Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XI No. 2 (2004), pp. 150–171

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE LOS DOS PRIMEROS ÓRDENES Y TRANSFORMACIONES DE CONTACTO

ALBERTO CAMPOS (*)

A la memoria del matemático Jairo Antonio Charris Castañeda

RESUMEN. Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primero y segundo orden no tienen propiedades invariantes respecto de las transformaciones de contacto. Una demostración, según el método de equivalencia de E. Cartan concierne a las ecuaciones de primer orden. Para las ecuaciones de segundo orden, se dan dos demostraciones; una primera, según el método de equivalencia de E. Cartan; una segunda es del mismo Lie, según su propia concepción de equivalencia.

PALABRAS CLAVES: Equivalencia. Ecuaciones diferenciales ordinarias o de orden 1, o de orden 2. Transformación de contacto. Sistema diferencial exterior. Grado de indeterminación. Caracteres reducidos de Cartan. Sistemas diferenciales exteriores involutivos.

1. INTRODUCCIÓN

En ecuaciones diferenciales importa poder transformar una ecuación en otra. Por eso, desde temprano en la historia de las ecuaciones diferenciales aparece el problema de equivalencia. Dos ecuaciones diferenciales son equivalentes si existe una transformación que aplica la una en la otra.

En especial, Lie desarrolló una avanzada teoría, teoría de grupos de Lie. Un resultado clave: Si una ecuación diferencial es invariante respecto de las transformaciones de un grupo, entonces, existe un algoritmo que permite resolver la ecuación.

Similarmente, Elie Cartan, valiéndose del cálculo diferencial exterior, a cuya creación contribuyeron tanto Cartan mismo como Poincaré, formuló el problema de equivalencia para ecuaciones diferenciales.

(*) Alberto Campos. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
E-mail: acampos_s@yahoo.com.mx.

Publicaciones recientes mantienen actualizada la exposición del método. Robert Gardner, Niky Kamran, L. Hsu, William Shadwick han elaborado aplicaciones muy significativas.

Peter Olver no sólo ha investigado en aplicaciones de la misma importancia sino que publicó en 1995 una obra omnicomprensiva con todo tipo de explicaciones basada en un impresionante conocimiento de la bibliografía atinente. Una obra de Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, 1986, 1993, ya se había convertido en referencia obligada sobre el tema. Análogamente ha de serlo *Equivalence, Invariants and Symmetry*, 1995, para problemas de equivalencia. Las consideraciones que siguen están redactadas dentro del marco teórico de Olver en esta obra, aunque compulsando textos de Lie y de Cartan primordialmente.
E. Cartan aplicó su método de equivalencia en diversas ocasiones, como se puede apreciar en sus *Oeuvres Complètes*, publicadas por Gauthier - Villars, Paris. Es citada particularmente, una exposición que lleva por título *Les problèmes d'équivalence* síntesis de estudios de sistemas diferenciales realizados por él gracias a su método. En esa exposición propone estudiar las ecuaciones diferenciales ordinarias respecto tanto de las transformaciones de contacto como de las transformaciones puntuales. S. S. Chern consagró dos memorias al estudio, según el método de E. Cartan, de las ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden. El autor del presente artículo inició el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden. Niky Kamran y sus alumnos han estudiado, sistemáticamente, las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden respecto de transformaciones puntuales. Según opinión de Olver en el libro citado en la bibliografía (cita muchas fuentes, algunas de ellas evaluadas en el curso de la obra) no se podría asegurar todavía que las clasificaciones estén completas, incluso en el solo caso de ecuaciones escalares de segundo orden. En el año 2000 fue publicada, en Cambridge University Press, una obra *Lie's structural approach to PDE systems*, donde su autor, Olle Stormark, explica métodos de Lie, E. Cartan, y, Vessiot para el estudio de sistemas diferenciales.

Grosso modo, éstas son grandes líneas históricas de un problema que hay que plantear para cada familia de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Se puede aseverar que casi todo está por hacer. En el presente artículo se presentan algunos temas introductorios.

La demostración expuesta por Olver para las ecuaciones de segundo orden se basa en las investigaciones de Kamran y su escuela. En el presente artículo se hacen modificaciones en la elaboración de la solución del problema, según procedimientos del trabajo del autor en 1970, con miras a la generalización.

Por otra parte el autor tradujo y dispuso en español el texto de Lie.

El artículo está elaborado con todo detalle en la aplicación del método de equivalencia de E. Cartan con el fin de animar a eventuales lectores a proseguir en el estudio de tal método.

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Un elemento de contacto de orden 1 es definido por la ecuación de Pfaff

$$\omega_2 = dx_2 - x_3\, dx_1 = 0.$$

Una transformación de contacto, en $\mathbb{R}^2$ es una transformación puntual en $\mathbb{R}^3$ cuya primera prolongación deja invariante la ecuación de Pfaff $\omega_2 = 0$.

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $x_3 = F(x_1, x_2)$, la cual corrientemente es escrita en la forma $y' = F(x, y)$, en lo que sigue es escrita así:

$$\omega_2 = dx_2 - F(x_1, x_2)\, dx_1 = 0.$$

Se tiene un problema clásico puesto por Sophus Lie: Dadas 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se pregunta si existe una transformación de contacto de $\mathbb{R}^2$ que transforme una ecuación en la otra, en el sentido de que aplique soluciones en soluciones.

¿Cómo se plantea el problema de equivalencia para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden respecto de las transformaciones de contacto?

Sean:

- $x_3 = F(x_1, x_2)$ una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en las coordenadas x_1, x_2, x_3.

  La ecuación puede escribirse como una 1-forma

  $$\omega_2 = dx_2 - F(x_1, x_2)\, dx_1.$$

  La 1-forma ω_2, junto con la 1-forma $\omega_1 = dx_1$ completan una base de co-referenciales en dimensión 2. Entonces, a la ecuación se le asocia un co-referencial general

  $$\begin{aligned} \Omega_2 &= a_{22}\omega_2, \\ \Omega_1 &= a_{11}(\omega_1 + a_{12}\omega_2), \quad a_{11}a_{22} \neq 0, \end{aligned}$$

  donde a_{11}, a_{12}, a_{22} funciones de x_1, x_2, son los elementos genéricos de una matriz triangular 2×2, con elementos no nulos en la diagonal principal.
- $\overline{x}_3 = \overline{F}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en las coordenadas $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$.

  La ecuación puede escribirse como una 1-forma de Pfaff

  $$\overline{\omega}_2 = d\overline{x}_2 - \overline{F}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\, d\overline{x}_1.$$

La 1-forma $\overline{\omega}_2$, junto con la 1-forma $\overline{\omega}_1 = d\overline{x}_1$ completan una base de co-referenciales en dimensión 2. Entonces, a la ecuación $\overline{x}_3 = \overline{F}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ se le asocia un co-referencial general

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_2 &= \overline{a}_{22}\overline{\omega}_2,\\ \overline{\Omega}_1 &= \overline{a}_{11}(\overline{\omega}_1 + \overline{a}_{12}\overline{\omega}_2), \quad \overline{a}_{11}\overline{a}_{22} \neq 0,\end{aligned}$$

donde $\overline{a}_{11}$, $\overline{a}_{12}$, $\overline{a}_{22}$ funciones de $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, son los elementos genéricos de una matriz triangular 2×2, con elementos no nulos en la diagonal principal.

El problema por resolver consiste en determinar condiciones necesarias y suficientes para que exista un difeomorfismo tal que la imagen por el difeomorfismo del co-referencial $\overline{\Omega} = \left\{\overline{\Omega}_2, \overline{\Omega}_1\right\}$ sea precisamente el co-referencial $\Omega = \{\Omega_2, \Omega_1\}$.

Si la respuesta es afirmativa se dice que las ecuaciones son equivalentes respecto de transformaciones de contacto.

En el conjunto de los co-referenciales se busca determinar subconjuntos distinguidos mediante imposición de condiciones de carácter invariante a los parámetros a_{ij} del grupo o a funciones de ellos.

Operando mediante el cálculo diferencial exterior sobre el sistema de Pfaff constituido por las 2 formas de Pfaff ω_2, ω_1 y sus transformadas Ω_2, Ω_1 puede ser que aparezcan invariantes diferenciales constituidos por derivadas de F; en tal caso, es posible formar clases de ecuaciones diferenciales, dado que los invariantes diferenciales traducen propiedades de las funciones definidas por las ecuaciones diferenciales.

Puede ser que no haya tales propiedades; entonces, todas las ecuaciones conforman una sola clase y dos cualesquiera de ellas son equivalentes, es decir, la una es transformable en la otra por transformaciones de contacto.

Es la averiguación que se emprende en seguida.

Según las condiciones dadas, se tiene que

$$\begin{aligned}dx_2 &= \omega_2 + F\omega_1,\\ dx_1 &= \omega_1.\end{aligned}$$

La diferencial exterior de ω_1, es nula, es decir, $d\omega_1 = d\,dx_1 = 0$. En cuanto a la de ω_2 se calcula así:

$$\begin{aligned}d\omega_2 &= -dF \wedge dx_1 = -(F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2) \wedge dx_1 = -F_2\,dx_2 \wedge dx_1\\ &= -F_2(\omega_2 + F\omega_1) \wedge \omega_1 = F_2\,\omega_1 \wedge \omega_2.\end{aligned}$$

Dado que $a_{11}a_{22} \neq 0$, se tienen las inversas:

$$\omega_2 = \frac{\Omega_2}{a_{22}},$$
$$\omega_1 = \frac{\Omega_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{22}}\Omega_2.$$

Con estas relaciones se pueden calcular las diferenciales exteriores de Ω_2, Ω_1.

$$\begin{aligned} d\Omega_2 &= da_{22} \wedge \omega_2 + a_{22}\, d\omega_2 = da_{22} \wedge \omega_2 + a_{22} F_2\, \omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= da_{22} \wedge \left(\frac{\Omega_2}{a_{22}}\right) + a_{22}F_2 \left[\frac{\Omega_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{22}}\Omega_2\right] \wedge \frac{\Omega_2}{a_{22}} \\ &= \frac{da_{22}}{a_{22}} \wedge \Omega_2 + \frac{F_2}{a_{11}}\Omega_1 \wedge \Omega_2 = \left(\frac{da_{22}}{a_{22}} + \frac{F_2}{a_{11}}\Omega_1\right) \wedge \Omega_2. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} d\Omega_1 &= da_{11} \wedge (\omega_1 + a_{12}\omega_2) + a_{11}(d\omega_1 + da_{12} \wedge \omega_2 + a_{12}\, d\omega_2) \\ &= da_{11} \wedge (\omega_1 + a_{12}\omega_2) + a_{11}\, da_{12} \wedge \omega_2 + a_{11}a_{12}F_2\, \omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= \frac{da_{11}}{a_{11}} \wedge \Omega_1 + \frac{a_{11}da_{12}}{a_{22}} \wedge \Omega_2 + \frac{a_{12}F_2}{a_{22}}\Omega_1 \wedge \Omega_2. \end{aligned}$$

Una vez que se han calculado las diferenciales exteriores de cada una de las 1-formas del co-referencial se averigua una especie de consistencia del sistema mediante la introducción o búsqueda de dos tipos de números

- grado de indeterminación de las diferenciales exteriores del co-referencial general.
- caracteres reducidos de Cartan de las mismas diferenciales exteriores.

Para calcular el grado de indeterminación se comienza por introducir tantas 1-formas θ cuantas diferenciales hay de los parámetros del grupo. Aquí hay tres parámetros: a_{11}, a_{12}, a_{22} y tres diferenciales da_{11}, da_{12}, da_{22}. Se ponen, entonces, tres 1-formas θ_{ij}, así

$$\frac{da_{11}}{a_{11}} + t_{111}\omega_1 + t_{112}\omega_2 = \theta_{11}.$$
$$\frac{da_{22}}{a_{22}} + t_{221}\omega_1 + t_{222}\omega_2 = \theta_{22}.$$
$$\frac{a_{11}}{a_{22}}\left[da_{12} + t_{121}\omega_1 + t_{122}\omega_2\right] = \theta_{12}.$$

Estas formas son combinaciones lineales de las 1-formas de Maurer-Cartan y de las 1-formas del co-referencial. En cierto modo se pone a prueba la estabilidad del sistema exterior al mirar si hay variación mediante substituciones lineales. Para lo cual, se reemplazan las diferenciales en los parámetros del grupo por estas 1-formas más generales en las diferenciales exteriores $d\Omega_2$, $d\Omega_1$. Las variaciones se estabilizan mediante los coeficientes t_{ijk}. El grado de indeterminación es, precisamente, dado por el número de coeficientes t_{ijk}, libres, es decir, no sujetos a condiciones, como se muestra a continuación.

Otro modo de escribir las dos diferenciales exteriores de Ω_2, Ω_1, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
0 &= d\Omega_2 - \theta_{22} \wedge \Omega_2 \\
&= da_{22} \wedge \omega_2 + a_{22}F_2\omega_1 \wedge \omega_2 - \left[\frac{da_{22}}{a_{22}} + t_{221}\omega_1 + t_{222}\omega_2\right] \wedge a_{22}\omega_2 \\
&= da_{22} \wedge \omega_2 + a_{22}F_2\omega_1 \wedge \omega_2 - da_{22} \wedge \omega_2 - a_{22}t_{221}\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&= a_{22}(F_2 - t_{221})\omega_1 \wedge \omega_2 = 0.
\end{aligned}$$

De donde

$$t_{221} = F_2. \tag{1}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned}
0 &= d\Omega_1 - \theta_{11} \wedge \Omega_1 - \theta_{12} \wedge \Omega_2 \\
&= da_{11} \wedge \omega_1 + a_{12}\, da_{11} \wedge \omega_2 + a_{11}\, da_{12} \wedge \omega_2 + a_{11}a_{12}F_2\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&- \left[\frac{da_{11}}{a_{11}} + t_{111}\omega_1 + t_{112}\omega_2\right] a_{11}(\omega_1 + a_{12}\omega_2) \\
&- \frac{a_{11}}{a_{22}}\left[da_{12} + t_{121}\omega_1 + t_{122}\omega_2\right] a_{22}\omega_2 \\
&= da_{11} \wedge \omega_1 + a_{12}\, da_{11} \wedge \omega_2 + a_{11}\, da_{12} \wedge \omega_2 + a_{11}a_{12}F_2\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&- da_{11} \wedge \omega_1 - a_{12}\, da_{11} \wedge \omega_2 - a_{11}\, da_{12} \wedge \omega_2 \\
&- a_{11}a_{12}t_{111}\omega_1 \wedge \omega_2 + a_{11}t_{112}\omega_1 \wedge \omega_2 - a_{11}t_{121}\omega_1 \wedge \omega_2. \\
&= a_{11}[a_{12}F_2 + t_{112} - t_{121} - a_{12}t_{111}]\omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

De donde

$$t_{112} - t_{121} - a_{12}t_{111} + a_{12}F_2 = 0. \tag{2}$$

Por la ecuación (1) $t_{221} = F_2$ quedó determinado.

Por la ecuación (2) t_{112} es dependiente de t_{121}, t_{111}, a_{12}, F_2.

De los 6 coeficientes t, hay 4 libres. Se dice que el grado de indeterminación de las diferenciales exteriores del co-referencial $\Omega = \{\Omega_2, \Omega_1\}$ es 4.

El problema de equivalencia planteado puede tener solución completa. Lo cual sucede cuando el sistema de Pfaff al que da lugar el problema, resulta involutivo.

Definición. (Olver p. 355) Un sistema de Pfaff con grado de indeterminación i y caracteres reducidos de Cartan s'_1, s'_2, $\ldots$, s'_m es involutivo, si y sólo si, satisface al test de Cartan

$$s'_1 + 2s'_2 + \cdots + ms'_m = i.$$

Involutividad es equivalente a existencia de un grupo de simetría de dimensión infinita llamado más comúnmente pseudogrupo infinito dado por funciones que satisfacen sistemas diferenciales. Todos los co-referenciales involutivos con las mismas ecuaciones de estructura son equivalentes. Su grupo de simetría es transitivo.

Tal como ha sido plateado el problema de equivalencia para las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, el resultado es de tipo involutivo.

En efecto, los caracteres reducidos son $s'_1 = 2$, $s'_2 = 1$; entonces $s'_1 + 2s'_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 4$.

¿Cómo se calculan los caracteres reducidos del sistema diferencial exterior según el método, ligeramente modificado, de Olver (Definición 11.4 p. 353)?

La dimensión de la variedad subyacente es $m = 2$.

La dimensión del grupo estructural es $r = 3$.

Hay que considerar una matriz 2×3, dos líneas, tres columnas, a saber,

$$\begin{pmatrix} \theta_{22} \wedge \Omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{11} \wedge \Omega_1 & \theta_{12} \wedge \Omega_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz con las solas formas Ω es

$$\begin{pmatrix} \Omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_1 & \Omega_2 \end{pmatrix}.$$

Al reemplazar Ω_2 por 1 (primer componente de la base canónica en dimensión 2) y Ω_1 por 0, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango máximo de esta matriz es 2. Es el primer carácter reducido del sistema.

En general, se consideran k caracteres, donde $1 \le k \le m - 1$. Por lo tanto $k = 1 = 2 - 1$. El carácter s'_m se define por la relación $s'_1 + \cdots + s'_{m-1} + s'_m = r$. En el presente caso, s'_2 es definido por $s'_1 + s'_2 = 3$. Es decir, $s'_2 = 1$. Por lo tanto, los caracteres de Cartan son $s'_1 = 2$, $s'_2 = 1$. Entonces $s'_1 + 2s'_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 4$. Este número es igual al del grado de indeterminación del sistema diferencial exterior. Se tiene, pues, por el teorema fundamental de Cartan, un sistema involutivo.

Teorema. *Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden no poseen propiedades invariantes respecto de las transformaciones de contacto.*

Puede decirse también: Las transformaciones de contacto operan transitivamente; es decir, dadas dos cualesquiera ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden existen siempre transformaciones de contacto que transforman la una en la otra.

Ya fue mencionado que si una ecuación diferencial es invariante respecto de un campo de vectores, entonces, hay un algoritmo que permite separar las variables, y por lo tanto, resolver la ecuación.

Pues bien, Lie demostró, p. 106, en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que

Proposición. *Si una ecuación diferencial ordinaria de primer orden admite una transformación de contacto no trivial, entonces, es integrable mediante una cuadratura.*

3. Problema de equivalencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden respecto de las transformaciones de contacto

En lugar de la notación habitual de las coordenadas x, y, y', y'' se escribe aquí (con fines de generalización) x_1, x_2, x_3, x_4 de modo que la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden viene dada por la expresión

$$x_4 = F(x_1, x_2, x_3).$$

Un elemento de contacto de orden 2 es definido por el sistema de Pfaff

$$\begin{aligned} \omega_2 &= dx_2 - x_3\, dx_1 = 0, \\ \omega_3 &= dx_3 - x_4\, dx_1 = 0. \end{aligned}$$

Dado que $x_4 = F(x_1, x_2, x_3)$, el sistema diferencial

$$\begin{aligned} \omega_2 &= dx_2 - x_3\, dx_1 = 0, \\ \omega_3 &= dx_3 - F(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 = 0, \end{aligned}$$

liga todos los elementos de contacto de segundo orden que satisfacen la condición de ser los elementos de contacto de segundo orden de una curva en $\mathbb{E}^2$.

Toda ecuación diferencial ordinaria de segundo orden puede ser representada mediante el sistema diferencial

$$\begin{aligned} \omega_2 &= dx_2 - x_3\, dx_1, \\ \omega_3 &= dx_3 - F(x_1, x_2, x_3)\, dx_1. \end{aligned}$$

Una transformación de contacto de orden 2 es una transformación puntual de $\mathbb{E}^3$ hacia $\mathbb{E}^3$ cuyo primero y segundo prolongamiento dejan invariante la sucesión de sistemas de Pfaff

$$\begin{gathered} \{\omega_2 = 0\}, \\ \{\omega_2 = 0, \omega_3 = 0\}. \end{gathered}$$

Para completar un co-referencial de dimensión 3, se añade la 1-forma

$$\omega_1 = dx_1.$$

Entonces, se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_3\\ \omega_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -x_3\\ 0 & 1 & -F\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx_2\\ dx_3\\ dx_1\end{pmatrix}.$$

E inversamente

$$\begin{pmatrix}dx_2\\ dx_3\\ dx_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & x_3\\ 0 & 1 & F\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_3\\ \omega_1\end{pmatrix}.$$

Mediante diferenciación exterior se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}d\omega_2 &= -dx_3 \wedge dx_1 = -(\omega_3 + F\omega_1) \wedge \omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_3\\ d\omega_3 &= -dF \wedge dx_1 = -(F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + F_3\, dx_3) \wedge dx_1\\ &= F_2\omega_1 \wedge \omega_2 + F_3\omega_1 \wedge \omega_3.\end{aligned}$$

El subíndice F_i representa $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$.

El conjunto de las matrices triangulares inferiores con ningún elemento nulo sobre la diagonal principal forman un subgrupo de Lie del grupo de Lie de las matrices 3×3 con elementos reales.

¿Cómo se plantea el problema de equivalencia de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden respecto de transformaciones de contacto?

Sean:

- $x_4 = F(x_1, x_2, x_3)$ una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

  A la ecuación está asociado, el co-referencial $\Omega = \{\Omega_2, \Omega_3, \Omega_1\}$ obtenido a partir del co-referencial $\omega = \{\omega_2, \omega_3, \omega_1\}$ mediante una transformación representada por una matriz triangular con elementos no nulos en la diagonal principal. Según un teorema de Lie toda álgebra soluble es representable así. Se tiene entonces

$$\begin{pmatrix}\Omega_2\\ \Omega_3\\ \Omega_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{22} & 0 & 0\\ a_{33}a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} & a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_3\\ \omega_1\end{pmatrix},$$

  $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$, donde las a_{ij} son funciones de x_1, x_2, x_3.

Análogamente,

- $\overline{x}_4 = \overline{F}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$,

$$\begin{pmatrix}\overline{\Omega}_2\\ \overline{\Omega}_3\\ \overline{\Omega}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{a}_{22} & 0 & 0\\ \overline{a}_{33}\overline{a}_{32} & \overline{a}_{33} & 0\\ \overline{a}_{11}\overline{a}_{12} & \overline{a}_{11}\overline{a}_{13} & \overline{a}_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\omega}_2\\ \overline{\omega}_3\\ \overline{\omega}_1\end{pmatrix}.$$

El problema de equivalencia consiste en determinar condiciones necesarias y suficientes para que exista una transformación de coordenadas tales que respecto de ella, el co-referencial $\Omega = \{\Omega_2, \Omega_3, \Omega_1\}$ sea precisamente el inducido por el co-referencial $\overline{\Omega} = \{\overline{\Omega}_2, \overline{\Omega}_3, \overline{\Omega}_1\}$.

Dado que $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ indican contacto de segundo orden, el co-referencial general asociado indica, entonces, que las transformaciones consideradas preservan dichas condiciones de contacto de segundo orden.

La transformación admisible como solución del problema habrá de ser una integral general del sistema diferencial exterior $\overline{\Omega} = \Omega$. Por ello es indispensable introducir condiciones de integrabilidad, lo cual se hace mediante diferenciación exterior. Sólo se escriben los cálculos con las formas diferenciales Ω; se supone que exactamente las mismas operaciones se hacen con $\overline{\Omega}$. Informalmente, de $\overline{\Omega} = \Omega$, se sigue $d\overline{\Omega} = d\Omega$.

$$\begin{aligned} d\Omega_2 &= d(a_{22}\omega_2) = da_{22} \wedge \omega_2 + a_{22}\, d\omega_2 = da_{22} \wedge \omega_2 + a_{22}\omega_1 \wedge \omega_3 \\ &= \left[\frac{da_{22}}{a_{22}} - \frac{a_{32}}{a_{11}}\Omega_1 + \frac{a_{12}}{a_{33}}\Omega_3\right] \wedge \Omega_2 + \frac{a_{22}}{a_{11}a_{33}}\Omega_1 \wedge \Omega_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Omega_3 &= d[a_{33}(\omega_3 + a_{32}\omega_2)] \\ &= da_{33} \wedge (\omega_3 + a_{32}\omega_2) + a_{33}(d\omega_3 + da_{32} \wedge \omega_2 + a_{32}\, d\omega_2) \\ &= da_{33} \wedge (\omega_3 + a_{32}\omega_2) + a_{33}da_{32} \wedge \omega_2 + a_{33}F_2\omega_1 \wedge \omega_2 + a_{33}(F_3 + a_{32})\omega_1 \wedge \omega_3 \\ &= \left[\frac{da_{33}}{a_{33}} + \frac{a_{32} + F_3}{a_{11}}\Omega_1 + \frac{a_{13}F_2 - a_{12}a_{32} - a_{12}F_3}{a_{22}}\Omega_2\right] \wedge \Omega_3 \\ &+ \left[\frac{a_{33}\, da_{32}}{a_{22}} + \frac{a_{33}}{a_{11}a_{22}}(F_2 - a_{32}^2 - a_{32}F_3)\Omega_1\right] \wedge \Omega_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Omega_1 &= da_{11} \wedge (\omega_1 + a_{12}\omega_2 + a_{13}\omega_3) \\ &+ a_{11}(d\omega_1 + da_{12} \wedge \omega_2 + a_{12}\, d\omega_2 + da_{13} \wedge \omega_3 + a_{13}\, d\omega_3) \\ &= da_{11} \wedge (\omega_1 + a_{12}\omega_2 + a_{13}\omega_3) + a_{11}\, da_{12} \wedge \omega_2 + a_{11}\, da_{13} \wedge \omega_3 \\ &+ a_{11}a_{13}F_2\omega_1 \wedge \omega_2 + a_{11}(a_{12} + a_{13}F_3)\omega_1 \wedge \omega_3 \\ &= \frac{da_{11}}{a_{11}} \wedge \Omega_1 + \frac{a_{11}}{a_{22}}(da_{12} - a_{32}\, da_{13}) \wedge \Omega_2 + \frac{a_{11}\, da_{13}}{a_{33}} \wedge \Omega_3 \\ &+ \frac{a_{13}F_2 - a_{12}a_{32} - a_{13}a_{32}F_3}{a_{22}}\Omega_1 \wedge \Omega_2 + \frac{a_{12} + a_{13}F_3}{a_{33}}\Omega_1 \wedge \Omega_3 \\ &+ \frac{a_{11}}{a_{22}a_{33}}(a_{13}^2F_2 - a_{12}^2 - a_{12}a_{13}F_3)\Omega_2 \wedge \Omega_3. \end{aligned}$$

En la diferencial exterior $d\Omega_2$ el coeficiente de $\Omega_1 \wedge \Omega_3$ es un invariante relativo, tiene siempre el mismo valor constante. Como en él intervienen los elementos de la diagonal principal de la matriz triangular, se le da al invariante el valor

1 mediante la relación

$$a_{22} = a_{11}a_{33}.$$

Entonces,

$$\frac{da_{22}}{a_{22}} = \frac{d(a_{11}a_{33})}{a_{11}a_{33}} = \frac{da_{11}}{a_{11}} + \frac{da_{33}}{a_{33}}.$$

Se trata de establecer la estabilidad del sistema diferencial con información que se extrae de las diferenciales exteriores mediante la determinación de dos tipos de números: el primero da el grado de indeterminación de las diferenciales; el segundo son los caracteres reducidos de Cartan.

Se tienen ahora cinco parámetros: a_{11}, a_{33}, a_{32}, a_{12}, a_{13} y cinco diferenciales exteriores da_{11}, da_{33}, da_{32}, da_{12}, da_{13}.

Para averiguar los dos tipos de números se introducen cinco 1-formas: θ_{11}, θ_{33}, θ_{32}, θ_{12}, θ_{13} mediante las relaciones.

$$\begin{aligned}
\frac{da_{11}}{a_{11}} + t_{111}\omega_1 + t_{112}\omega_2 + t_{113}\omega_3 &= \theta_{11},\\
\frac{da_{33}}{a_{33}} + t_{331}\omega_1 + t_{332}\omega_2 + t_{333}\omega_3 &= \theta_{33},\\
\frac{1}{a_{11}}[da_{32} + t_{321}\omega_1 + t_{322}\omega_2 + t_{323}\omega_3] &= \theta_{32},\\
\frac{1}{a_{33}}[da_{12} - a_{32}\, da_{13} + t_{121}\omega_1 + t_{122}\omega_2 + t_{123}\omega_3] &= \theta_{12},\\
\frac{a_{11}}{a_{33}}[da_{13} + t_{131}\omega_1 + t_{132}\omega_2 + t_{133}\omega_3] &= \theta_{13}.
\end{aligned}$$

El propósito es calcular el grado de indeterminación.

Cada una de estas cinco 1-formas θ_{ij}, aparece una vez en la diferencial exterior $d\Omega_i$. Están definidas sobre $G \times \mathbb{R}^3$. Contiene cada una cuatro términos, el principal es precisamente la diferencial da_{ij}; los otros términos son combinaciones lineales de los elementos de la base del co-referencial cuyos coeficientes pueden ser determinados. Acabar la construcción de estas 1-formas es, en cierta manera, el punto clave para el problema de equivalencia de Cartan.

Al reemplazar las 1-formas θ_{ij} en las diferenciales exteriores $d\Omega_2$, $d\Omega_3$, $d\Omega_1$ algunas de las t_{ijk} resultan completamente determinadas; algunas son interdependientes y otras, finalmente no resultan condicionadas. Tal procedimiento recibe el nombre de absorción de los coeficientes de torsión o coeficientes de $\Omega_i \wedge \Omega_j$ en las diferenciales exteriores $d\Omega_i$.

Lo que interesa averiguar es el número de las t_{ijk} no condicionadas.

Olver, p. 351, da la siguiente definición.

Definición. El grado de indeterminación, $r^{(1)}$, de un co-referencial generalizado es el número de variables libres en la solución para el sistema de absorción lineal asociado.

Para llegar a conocer ese número se puede proceder de la manera que sigue.

Para la primera diferencial exterior se calcula

$$\begin{aligned}
0 &= d\Omega_2 - (\theta_{11} + \theta_{33}) \wedge \Omega_2 - \Omega_1 \wedge \Omega_3 \\
&= a_{33}\, da_{11} \wedge \omega_2 + a_{11}\, da_{33} \wedge \omega_2 + a_{11}a_{33}\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&- \left[\tfrac{da_{11}}{a_{11}} + t_{111}\omega_1 + t_{112}\omega_2 + t_{113}\omega_3 + \tfrac{da_{33}}{a_{33}} + t_{331}\omega_1 + t_{332}\omega_2 + t_{333}\omega_3\right] \wedge a_{11}a_{33}\omega_2 \\
&- [a_{11}a_{12}\omega_2 + a_{11}a_{13}\omega_3 + a_{11}\omega_1] \wedge [a_{33}a_{32}\omega_2 + a_{33}\omega_3] \\
&= a_{33}\, da_{11} \wedge \omega_2 + a_{11}\, da_{33} \wedge \omega_2 + a_{11}a_{33}\omega_1 \wedge \omega_3 - a_{33}\, da_{11} \wedge \omega_2 \\
&- a_{11}\, da_{33} \wedge \omega_2 + a_{11}a_{33}[1-1]\omega_1 \wedge \omega_3 + a_{11}a_{33}[t_{111} + t_{331} - a_{32}]\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&+ a_{11}a_{33}[-t_{113} - t_{333} - a_{12} + a_{13}a_{32}]\omega_2 \wedge \omega_3
\end{aligned}$$

De donde

$$t_{111} + t_{331} - a_{32} = 0 \tag{1}$$
$$t_{113} + t_{333} + a_{12} - a_{13}a_{32} = 0 \tag{2}$$

Para la segunda diferencial exterior se calcula

$$\begin{aligned}
0 &= d\Omega_3 - \theta_{33} \wedge \Omega_3 - \theta_{32} \wedge \Omega_2 \\
&= da_{33} \wedge (\omega_3 + a_{32}\omega_2) + a_{33}\, da_{32} \wedge \omega_2 + a_{33}F_2\omega_1 \wedge \omega_2 + a_{33}(F_3 + a_{32})\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&- \left[\frac{da_{33}}{a_{33}} + t_{331}\omega_1 + t_{332}\omega_2 + t_{333}\omega_3\right] \wedge (a_{33}\omega_3 + a_{33}a_{32}\omega_2) \\
&- \frac{1}{a_{11}}\,[da_{32} + t_{321}\omega_1 + t_{322}\omega_2 + t_{323}\omega_3] \wedge a_{11}a_{33}\omega_2 \\
&= da_{33} \wedge \omega_3 + a_{32}\, da_{33} \wedge \omega_2 + a_{33}\, da_{32} \wedge \omega_2 - da_{33} \wedge \omega_3 - a_{32}\, da_{33} \wedge \omega_2 \\
&- a_{33}\, da_{32} \wedge \omega_2 + a_{33}\,[(F_2 + a_{32}t_{331} - t_{321})\omega_1 \wedge \omega_2 + (F_3 + a_{32} + t_{331})\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&+ (t_{332} - a_{32}t_{333} + t_{323})\omega_2 \wedge \omega_3] = 0.
\end{aligned}$$

De donde

$$F_2 + a_{32}t_{331} - t_{321} = 0 \tag{3}$$
$$F_3 + a_{32} + t_{331} = 0 \tag{4}$$
$$t_{332} - a_{32}t_{333} + t_{323} = 0 \tag{5}$$

Para la tercera diferencial exterior se calcula

$$
\begin{aligned}
0 &= d\Omega_1 - \theta_{11} \wedge \Omega_1 - \theta_{12} \wedge \Omega_2 - \theta_{13} \wedge \Omega_3 \\
&= da_{11} \wedge (\omega_1 + a_{12}\omega_2 + a_{13}\omega_3) + a_{11}\, da_{12} \wedge \omega_2 + a_{11}\, da_{13} \wedge \omega_3 \\
&+ a_{11}a_{13}F_2\omega_1 \wedge \omega_2 + a_{11}(a_{12} + a_{13}F_3)\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&- \left[\frac{da_{11}}{a_{11}} + t_{111}\omega_1 + t_{112}\omega_2 + t_{113}\omega_3\right] \wedge [a_{11}a_{12}\omega_2 + a_{11}a_{13}\omega_3 + a_{11}\omega_1] \\
&- \frac{1}{a_{33}}\,[da_{12} - a_{32}\, da_{13} + t_{121}\omega_1 + t_{122}\omega_2 + t_{123}\omega_3] \wedge a_{11}a_{33}\omega_2 \\
&- \frac{a_{11}}{a_{33}}\,[da_{13} + t_{131}\omega_1 + t_{132}\omega_2 + t_{133}\omega_3] \wedge [a_{33}a_{32}\omega_2 + a_{33}\omega_3] \\
&= da_{11} \wedge \omega_1 + a_{12}\, da_{11} \wedge \omega_2 + a_{13}\, da_{11} \wedge \omega_3 + a_{11}\, da_{12} \wedge \omega_2 + a_{11}\, da_{13} \wedge \omega_3 \\
&- a_{12}\, da_{11} \wedge \omega_2 - a_{13}\, da_{11} \wedge \omega_3 - da_{11} \wedge \omega_1 - a_{11}\, da_{12} \wedge \omega_2 \\
&+ a_{11}a_{32}\, da_{13} \wedge \omega_2 - a_{11}a_{32}\, da_{13} \wedge \omega_2 - a_{11}\, da_{13} \wedge \omega_3 \\
&+ a_{11}\,[a_{13}F_2 - a_{12}t_{111} + t_{112} - t_{121} - a_{32}t_{131}]\,\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&+ a_{11}\,[a_{12} + a_{13}F_3 - a_{13}t_{111} + t_{113} - t_{131}]\,\omega_1 \wedge \omega_3 \\
&+ a_{11}\,[a_{12}t_{113} - a_{13}t_{112} + t_{123} + a_{32}t_{133} - t_{132}]\,\omega_2 \wedge \omega_3.
\end{aligned}
$$

De donde

$$a_{13}F_2 - a_{12}t_{111} + t_{112} - t_{121} - a_{32}t_{131} = 0 \tag{6}$$

$$a_{12} + a_{13}F_3 - a_{13}t_{111} + t_{113} - t_{131} = 0 \tag{7}$$

$$a_{12}t_{113} - a_{13}t_{112} + t_{123} + a_{32}t_{133} - t_{132} = 0 \tag{8}$$

En las cinco 1-formas θ_{ij} hay 15 variables t_{ijk}.

Hay ocho ecuaciones, de las cuales se puede obtener linealmente el valor de ocho de ellas, así

(1) t_{111}.	(5) t_{332}.
(2) t_{113}.	(6) t_{112}.
(3) t_{321}.	(7) t_{113}.
(4) t_{331}.	(8) t_{132}.

Quedan 7 libres. Se dice que el grado de indeterminación es 7. En la notación de Olver $r^{(1)} = 7$.

Ahora se introducen los caracteres de Cartan.

En las diferenciales exteriores figura un co-referencial $\omega = (\omega_2, \omega_3, \omega_1)$, o uno más general $\Omega = (\Omega_2, \Omega_3, \Omega_1)$, como se ha hecho en las páginas anteriores. Figuran igualmente las cinco 1-formas $\theta = (\theta_{11}, \theta_{33}, \theta_{32}, \theta_{12}, \theta_{13})$.

A las diferenciales exteriores se asocia una matriz 3×5 de modo que haya tantas líneas como formas Ω y tantas columnas como formas θ. Para el presente caso

$$\begin{pmatrix} \theta_{11}\wedge\Omega_2 & \theta_{33}\wedge\Omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{33}\wedge\Omega_3 & \theta_{32}\wedge\Omega_2 & 0 & 0 \\ \theta_{11}\wedge\Omega_1 & 0 & 0 & \theta_{12}\wedge\Omega_2 & \theta_{13}\wedge\Omega_3 \end{pmatrix}$$

A partir de esta matriz se escribe otra en la que únicamente se escriben las formas Ω, así

$$\begin{pmatrix} \Omega_2 & \Omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_3 & \Omega_2 & 0 & 0 \\ \Omega_1 & 0 & 0 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{pmatrix}$$

Se puede substituir el vector $(\Omega_2, \Omega_3, \Omega_1)$ por el primer vector de la base canónica en $\mathbb{R}^3$; se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que interesa de esta matriz es el rango, que es 3; este el carácter s'_1 de Cartan para las ecuaciones de estructura calculadas antes.

Para calcular un segundo carácter reducido de Cartan, s'_2, se escribe 2 veces la matriz anterior, cada una con un vector de modo que los vectores no sean linealmente dependientes. Así que se puede tomar el primero y el segundo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Se obtiene,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El máximo rango para esta matriz es 5. El segundo carácter reducido de Cartan viene dado por la relación

$$s'_1 + s'_2 = 5$$

Entonces $s'_2 = 5 - 3 = 2$.

El tercer carácter reducido de Cartan es dado por la relación $s'_1 + s'_2 + s'_3 = 5$. Por lo tanto $s'_3 = 0$.

Se puede aplicar ahora sí, "el poderoso criterio de involutividad de Cartan" (Olver. Teorema 15.11).

Teorema (Cartan)**.** *Considérese el problema de equivalencia con grado de indeterminación, i, caracteres reducidos de Cartan* $s'_1, \ldots, s'_{m-1}$

definidos por la relación

$$s'_1 + \cdots + s'_k = \text{máx}\left\{\text{Rango}\begin{pmatrix} L[v_1, y] \\ L[v_2, y] \\ \vdots \\ L[v_k, y] \end{pmatrix}\right\}$$

de modo que

- $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$
- $y \in M \times G \times \overline{M} \times \overline{G}$
- $1 \leq k \leq m - 1.$

Un último carácter reducido, s'_m*, es definido por la relación* $s'_1 + \cdots + s'_{m-1} + s'_m = r$*. Entonces, el sistema diferencial asociado es involutivo, si y sólo si,*

$$s'_1 + 2s'_2 + \cdots + ms'_m = i.$$

Para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y transformaciones de contacto es $m = 3$, $s'_1 = 3$, $s'_2 = 2$, $s'_3 = 0$, $i = 7$. Por lo tanto $3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 7 = 7 = i$. El sistema diferencial resultante es involutivo.

Informalmente, dice Olver, p. 354, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales se dice involutivo si es sin condiciones de integrabilidad. Para el problema de equivalencia significa la existencia de un grupo de simetría de dimensión infinita para el co-referencial considerado. Todos los co-referenciales involutivos con las mismas diferenciales exteriores son equivalentes.

Lie había demostrado este teorema por un procedimiento enteramente distinto, desde luego, al que se ha seguido aquí, que es el de Cartan.

Dado que el procedimiento de Lie se basa en la noción de transformación de contacto, sobre la cual no se ha insistido hasta ahora, es interesante considerar la demostración de Lie.

4. LIE: Las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no tienen propiedades invariantes respecto de transformaciones de contacto

En el capítulo tercero Lie define transformaciones de contacto mediante ecuaciones diferenciales.

La transformación

$$\overset{*}{x} = X(x, y, p)$$
$$\overset{*}{y} = Y(x, y, p)$$
$$\overset{*}{p} = P(x, y, p)$$

es de contacto, cuando para una función $f(x,y,p) \neq 0$ y para X, Y, P funcionalmente independientes se cumple que

$$dY - P\,dX = f(dy - p\,dx).$$

Al desarrollar la condición se obtiene

$$\begin{aligned} &Y_x\,dx + Y_y\,dy + Y_p\,dp - P(X_x\,dx + X_y\,dy + X_p\,dp) \\ &\qquad = (Y_x - PX_x)\,dx + (Y_y - PX_y)\,dy + (Y_p - PX_p)\,dp = f\,dy - fp\,dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Y_x - PX_x + fp &= 0, \\ Y_y - PX_y - f &= 0, \\ Y_p - PX_p &= 0. \end{aligned}$$

O matricialmente,

$$\begin{pmatrix} Y_x & X_x & p \\ Y_y & X_y & -1 \\ Y_p & X_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ -P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante del sistema es igual a

$$X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y).$$

Lagrange y Poisson introdujeron la notación

$$X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y) = [X, Y].$$

Proposición 1. *Sean X, Y funciones de x, y, p, independientes entre sí. Condición necesaria y suficiente para que existan dos funciones no nulas $P(x,y,p)$, $f(x,y,p)$ que cumplan la relación*

$$dY - P\,dX = f(dy - p\,dx) \text{ es que } [X,Y] = 0.$$

Entonces, f, P, son unívocamente determinadas y f no es idénticamente nula.

Proposición 2. *Sean X, Y funciones de x, y, p, independientes entre sí; sean P, f funciones de x, y, p tales que*

$$dY - P\,dX = f(dy - p\,dx).$$

Entonces,

$$[X,Y] = 0, \qquad [P,X] = f \neq 0, \qquad [P,Y] = fP.$$

Proposición 3. *Sean X, Y funciones de x, y, p, independientes entre sí tales que $[X,Y] = 0$. Si la función $P(x,y,p)$ es tal que*

$$[P,Y] - P[P,X] = 0,$$

entonces, se cumple que

$$dY - P\,dX = f(dy - p\,dx),$$

donde $f = [P, X] \neq 0$, y que las funciones X, Y, P sean independientes entre si.

Proposición 4. *Sean X, Y, P funciones de x, y, p tales que*

$$[X, Y] = 0, \qquad [P, X] = f \neq 0, \qquad [P, Y] = fP.$$

Entonces, X, Y, P son funcionalmente independientes entre sí y satisfacen la condición

$$dY - P\,dX = f(dy - p\,dx).$$

Teorema 1. *La transformación*

$$\begin{aligned} x_1 &= X(x, y, p) \\ y_1 &= Y(x, y, p) \\ p_1 &= P(x, y, p) \end{aligned}$$

es de contacto, es decir, tal que $dY - P\ dX = f(dy - p\ dx)$, si y sólo si,

$$[X, Y] = 0, \qquad [P, X] = f \neq 0, \qquad [P, Y] = fP.$$

Proposición 5. *Las funciones X, Y en una transformación de contacto están solamente sujetas a dos condiciones.*

- *Han de ser funcionalmente independientes.*
- *Han de cumplir la condición $[X, Y] = 0$.*

Entonces hay una sola transformación de contacto correspondiente.

Definición 1. Dos funciones X, Y están en *involución* cuando son tales que $[X, Y] = 0$.

Definición 2. Un *elemento lineal*, o de *contacto de primer orden*, de una curva plana está compuesto por un punto de la curva junto con la tangente a la curva en el mismo punto.

Un conjunto de elementos lineales $\{x, y, y'\}$ cumple la condición diferencial $dy - y'\ dx = 0$, si y sólo si, sus elementos son elementos lineales de una misma curva plana, o de un mismo punto del plano. (Unión de elementos, en el lenguaje de Lie).

Proposición 6. *Dos funciones X, Y funcionalmente independientes, están en involución, si y sólo si, las ecuaciones*

$$X(x, y, y') = a, \qquad Y(x, y, y') = b$$

determinan elementos que satisfacen a una misma forma de contacto, $dy - y'\ dx = 0$.

Sean X, Y dos funciones de x, y, p tales que

$$X(x,y,p) = a, \qquad Y(x,y,p) = b$$

donde a, b, son constantes cualesquiera. Por diferenciación se obtiene

$$\begin{aligned} X_x\,dx + X_y\,dy + X_p\,dp = 0, \\ Y_x\,dx + Y_y\,dy + Y_p\,dp = 0. \end{aligned}$$

Al añadir la condición de contacto $dy - p\ dx = 0$ se obtiene un sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} X_x & X_y & X_p \\ Y_x & Y_y & Y_p \\ -p & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al desarrollar el determinante del sistema por la última columna, se obtiene

$$X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y) = 0 = [X, Y].$$

Es decir, las funciones X, Y están en involución.

$X(x,y,y') = \mathit{constante}$, es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, es decir, una determinada relación entre elementos de contacto de primer orden.

Por diferenciación, se obtiene

$$X_x + y'X_y + y\text{''}X_{y'} = 0,$$

una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, a la cual satisface

$$X(x,y,y') = \mathit{constante},$$

cualquiera sea el valor de la constante.

Definición 3. $X(x,y,y') = \mathit{constante}$ es una *integral intermedia* para la ecuación

$$X_x + y'X_y + y\text{''}X_{y'} = 0.$$

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden admite infinitas integrales intermedias.

Si dos funciones $X(x,y,y') = \mathit{constante}$, $Y(x,y,y') = \mathit{constante}$, son integrales intermedias para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, entonces,

$$\begin{aligned} X_x + y'X_y + y''X_{y'} = 0, \\ Y_x + y'Y_y + y''Y_{y'} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -y''X_{y'} &= X_x + y'X_y, \\ -y''Y_{y'} &= Y_x + y'Y_y; \end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{X_{y'}}{Y_{y'}} = \frac{X_x + y'X_y}{Y_x + y'Y_y}$$

de donde,

$$X_{y'}(Y_x + y'Y_y) - Y_{y'}(X_x + y'X_y) = 0 = [X, Y].$$

Es decir, las funciones X, Y están en involución.

Proposición 7. *$X(x, y, y') = constante$, $Y(x, y, y') = constante$, donde X, Y son funcionalmente independientes, representan integrales intermedias de una misma ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, si y sólo si, están en involución.*

Proposición 8. *Si X, Y, funcionalmente independientes, son integrales intermedias de la misma ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, entonces, la integral intermedia más general es una función cualquiera de X y de Y.*

Proposición 9. *La integración de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden*

$$X(x, y, y') = constante,$$

puede hacerse mediante eliminación siempre que se conozca una función Y de x, y, y', independiente de una función X, con la cual esté en involución.

Dada $Y - F(X) = 0$, supuestas X, Y en involución, se obtiene

$$[Y - F(X), X] = 0.$$

Puede pensarse en $X = a$, $Y = b$. Más particularmente, puede ser

$$X = a, \qquad Y = F(a).$$

Proposición 10. *Si X, Y funcionalmente independientes, están en involución, entonces, toda ecuación diferencial de primer orden de la forma $Y - F(X) = 0$ es integrable mediante eliminación.*

En general, de dos funciones X, Y de las variables x, y, y' se obtiene

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y_x + y'Y_y + y''Y_{y'}}{X_x + y'X_y + y''X_{y'}}$$

donde figura y''. Esto no sucede cuando X, Y están en involución.

Proposición 11. *Condición necesaria y suficiente para que el cociente $\frac{dY}{dX}$ sea independiente de y'' es que las funciones X, Y estén en involución.*

Proposición 12. *Si X, Y funcionalmente independientes están en involución, entonces, se obtiene una única transformación de contacto de la forma*

$$\begin{aligned} x_1 &= X(x, y, y') \\ y_1 &= Y(x, y, y') \\ y_1' &= P(x, y, y') \end{aligned}$$

donde P es de la forma

$$P = \frac{dY}{dX}.$$

5. Transformación de ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante transformaciones de contacto

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en las coordenadas x, y no tienen propiedad individual alguna que sea invariante respecto de transformaciones de contacto.

De otro modo: Cada ecuación diferencial ordinaria de segundo orden mediante una propiedad de transformación de contacto puede ser aplicada sobre cualquiera otra ecuación del mismo tipo.

Si se trata de aplicar una transformación de contacto a una ecuación diferencial

$$y'' - F(x, y, y') = 0$$

hay que emplear la ecuación de contacto prolongada al segundo orden

$$\begin{aligned} x_1 &= X(x, y, y') \\ y_1 &= Y(x, y, y') \\ y_1' &= P(x, y, y') \\ y_1'' &= \frac{dy_1'}{dx_1} = \frac{dP}{dX} = \frac{P_x + y'P_y + y''P_{y'}}{X_x + y'X_y + y''X_{y'}} = Q(x, y, y', y''). \end{aligned}$$

Si P, X están en involución, se tiene que

$$[P, X] = P_{y'}(X_x + y'X_y) - X_{y'}(P_x + y'P_y);$$

entonces Q es independiente de y''.

Considérese, pues, una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$y'' - F(x, y, y') = 0$$

y dos integrales intermedias

$$u(x, y, y') = \mathit{constante}, \qquad v(x, y, y') = \mathit{constante}.$$

Considérese igualmente, una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$y_1'' - G(x_1, y_1, y_1') = 0$$

y dos integrales intermedias

$$U(x_1, y_1, y_1') = constante, \qquad V(x_1, y_1, y_1') = constante.$$

Entonces, por la Proposición 7

- u, v están en involución.
- U, V están en involución.

por la Proposición 12

- Hay una única transformación de contacto

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, y'), \\ v &= v(x, y, y'), \\ \frac{dv}{du} &= \frac{dv}{du}(x, y, y'); \end{aligned}$$

- Hay una única transformación de contacto

$$\begin{aligned} U &= U(x_1, y_1, y_1'), \\ V &= V(x_1, y_1, y_1'), \\ \frac{dV}{dU} &= \frac{dV}{dU}(x_1, y_1, y_1'); \end{aligned}$$

Al igualar término a término

$$\begin{aligned} U(x_1, y_1, y_1') &= u(x, y, y'), \\ V(x_1, y_1, y_1') &= v(x, y, y'), \\ \frac{dV}{dU}(x_1, y_1, y_1') &= \frac{dv}{du}(x, y, y'); \end{aligned}$$

se obtiene una transformación de contacto.

Esta transformación lleva $u(x, y, y')$ en $U(x_1, y_1, y_1')$ y $du = 0$ en $dU = 0$.

Ahora bien: $du = 0$ es equivalente a $y'' - F(x, y, y') = 0$ y $dU = 0$ es equivalente a $y_1'' - G(x_1, y_1, y_1') = 0$.

Proposición 13. *Cualquier ecuación diferencial ordinaria de segundo orden es transformable en cualquier ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.*

Hay, desde luego, todas las transformaciones de contacto que se desee para aplicar entre sí dos ecuaciones, dado que la condición es que se empleen integrales intermedias para construirlas.

Tales transformaciones aplican curvas integrales en curvas integrales.

De $U = u$, $V = v$ se obtiene

$$\begin{aligned} U &= H(u, v) \\ V &= J(u, v) \\ \frac{dV}{dU} &= \frac{dJ}{dH} = \frac{J_u\, du + J_v\, dv}{H\, du + H_v\, dv}. \end{aligned}$$

Proposición 14. *Hay infinitas transformaciones de contacto en el plano que aplican cualquier ecuación ordinaria de segundo orden sobre la ecuación diferencial* $y'' = 0$.

¿Cómo transformar la ecuación diferencial de las rectas del plano en sí misma?
Sea $u = y'$, integral intermedia, dado que $du = dy'$.
Sea $v = y - xy'$, integral intermedia, dado que $dv = dy - y'\, dx - x\, dy'$. Entonces

$$\frac{dv}{du} = \frac{dy - y'\, dx - x\, dy'}{dy'} = \frac{y' - y' - xy''}{y''} = -x.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_1' &= J(y', y - xy') \\ y_1 - x_1 y_1' &= H(y', y - xy') \\ -x_1 &= \frac{dJ}{dH}. \end{aligned}$$

La transformación de contacto más general que aplica rectas en rectas es:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{dJ}{dH}, \\ y_1 &= J(y', y - xy') - H(y', y - xy') \frac{dJ(y', y - xy')}{dH(y', y - xy')}, \\ y_1' &= H(y', y - xy'). \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] A. Campos, *Sur le problème d'équivalence des équations différentielles ordinaires par rapport aux transformations de contact.* (Thèses présentées a l'Université de Paris pour l'obtention du titre de Docteur de l'Universitè de Paris. 1 VII 1970. $v + 79$) pp.

[2] E. Cartan, *Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complesees.* (1932). Œuvres Complètes. Partie II. 1231 - 1304. Centre National de la Recherche Scientifique. 1984. Springer - Verlag. $xiii + 1384$ pp.

[3] E. Cartan, *Les problèmes d'equivalence.* (1937). Œuvres Complètes. 1311 - 1334. Centre National de la Recherche Scientifique. 1984. Springer - Verlag. $xiii + 1384$ pp.

[4] S. Lie, *Geometrie der Berührungstransformationen.* (1896). 1977. Chelsea. New York. $xi + 694$ pp.

[5] P. J. Olver, *Equivalence, invariants and symmetry.* 1996. Cambridge University Press. $xvi + 525$ pp.