* \vee \beta^*$.
- Dadas α, β, se define $(\alpha(x_1, ..., x_n) \rightarrow \beta(x_1, ..., x_n))^* = \forall z \forall y_1 ... y_n \, (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ donde:

$\varphi_1 = \Sigma^*(z) \wedge x \preceq z \wedge \left(\bigwedge_{i \leq n} Tr\,(x_i, y_i, x, z) \right)$
$\varphi_2 = \alpha^*(z, y_1, ..., y_n) \rightarrow \beta^*(z, y_1, ..., y_n)$.

La traducción de una fórmula negada se define de una manera muy similar, recuerde que en lógica intuicionista puede definirse la negación de una fórmula utilizando un símbolo para la falsedad $\perp$ como $\urcorner\alpha \equiv (\alpha \to \perp)$.

- $(\exists y(\alpha(y, x_1, ..., x_n)))^* = \exists y(Fib(x, y) \wedge \alpha^*(x, y, x_1, ..., x_n))$.
- $(\forall y(\alpha(y, x_1, ..., x_n)))^* = \varphi$ donde φ es la siguiente fórmula $\forall z((\Sigma^*(z) \wedge x \preceq z)$

$\to \forall y \forall y_1 ... y_n((Fib(z, y) \wedge (\bigwedge_{i \leq n} Tr(x_i, y_i, x, z))) \to \alpha^*(z, y, y_1, ..., y_n)))$

Con esto hemos completado nuestra definición recursiva de la traducción.

Proposición 1. *Para todo vocabulario τ, todo $\tau-$modelo de Kripke F y toda $\tau-$sentencia α; $F \Vdash \alpha$ si y sólo si $F^* \vDash \alpha^*$.*

La prueba de la proposición es una fácil inducción sobre las $\tau-$fórmulas y por ello se deja al lector.

Dada una $\tau-$teoría T, la imagen de T bajo la traducción anteriormente definida es la τ^*-teoría $T^* = \{\alpha^* : \alpha \in T\}$

Corolario 1. *Para todo vocabulario τ, todo $\tau-$modelo de Kripke F y toda $\tau-$teoría T se tiene que $F \Vdash T$ si y sólo si $F^* \vDash T^*$.*

Lema 5. *Para todo vocabulario τ existe una teoría $Prh(\tau)$ en el lenguaje τ^* tal que para toda τ^*-estructura A: $A \vDash Prh(\tau)$ si solo si existe un único modelo de Kripke F módulo isomorfismo tal que $F^* = A$.*

Demostración. La teoría $Prh\,(\tau)$ consta de la siguiente colección de sentencias:

- $\forall x(\Sigma^*(x) \vee \exists y(\Sigma^*(y) \wedge Fib(y, x)))$.
- $\forall x \forall y(Fib(x, y) \to (\Sigma^*(x) \wedge \urcorner(\Sigma^*(y)))$.
- $\forall x \forall y \forall z \forall w(Tr(x, y, z, w) \to (\Sigma^*(z) \wedge \Sigma^*(w) \wedge z \preceq w \wedge Fib(x, z) \wedge Fib(y, w)))$
- $\forall x \forall y \forall z((\Sigma^*(z) \wedge \Sigma^*(y) \wedge Fib(y, x) \wedge y \preceq z) \to \exists! w(Fib(z, w) \wedge Tr(x, w, y, z)))$
- $\forall x \forall y \forall z(\varphi \to \phi)$ donde φ y ϕ son las siguientes fórmulas:
  - $\varphi = (\Sigma^*(z) \wedge \Sigma^*(y) \wedge \Sigma^*(x) \wedge (x \preceq y \preceq z)$.
  - $\phi = (\forall u \forall v \forall w(Tr(u, v, x, y) \wedge Tr(v, w, y, z) \to Tr(u, w, x, z))))$.
- Adicionalmente la teoría consta de un esquema axiomático que garantiza el forzamiento hacia el futuro de las fórmulas atómicas, lo que en particular garantiza que las transiciones son $\tau-$homomorfismos.

Es fácil construir este esquema y mostrar que la teoría así definida codifica lo que queremos codificar con ella. Lo que esta teoría permite es reconstruir desde cualquiera de sus modelos un único $\tau-$modelo de Kripke. $\square$

Corolario 2 (Lowenheim-Skolem descendente)**.** *Dada T una $\tau-$teoría, si T tiene un modelo de Kripke, existe entonces un orden Σ y un modelo de Kripke F sobre Σ, tal que $F \Vdash T$, $|\Sigma| \leq |\tau| \cdot \omega$ y para todo $a \in \Sigma$ $|F_a| \leq |\tau| \cdot \omega$.*

Demostración. Sea T una teoría, $|T^* \cup Prh(\tau)| \leq |\tau| \cdot \omega$, por el teorema de Lowenheim-Skolem para la lógica clásica existe una τ^*-estructura M tal que $M \vDash T^* \cup Prh(\tau)$, por lo que existe F tal que $M = F^*$ y $F \Vdash T$, se tiene entonces que $|\Sigma| \leq |M| \leq |\tau| \cdot \omega$ donde Σ es el orden base de F y para todo a en Σ se tiene que $|F_a| \leq |M| \leq |\tau| \cdot \omega$. $\square$

Corolario 3 (Lowenheim-Skolem ascendente)**.** *Dada T una $\tau-$teoría, si T tiene un modelo de Kripke F sobre un orden Σ y F es tal que $\biguplus_{a\in\Sigma} F_a$ es un conjunto infinito se tiene entonces que para todo $\varkappa$ mayor o igual que el cardinal de T existe G un modelo de Kripke de T tal que si Δ es el orden base de G se tiene que $\left|\biguplus_{a\in\Delta} G_a\right| \geq \varkappa$.*

Definición 12. Una clase Ω de $\tau - modelos\ de\ Kripke$ es **axiomatizable en lógica intuicionista** si y sólo si existe una teoría T tal que $\Omega = \{F : F \Vdash T\}$.

Definición 13. Una clase Ω de $\tau - modelos\ de\ Kripke$ es **axiomatizable en lógica clásic**a si y sólo si existe una τ^*-teoría T tal que $\Omega = \{F : F^* \vDash T\}$.

Proposición 2. *Toda clase de modelos de Kripke axiomatizable en lógica intuicionista es axiomatizable en lógica clásica.*

Demostración. Si Ω es una clase axiomatizable en lógica intuicionista existe T tal que $\Omega = \{F : F \Vdash T\}$ y por lo tanto $\Omega = \{F : F^* \vDash T^*\}$. $\square$

Vamos a ver ahora que el recíproco no es cierto, es decir que existe una clase de modelos de Kripke que es axiomatizable en lógica clásica y que no lo es en lógica intuicionista.

Pensemos en una sentencia en el vocabulario τ^* la cual expresa que el orden base no es no atómico, esta sentencia axiomatizará en lógica clásica la clase de los τ-modelos de Kripke cuyo orden base no es no atómico. Por los resultados de la sección anterior tal clase no puede ser axiomatizada en lógica intuicionista ya que toda teoría enumerable e intuicionisticamente consistente tiene un modelo de Kripke sobre el orden no atómico $2^{\prec\omega}$.

Sea $\alpha = \exists x(\Sigma^*(x) \wedge \forall y \forall z((x \preceq y \wedge x \preceq z) \rightarrow \exists u(y \preceq u \wedge z \preceq u)))$.
$\{F : F^* \vDash \alpha\} = \{F :$ el orden base de F no es no atómico$\}$.

Corolario 4. *Existe una clase de modelos de Kripke que no es axiomatizable en lógica intuicionista pero que es axiomatizable en lógica clásica*

Esto no es sorprendente dado que la noción de forzamiento no le permite a la lógica intuicionista hablar directamente del orden base.

La lógica intuicionista parece ser pues completamente reducible a la lógica clásica mediante adecuadas traducciones. Esta lectura posible del último corolario aplica sólo si pensamos en la lógica intuicionista como una lógica de modelos de Kripke, pero la lógica intuicionista tiene una interpretación topológica mas general, algo que la lógica clásica parece no tener. La lógica intuicionista puede llegar a ser fructífera en el estudio de estructuras sobre espacios topológicos que reflejan realmente la topología del espacio base y en particular la noción de cubrimiento, la cual no es reflejada realmente por los modelos de Kripke y no puede ser codificada en lógica de primer orden clásica mediante traducciones dado que es una noción esencialmente infinitaria. Las estructuras a las que nos estamos refiriendo son los haces de estructuras sobre espacios topológicos, los cuales son el objeto de estudio de [M1].

Podemos aprovechar la codificación de modelos de Kripke como estructuras clásicas para introducir en nuestro contexto la construcción clásica de ultraproductos, usando ideas similares a las utilizadas en [G].

Sea $(F_i)_{i\in I}$ una colección de τ-modelos de Kripke, donde el orden base de cada F_i es el conjunto ordenado Σ_i. Sea U un ultrafiltro sobre I, dado que para todo $i \in I$ se tiene que $(F_i)^* \models Prh\,(\tau)$ entonces el ultraproducto $\prod_{i\in I} (F_i)^* /U$ satisface $Prh\,(\tau)$ y por lo tanto existe un único modelo de Kripke F módulo isomorfismo tal que $F^* = \prod_{i\in I} (F_i)^* /U$. Sea F este único modelo de Kripke, definimos el ultraproducto de los modelos de Kripke $(F_i)_{i\in I}$ mediante la ecuación: $\prod_{i\in I} F_i/U = F$.

Dado $\prod_{i\in I} F_i/U$ su orden base es el conjunto

$$\left\{ a \in \prod_{i\in I} (F_i)^* /U : \prod_{i\in I} (F_i)^* /U \vDash \Sigma^* [a] \right\}$$

ordenado por la relación: $a \leq b$ si y sólo si $\prod_{i\in I} F_i^*/U \vDash a \preceq b$.

Lema 6. *Dada una colección de modelos de Kripke* $(F_i)_{i\in I}$ *sobre los órdenes* $(\Sigma_i)_{i\in I}$ *se tiene que el orden base de* $\prod_{i\in I} F_i/U$ *es isomorfo a* $\prod_{i\in I}\Sigma_i/U$.

La prueba es un buen ejercicio acerca de utrafiltros y ultraproductos.

Teorema 6. $\prod_{i\in I}(F_i)/U \Vdash \alpha$ *si y sólo si* $\{i\in I : F_i \Vdash \alpha\}\in U$.

Demostración. $\prod_{i\in I}(F_i)/U \Vdash \alpha$ si y sólo si $\prod_{i\in I}(F_i)^*/U \vDash \alpha^*$ si y sólo si $\left\{i\in I : (F_i)^* \vDash \alpha^*\right\}\in U$ si y sólo si $\{i\in I : F_i \Vdash \alpha\}\in U$. □

Definición 14. Dos modelos de Kripke F y G son **elementalmente equivalentes** si y sólo si

$$\{\alpha : F \Vdash \alpha\} = \{\alpha : G \Vdash \alpha\}.$$

Teorema 7. *Una clase K de modelos de Kripke es axomatizable en lógica intuicionista si y sólo si es cerrada para ultraproductos, equivalencia elemental y restricciones.*

Para la prueba véase [G], teorema 7 página 175.

Dada T una teoría consistente y Σ un orden, diremos que T es **forzable** en Σ si y sólo si existe un modelo de Kripke F sobre Σ que fuerza T y diremos que T es finitamente forzable sobre Σ si y sólo si toda subteoría finita de T es forzable sobre Σ. Dado Σ un orden podemos considerar como un teorema de compacidad para Σ una afirmación del tipo: Toda teoría finitamente forzable sobre Σ es forzable sobre Σ. El lema anterior nos permite formular y probar la siguiente forma débil de compacidad.

Lema 7. *Dada una teoría T y un orden Σ, si T es finitamente forzable sobre Σ entonces T es forzable sobre una ultrapotencia de Σ.*

Demostración. Sea I la colección de todos los subconjuntos finitos de T. Por hipótesis existe para todo i un modelo de Kripke F_i sobre Σ que fuerza i. Consideramos la colección de subconjuntos de I, $A = \left(\alpha^{\#}\right)_{\alpha\in T}$ donde para toda $\alpha\in T$ el conjunto $\alpha^{\#}$ es la colección $\{i\in I : \alpha\in i\}$. La colección A tiene la propiedad de intersecciones finitas así que existe un ultrafiltro U sobre I tal que $A\subset U$. $\prod_{i\in I}(F_i)/U \Vdash \alpha$ si y sólo si $\{i\in I : F_i\Vdash\alpha\}\in U$. Dada $\alpha\in T$ se tiene que $\alpha^{\#}\subset \{i\in I : F_i\Vdash\alpha\}$ por lo que $\left\{i\in I : (F_i)^*\vDash\alpha^*\right\}\in U$ y por tanto $\prod_{i\in I}(F_i)^*/U\vDash\alpha^*$ para toda sentencia $\alpha\in T$. Tenemos pues que $\prod_{i\in I}(F_i)/U$ fuerza T es decir T es forzable sobre el orden base de este ultraproducto, pero por el lema este orden base es el ultraproducto de los Σ_i respectivos y como en este caso Σ_i es Σ para todo i entonces el orden base es una ultrapotencia de Σ y con esto la afirmación queda probada. □

Corolario 5. *Dada una teoría T y un orden finito Σ, si T es finitamente forzable sobre Σ entonces T es forzable sobre Σ.*

Lema 8. *La clase de órdenes universales es cerrada para isomorfismos y ultraproductos.*

Demostración. La clase de órdenes universales es cerrada para isomorfismos dado que todo isomorfismo es un homomorfismo fuerte. Veamos que es cerrada para ultraproductos. Sea $(\Sigma_i)_{i\in I}$ una colección de órdenes universales y sea T una teoría enumerable y consistente, existe entonces una colección de modelos de Kripke $(F_i)_{i\in I}$ tal que para todo i F_i es un modelo de Kripke sobre Σ_i que fuerza T, se tiene entonces que $\prod_{i\in I}(F_i)/U$ fuerza T por lo que T es forzable sobre el orden base de $\prod_{i\in I}(F_i)/U$ pero este orden base es el ultraproducto de los Σ_i, por lo que T es forzable sobre este ultraproducto de órdenes y como T era arbitraria $\prod_{i\in I}\Sigma_i/U$ es universal. □

Hasta ahora sabemos que la clase de órdenes universales es cerrada para ultraproductos e imágenes inversas de homomorfismos fuertes, además sabemos que está contenida en la clase de los órdenes no atómicos y que a ella pertenecen el árbol binario y el árbol $\omega^{\prec\omega}$.

Lema 9. *Dados F y G modelos de Kripke si $F^* \prec G^*$ se tiene entonces que el orden base de F es un suborden elemental del orden base de G.*

La prueba es fácil, se deja al lector.

Corolario 6. *Dada una teoría enumerable T si T es forzable en Σ entonces T es forzable en un suborden elemental enumerable de Σ.*

Dada una teoría T sea $For(T) = \{\Sigma : \Sigma \text{ es un orden y } T \text{ es forzable en } \Sigma\}$ y sea $FinFor(T) = \{\Sigma : \Sigma \text{ es un orden y } T \text{ es finitamente forzable en } \Sigma\}$. Hasta el momento sabemos que $For(T)$ es cerrado para ultraproductos e isomorfismos y que si $\Sigma \in For(T)$ existe entonces un suborden elemental y enumerable de Σ en $For(T)$. Sabemos que $FinFor(T)$ es cerrado para ultraproductos e isomorfismos, que si $\Sigma \in FinFor(T)$ existe entonces un suborden elemental y enumerable de Σ en $FinFor\,(T)$. Además, podemos probar que si Σ es un orden enumerable y $\Sigma \in FinFor\,(T)$, entonces existe $\Omega \in For\,(T)$ tal que $\Sigma \preceq \Omega$ y Ω es enumerable.

Proposición 3. *Si la colección de órdenes universales no es axiomatizable en primer orden existe entonces una teoría consistente T tal que $For\,(T)$ no es axiomatizable en primer orden.*

Demostración. La clase de órdenes universales es, por definición, la intersección de las clases $For\,(T)$ para todas las teorías enumerables e intuicionísticamente consistentes. La intersección de clases axiomatizables en primer orden es axiomatizable en primer orden, esto implica que si cada clase $For\,(T)$ es axiomatizable en primer orden, la clase de órdenes universales también lo es. □

Concluimos este escrito proponiendo la siguiente conjetura.

Conjetura 1. *La clase de órdenes universales no es axiomatizable en primer orden.*

Bibliografía

[C] X. Caicedo, *Investigaciones acerca de los conectivos intuicionistas*. Rev. Acad. Col. de Ciencias, **74** No. 19 (1995) 705-715.

[C3] X. Caicedo, *Lógica de los haces de estructuras*. Rev. Acad. Col. de Ciencias, **74** No. 19 (1995) 69-84.

[CH] P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum hipothesis*. Benjamin Cumings, Readindg Massachusetts, 1966.

[E] H. D. Ebbinghauss, J. Flum and W. Thomas, *Mathematical logic*. UTM Springer Verlag, New York, 1984.

[F] M. C. Fitting, *Intuitionistic logic model theory and forcing*. Studies in Logic. North Holland, Amsterdam, 1978.

[G] D. Gabbay, *Semantical investigations in Heyting's Intuitionistic Logic*, Reidel, Dordrecht, 1976.

[GH] S. Ghilardi, *Incompleteness results in Kripke semantics*, J. Symb. Log. **56** No. 2 (1991) 517-538.

[KC] J. Keisler, Ch. Chang, *Model theory*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[L] F. W. Lawvere, *Continuosly variable sets: Algebraic Geometry = Geometric Logic*, Proceedings of the Logic Colloquium, Bristol (1973), North Holland (1975), 135-157.

[MO] I. Moerdijk, *Some topological spaces wich are universal for intuitionistic predicate Logic*, Ind. Math. **44** No 2 (1982).

[M1] A. Montoya, *Contribuciones a la teoría de modelos de haces*. 2003. Sometido a publicación.

[M2] A. Montoya, *Teoría de Modelos de Objetos Topológicos*. Tesis de Maestría Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2003.

[Ta] A. Tarski, *Der Aussagenkalkül und die topologie*. Fun. Math. **31**(1938) 103-134.

[VD] D. Van Dalen, *Logic and structure*, 3ra. ed. Springer Verlag, Berlín, 1983.