Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XI No. 2 (2004), pp. 138–149

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GALOIS DIFERENCIAL

PRIMITIVO BELÉN ACOSTA H. Y JESÚS HERNANDO PÉREZ A. (*)

A nuestro maestro y amigo Jairo Charris Castañeda
In Memoriam

Resumen. En este artículo se muestra un bosquejo de la Teoría de Galois Diferencial también conocida como la Teoría de Galois de las Ecuaciones Diferenciales. Se presenta una minibiografía de algunos de los matemáticos implicados en el desarrollo inicial de esta teoría y se hacen comentarios sobre el actual crecimiento de la misma, mostrando algunos resultados de gran importancia.

Abstract.In this paper is shown an outline of the Differential Galois Theory, also known as Galois theory of differential equations. A short biography of some mathematicians involved in the initial development of this theory is presented, also we make some comments concerning the present grow of the theory and we show some important results.

Palabras claves: Grupos de Galois, cuerpos diferenciales, ecuaciones diferenciales lineales, Extensión de Picard - Vessiot, Wronskiano.

Key words and phrases. Galois groups, differential fields, linear differential equations, Picard - Vessiot extensions, Wronskian.

2000 Mathematics Subject Classification. 34M15.

1. Introducción

1.1. Historia. Para iniciar esta historia podemos recordar que Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) demostró en 1829 que toda ecuación polinómica irreducible de grado n con coeficientes racionales tiene n raices. Evariste Galois (1811 - 1832) demostró que estas raíces pueden calcularse a partir de los coeficientes de la ecuación polinómica y a partir de números racionales, utilizando las cuatro operaciones con éstos y las raíces de cualquier índice a condición

(*) Primitivo Belén Acosta H. y Jesús Hernando Pérez A. Escuela de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia.
E-mail: acosta@usa.edu.co jhpalcazar@multiphone.net.co .

de que la ecuación polinómica admita un grupo llamado grupo soluble. Cuando Galois discutía sobre las raíces de una ecuación, él estaba pensando en los números complejos. Más tarde algunos algebristas consideraron a $\mathbb{C}$ como campo y por ende estudiaron subcampos de $\mathbb{C}$. Naturalmente se vieron conducidos a considerar a $\mathbb{C}$ como cuerpo algebráicamente cerrado.

Mientras el matemático noruego Sophus Lie (1842 - 1899) y el matemático alemán Felix Klein (1849 - 1925) se hallaban en París, el matemático francés Camille Jordan (1838 - 1922) acababa de publicar *Traité des Substitutions et des Équations Algébriques* (Tratado de Sustituciones y de Ecuaciones Algebraicas), libro profundo en el que alcanzaba perfección matemática la teoría iniciada por Galois cuarenta años atrás. Lie, inspirado en la Teoría de Galois - Jordan, se propuso desarrollar para las ecuaciones diferenciales una teoría algebraica alcanzando resultados bastante exitosos; la forma actual de esta teoría es la llamada Teoría de Grupos de Lie.

Lie desarrolló la teoría para las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n. Igualmente estudió a fondo las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y creó, para tal caso, la teoría de las transformaciones de contacto. Para ecuaciones diferenciales parciales de orden superior dejó planteadas perspectivas que han sido confirmadas por investigaciones posteriores. Lie tenía que transponer la teoría de grupos algebráicos de Jordan a grupos de funciones para los que había que establecer condiciones de diferenciabilidad que hacían más compleja la indagación; Jordan había usado ya las transformaciones infinitamente pequeñas.

Básicamente, la Teoría de Galois Diferencial es la Teoría de Galois para las ecuaciones diferenciales. Esta teoría tuvo su origen en los trabajos de los matemáticos franceses Charles Emile Picard (1856 - 1941) y Ernest Vessiot (1865 - 1952). Las contribuciones básicas de Picard a esta teoría fueron:

* *Sur les Groupes de Transformation des Équations Différentielles Linéaires* (Sobre los Grupos de Transformaciones de las Ecuaciones Diferenciales Lineales), publicado en 1883 por la Academia de ciencias de París.
* *Sur Équations Différentielles et les Groupes Algébriques des Transformations* (Sobre las Ecuaciones Diferenciales Lineales y los Grupos Algebraicos de Transformaciones), publicado en 1887 por la Universidad de Toulouse.
* *Traité d'Analyse, Tome III* (Tratado de Análisis, Tomo III), publicado por Gauthiers - Villars en 1928.

Vessiot, por su parte, publicó muchos artículos, pero su más grande contribución fue su tesis doctoral titulada *Sur l'Intégration des Équations Différentielles Linéaires* (Sobre la Integración de las Ecuaciones Diferenciales Lineales), publicada en 1892 por parte de la Escuela Normal Superior de París.

Picard y Vessiot se propusieron crear, para las ecuaciones diferenciales, una teoría como la de Galois y Jordan para las ecuaciones polinómicas; hay quienes creen que comparado con el de Lie, el logro de Picard y Vessiot es más certero. Es posible pensar que la de teoría Picard - Vessiot, nombrada así por la influencia de estos matemáticos, es la más apropiada teoría de Galois para las ecuaciones diferenciales. Esta última afirmación no indica que el trabajo de Picard - Vessiot fuera más influyente que el de Lie. Vessiot junto con el matemático francés Arthur Tresse fueron enviados a Leipzig por la Escuela Normal Superior de París para escuchar a Lie. Tresse aplicó el método de Lie al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, siendo este trabajo premiado por parte de la Academia Jablonovski.

Vessiot también continuó su teoría con la colaboración de Jules Drach, formándose así la teoría de Drach - Vessiot que consiste en la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales parciales. En esta teoría se utilizan los pseudogrupos de transformaciones.

En fin, se puede hablar y hacer tratados extensos sobre el estudio de métodos algebraicos para analizar ecuaciones diferenciales; donde las teorías de Lie, Picard - Vessiot y Drach - Vessiot son por el momento las ramas de ese árbol. En adelante, hablaremos de la teoría de Picard - Vessiot.

En 1932, Joseph Fels Ritt (1893 - 1951) publicó el libro *Differential Equations from the Algebraic Standpoint* (Ecuaciones Diferenciales desde el Punto de Vista Algebraico), libro que le da especial tratamiento a los polinomios diferenciales y a las variedades algebraicas diferenciales. En 1950 publica el clásico *Differential Algebra* (Álgebra Diferencial), título que según él fue sugerido por Ellis Kolchin, quien fuera uno de sus asociados en la Universidad de Columbia en New York. Kolchin publica varios artículos alrededor de este tema, uno de tales lo escribió con Ritt, pero su obra cumbre fue el libro *Differential Algebra and Algebraic Groups* (Álgebra Diferencial y Grupos Algebraicos), publicado en 1973. Kolchin traslada a la teoría de Picard - Vessiot el lenguaje moderno de las extensiones de campos diferenciales, demostrando el teorema de existencia y unicidad de las extensiones de Picard - Vessiot.

Kolchin también extendió la Teoría de Galois Diferencial a algunas ecuaciones diferenciales no lineales, especiales en un cierto sentido, en donde las extensiones son denominadas fuertemente normales. Entre 1940 y 1970, la Teoría de Galois Diferencial fue estudiada solamente por la escuela de Kolchin, quien tuvo entre sus alumnos destacados a Phyllis Cassidy y Jerald Kovacic. En 1976, tres años después que Kolchin publicara su libro, Irwing Kaplansky publica *An Introduction to Differential Algebra* (Una introducción al Álgebra Diferencial), una pequeña monografía que es considerada muy buena por parte de los entendidos en la materia y que contribuyó en una forma esencial al desarrollo de este campo.

En un sentido homenaje por la muerte de Kolchin en el otoño de 1991, Andy Magid, quien se desempeñó como Instructor J.F Ritt en la Universidad de Columbia, publica en 1994 su obra *Lectures on Differential Galois Theory* (Lecciones en Teoría de Galois Diferencial). El libro de Magid es citado en cualquier libro reciente sobre este tema y es el libro que hemos tomado como guia principal en la elaboración de este artículo. Magid se desempeña actualmente como docente investigador en la Universidad de Oklahoma.

En la actualidad hay investigadores destacados trabajando en Teoría de Galois Diferencial, incluyendo algunos lógicos que fueron influenciados por los trabajos de Bruno Poizat, Anand Pillay y David Marker, quienes han contribuido al desarrollo de esta área. Los profesores Juan José Morales Ruiz (Universidad Politécnica de Cataluña) y Jean Pierre Ramis (Universidad de Tolouse), mundialmente conocidos por el teorema de Morales-Ramis, son los gestores de la aplicación de la teoría de Galois diferencial al campo de los sistemas dinámicos, haciendo importantes aportes en la mecánica celeste a través de sistemas Hamiltonianos. Kovacic, exalumno de Kolchin y profesor visitante de CUNY (City University of New York) es famoso por el algoritmo que lleva su nombre.

El gran algebrista B.H Matzat y su colaboradora Julia Hartman (ambos de la Universidad de Heidelberg, Alemania), han contribuido con la versión del problema inverso de Galois a la teoría diferencial. En la Universidad de Groningen, Marius Van der Put, quien en asocio con Michael Singer de la Universidad de Carolina del Norte, han trabajado en la Teoría de Galois de ecuaciones en diferencias publicaron en el año 2003 *Galois Theory in Linear Differential Equations* (Teoría de Galois en Ecuaciones Diferenciales Lineales). Van der Put es especialista en Grupos finitos, en este tema también ha trabajado con Felix Ulmer de la Universidad de Rennes. No podemos dejar de mencionar los aportes de B. Malgrange sobre la teoría de Galois Diferencial no lineal, y los de Katz y Deligne en las categorías tannakianas.

1.2. Pequeñas biografías de Picard y Vessiot [10].

1.2.1. **Charles Emile Picard.** Nació el 24 de julio de 1856 en París, Francia y murió el 11 de diciembre de 1941 en esta misma ciudad.

El padre de Emile Picard era el gerente de una fábrica de seda, quien murió durante el sitio de París en 1870. El sitio era una consecuencia de la Guerra Franco-alemana que empezó el 19 de julio de 1870 . Fue malo para Francia y el 19 de septiembre de 1870 los alemanes empezaron a sitiar a París. Éste era un tiempo desesperado para los habitantes de la ciudad, especialmente los más pobres, quienes por hambre mataron a sus caballos, gatos y perros. Fue durante este sitio que murió el padre de Emile. París se rindió el 28 de enero de 1871 y El Tratado de Frankfurt firmado el 10 de mayo de 1871, era una humillación para Francia.

La madre de Picard,hija de un médico, quedó en una posición sumamente difícil cuando su marido murió; tenía un segundo hijo joven, y para apoyarles la educación ella tenía que encontrar empleo. Sólo su determinación para darles una salida buena a sus hijos, a pesar de la tragedia, le permitió a Emile recibir la educación que le dio la oportunidad para lograr un puesto internacional muy alto en la matemática. La educación secundaria de Picard se inició en el Liceo Napoléon, después en el Liceo Henri IV. Extrañamente él era un alumno inteligente en casi todos los temas, particularmente en traducción griega y en poesía latina, pero detestó la matemática. Escribió que odiaba la geometría pero la aprendió de memoria para evitar ser castigado.

Fue sólo durante unas vacaciones después de completar sus estudios secundarios que Picard leyó un libro de álgebra y de repente quedó fascinado por la matemática. Presentó los exámenes para entrar a la École Polytechnique y a la École Normale Supérieure; quedó segundo y primero respectivamente en los dos exámenes. Refiriéndose a Picard, Hadamard escribió:

Como cualquier francés joven de nuestro tiempo que estaba dotado en la ciencia, él fue obligado a escoger entre el École Polytechnique, el cual en principio lo preparaba a uno para ser ingeniero, y la École Normale, con su pura orientación científica. Él escogió el último. Se dice que él tomó esta decisión después de una visita excitante a Pasteur durante la cual el padre de la bacteriología habló sobre la pura ciencia, de tal forma que el joven quedó completamente persuadido.

Picard recibió su título en 1877, siendo el mejor estudiante. Permaneció en la École Normale Supérieure durante un año mientras era empleado como un ayudante. Se posicionó como profesor en la Universidad de París en 1878 y luego profesor en Toulouse en 1879, año en el que también demostró que una función entera no constante toma cada valor un número infinito de veces, con una posible excepción. Picard usó la teoría de las funciones modulares de Hermite en la prueba de este importante resultado. En 1881 regresó a París para dar una conferencia en mecánica y astronomía en la École Normale. Por esta época, Picard fue nominado para ser miembro de número de la sección de matemáticas de la Academia de Ciencias. Era increible la habilidad extraordinaria que estaba mostrando a tal edad que aun siendo tan joven fue nominado. Ya había demostrado dos teoremas importantes que son los dos conocidos bajo el nombre de Teoremas de Picard, todavía era un poco pronto para ganar la admisión a la prestigiosa academia y tendría que esperar unos años más. En este año de su primera nominación se casó con la hija de Charles Hermite. Picard y su esposa tuvieron tres niños, una hija y dos hijos asesinados en la Primera Guerra Mundial. Sus nietos, también, fueron heridos y capturados en la Segunda Guerra Mundial.

En 1885 Picard se posesionó de la cátedra de cálculo diferencial en la Universidad de la Sorbonna en París cuando la cátedra quedó libre debido a la muerte de Claude Bouquet. Sin embargo una regulación universitaria prohibía esta vinculación a cualquiera cuya edad estuviera por debajo de treinta. Las regulaciones se reinterpretaron haciendo que Picard fuera su propio ayudante hasta que alcanzara la edad de treinta el año siguiente. En 1897 pidió intercambiar su cátedra por la de análisis y álgebra para que pudiera entrenar a los estudiantes investigadores.

Picard hizo sus contribuciones más importantes en los campos del análisis, teoría de funciones, ecuaciones diferenciales y geometría analítica. Usó métodos de aproximación sucesiva para mostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que resuelven el problema de Cauchy. Empezando en 1890, extendió propiedades de la ecuación de Laplace a las ecuaciones elípticas más generales. La solución de Picard se representó en la forma de una serie convergente.

Picard se basó en los trabajos de Abel y Riemann para relacionar el estudio de las integrales con las superficies algebraicas y para dar respuestas a preguntas relacionadas con sus propiedades topológicas que permitieron el desarrollo de una parte importante de la geometría algebraica.

La obra maestra de Picard es el *Traité d'Analyse*, publicado entre 1891 y 1896.

Es un hecho notable que entre 1894 y 1937 entrenó aproximadamente a 10000 ingenieros que estaban estudiando en la Centrale des Arts et Manufactures.

1.2.2. **Ernest Vessiot.** Nació el 8 de marzo de 1865 en Marsella, Francia y murió el 17 de Octubre de 1952 en La Bauche, Savoie, Francia.

El padre de Ernest Vessiot era un maestro de escuela, que después se convirtió en el inspector general designado de escuelas primarias. Vessiot vivió por consiguiente en un ambiente académico. Él asistió al liceo en Marsella, después presentó el examen para entrar a la École Normale Supérieure en París.

En el examen de admisión Vessiot ocupó el segundo puesto, siendo el primer puesto obtenido por Jacques Salomon Hadamard (1865 - 1963) y después de esto él estudió en la misma clase con Hadamard. Al terminar sus estudios en la École Normale Supérieure, Vessiot aceptó ser instructor en Lyon en 1887.

En 1892 presentó su tesis doctoral *Sur l'Integration des Équations Différentieles Linéaires* (Sobre la Integración de las Ecuaciones Diferenciales Lineales), trabajo que trata sobre los grupos de transformaciones lineales, en particular, del estudio de la acción de estos grupos sobre las soluciones independientes de una ecuación diferencial.

Después de recibir su doctorado, Vessiot enseñó en varios lugares, Lille, Toulouse, Lyon y finalmente París en 1910. Obtuvo el prestigioso lugar de Director del École Normale Supérieure en París y continuó sosteniendo este puesto hasta retirarse en 1935. En su papel de director dirigió la construcción de nuevos laboratorios de física en la École Normale Supérieure.

Vessiot aplicó los grupos continuos al estudio de ecuaciones diferenciales. Extendió resultados de Jules Joseph Drach (1871 - 1941) y Elie Joseph Cartan (1869 - 1951) y también aplicó las integrales de Fredholm a las ecuaciones diferencial parciales.

Vessiot fue asignado a balística durante la Primera Guerra Mundial e hizo descubrimientos importantes en este área. Fue honrado por la Academia de Ciencias en 1943.

2. Anillos y Cuerpos Diferenciales

2.1. Definiciones y ejemplos. Al final del siglo antepasado (XIX), cuando se construía una teoría análoga a la de Galois, pero para ecuaciones diferenciales, se trabajó en el siguiente problema: ¿En qué dominio se pueden formular, de manera natural, y obtener soluciones a las ecuaciones diferenciales?. Ésta fue una contribución importante a la matemática, conocida como Cuerpos diferencialmente cerrados, los cuales son a las ecuaciones diferenciales como la noción de algebráicamente cerrado es a las ecuaciones algebráicas, teoría iniciada por Ritt.

Dado R un anillo conmutativo, una derivación en R es una función $d : R \to R$ tal que:

$$\forall x, y \in R,\; d\,(x+y) = dx + dy,\; d\,(xy) = ydx + xdy \tag{1}$$

Un anillo diferencial es un anillo dotado con una derivación, si este anillo es un cuerpo se denomina cuerpo diferencial. Los elementos de R con derivada cero son llamados elementos constantes; ellos forman un subanillo de R, el cual es un cuerpo si R es un cuerpo. Si R es un dominio de integridad, entonces toda derivación sobre R se extiende unívocamente al cuerpo de fracciones por medio de la regla de la derivada del cociente:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \tag{2}$$

El lenguaje de primer orden para los cuerpos diferenciales es el mismo lenguaje de los anillos, con un símbolo de función unaria extra que denota la derivación:

$$\mathfrak{L} = (0, 1, -, d, +, \cdot)) \tag{3}$$

Normalmente escribiremos

$$x' = dx,\; x'' = d(dx),\; ...,\; x^{(n)} = \frac{d(d...(dx)...)}{n - \text{veces}} \tag{4}$$

esta última es la $n-$ésima derivada de x.

Veamos algunos ejemplos de cuerpos diferenciales:

(i) Si F es un cuerpo, F es un cuerpo diferencial en el cual todos los elementos son constantes.
(ii) Si F es un cuerpo, podemos ver que $F(X)$, el cuerpo de fracciones con coeficientes en F en la indeterminada X con la derivación formal $\frac{dR(X)}{dX}$ para fracciones, es un cuerpo diferencial.
(iii) El cuerpo de las fracciones de las series formales de potencias, $F((X))$, con la derivación usual.
(iv) El cuerpo de las funciones meromorfas sobre un subconjunto abierto y conexo del plano complejo, o más generalmente, sobre una superficie de Riemann.

De ahora en adelante consideraremos solamente los cuerpos diferenciales de característica cero.

(v) Dado un cuerpo diferencial F definimos el anillo diferencial $F[X]_d$ de polinomios diferenciales en una variable X con coeficientes en el cuerpo F, de la siguiente manera:
$$F[X]_d = F[X, X', X'', ..., X^{(n)}, ...] \tag{5}$$
es el anillo de polinomios con coeficientes en F en infinitas variables enumerables, para las cuales valen las relaciones:
$$X = X^{(0)},\ X' = X^{(1)},\ X'' = X^{(2)},\ ...,\ X^{(n)}, ... \tag{6}$$
En general, si $P(X) \in F[X]_d$, entonces
$$P(X)' = P^*(X) + \sum X^{(n+1)} \frac{\partial P}{\partial X^{(n)}}, \tag{7}$$
donde P^* denota el polinomio obtenido por derivación de los coeficientes de P (no hay que olvidar que los coeficientes de P, elementos de F, no necesariamente son constantes) y donde $\frac{\partial P}{\partial X^{(n)}}$ denota la derivada parcial en el sentido usual de P con respecto a la variable $X^{(n)}$.
Como $F[X]_d$ es un dominio de integridad, existe el cuerpo diferencial de fracciones, el cual se denota $F(X)_d$

Una primera cuestión importante es la siguiente: ¿Existe, para los cuerpos diferenciales, el concepto análogo al de cuerpo algebráicamente cerrado?, y si la respuesta es afirmativa, ¿existe la clausura diferencial de un cuerpo diferencial?. Las dos preguntas tienen respuesta afirmativa.

3. Ecuaciones diferenciales lineales en una indeterminada

3.1. Definiciones y ejemplos. Un operador diferencial lineal homogéneo sobre el cuerpo diferencial F es un operador L de la forma:
$$L = Y^{(l)} + a_{l-1}Y^{(l-1)} + ... + a_0Y^{(0)}, \tag{8}$$
donde $a_i \in F$.

Una extensión del cuerpo diferencial F es un cuerpo diferencial E que contiene a F y tal que D_E (la derivación sobre E) restringida a F es D_F, la derivación sobre F.

Para $y \in E$ y $L(y) = D^l y + a_{l-1}D^{l-1}y + ... + a_0 y$ un operador lineal homogéneo sobre F, se tiene que las soluciones de $L = 0$ en E están dadas por $\{y \in E | L(y) = 0\}$.

La primera proposición nos muestra que para una ecuación lineal diferencial L, existe E, una extensión propia de F generada por las soluciones de $L = 0$.

Proposición 3.1. *Dados F cuerpo diferencial y L operador diferencial existe $E \supseteq F$ una extensión diferencial del cuerpo F en el cual $L = 0$ tiene l soluciones algebraicamente independientes sobre F.*

Demostración. Sea $R = F[y_{1,0}, ..., y_{l.l-1}]$, un anillo polinomial sobre F en l^2 indeterminadas. Definimos una derivación sobre R por

$$D_R(y_{ij}) = y_{i.j+1} \text{ para } j < l - 1 \tag{9}$$

y

$$D_R(y_{i.l-1}) = -\sum_{k=0}^{l-1} a_k y_{i.k} \tag{10}$$

R es un dominio de integridad diferencial, extensión de F y $y_{i,0}$, con $1 \leq i \leq l$, son soluciones algebraicamente independientes de $L = 0$ en R. Se define $E = Q_R$, donde Q_R es el cuerpo de las fracciones de R. Este E es el cuerpo solicitado. □

Ejemplo 3.2. *Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos; sea $F = \mathbb{C}(e^x)$, $D = \frac{d}{dx}$ y $L = y' - y$. Entonces la proposición conduce a E extensión diferencial de $\mathbb{C}(e^x)$ que contiene una nueva solución de $y' - y = 0$. y es otra solución independiente y si $z = \frac{e^x}{y}$, $D(z) = 0$, lo cual implica que $\frac{e^x}{y}$ es una constante nueva. Note que el conjunto de constantes de un cuerpo diferencial es a su vez un subcuerpo y que el conjunto de soluciones en la extensión E de $L = 0$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de constantes y al tener nuevas constantes, cambia la estructura. Consideraremos ahora las extensiones apropiadas en la Teoría de Galois Diferencial, las llamadas extensiones de Picard-Vessiot, donde este fenómeno no ocurre.*

Definición 3.3. *Una extensión Diferencial $E \supseteq F$ es una extensión de Picard-Vessiot de F para L si*

1. *E es generado sobre F como un cuerpo diferencial por las soluciones de $L = 0$ en E.*
2. *Las constantes de E son las constantes de F.*
3. *$L = 0$ tiene l soluciones en E, las cuales son linealmente independientes sobre las constantes.*

La definición anterior es el análogo al concepto de *cuerpo de ruptura para un polinomio*, en la clásica Teoría de Galois.

Nota 3.4. *Si $E \supseteq F$ es una extensión de Picard-Vessiot de F para L y si $E \supseteq K \supseteq F$, es decir, K es un cuerpo diferencial intermedio. Entonces se sigue que también E es una extensión de Picard - Vessiot de K para L. De ahora en adelante se utilizarán las siguientes convenciones:*
C es el cuerpo de las constantes de F.
F es de característica cero.
C es algebraicamente cerrado.

El siguiente resultado nos da una condición para no admitir nuevas constantes.

Teorema 3.5. *Suponga que R es un dominio de integridad diferencial, $R \supseteq F$. Si $Q(R)$, el cuerpo de las fracciones de R, tiene una nueva constante, entonces R contiene un ideal diferencial primo no nulo.*

Demostración. Ver la referencia [7].

Corolario 3.6. *Sea $P \subseteq F[y_{i.j}]= R$, P un ideal diferencial primo maximal, donde R es como en la Proposición 3.1. Entonces $E = Q(R/P) \supseteq F$, donde E, el cuerpo de fracciones de R/P, satisface (1) y (2) de la definición de una extensión de Picard-Vessiot.*

Demostración. Como R es un anillo noetheriano, puesto que es una anillo de polinomios, existen ideales diferenciales primos maximales. Si P es uno de ellos, entonces R/P no tiene ideales diferenciales primos no nulos, luego por el Teorema 3.5; $Q(R/P)$ no tiene nuevas constantes. También se tiene que F es diferencialmente generado sobre F por las soluciones de $L = 0$, de la misma forma para R/P y E.Λ

Para garantizar la tercera condición de la definición de una extensión de Picard-Vessiot, usaremos el Wronskiano.

Definición 3.7. *Sean $y_1, ..., y_s$ elementos de un cuerpo diferencial E. Entonces*

$$W = W(y_1, ..., y_s) = \begin{vmatrix} y_1^{(0)} & \cdots & y_s^{(0)} \\ \vdots & & \\ y_1^{(s-1)} & \cdots & y_s^{(s-1)} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Tal como el wronskiano clásico usado en análisis, el Wronskiano determina la independencia lineal entre las soluciones.

Proposición 3.8. *Los elementos $y_1, ..., y_s$ de un cuerpo diferencial E son linealmente independientes sobre las constantes de E si y sólo si $W(y_1, ..., y_s) \neq 0$.*

Corolario 3.9. *$L = 0$ tiene a lo sumo l soluciones en E linealmente independientes sobre las constantes.*

Demostración. Supongamos que existen $s = l + 1$ elementos y_i, $1 \leq i \leq s$, tales que $L(y_i) = 0$, entonces la última fila del Wronskiano es una combinación lineal de las filas precedentes, de esta forma el Wronskiano es cero, y así, los elementos y_i son linealmente dependientes sobre las constantes.□

Teorema 3.10. *Sea $P \subseteq F\big[y_{i.j}\big]\big[W(y_{1,0}, ..., y_{l,0})^{-1}\big] = R\big[W^{-1}\big] = S$, P un ideal diferencial primo maximal. Entonces $E = Q(S/P) \supseteq F$ (E es el cuerpo de las fracciones de S/P) es una extensión de Picard-Vessiot de F para L.*

Demostración. Por el Teorema 3.5, E no tiene nuevas constantes. Sea y_i la imagen de $y_{i,0}$ en E, entonces $W(y_1, ..., y_l) \neq 0$, puesto que es la imagen de W la cual es una unidad en S y por tanto en S/P. Esto significa que los elementos y_i son linealmente independientes sobre C. También, E es generado sobre F como un cuerpo diferencial por la construcción hecha.□

Presentamos ahora la propiedad de normalidad para una extensión de Picard-Vessiot.

Normalidad. Supongamos que $E_i \supseteq F$, $i = 1, 2$, son extensiones de Picard-Vessiot de F para L, y que $E \supseteq F$ es una extensión sin nuevas constantes. Supongamos además que $\sigma_i : E_i \to E$ son inclusiones diferenciales tales que σ_i/F es la identidad de F para cada i. Sea V_i el espacio de las soluciones de $L = 0$ en E_i y V el espacio de las soluciones en E. Entonces $V \supseteq \sigma_i(V_i)$, ahora, teniendo en cuenta las dimensiones sobre la condición (3) para extensiones de Picard-Vessiot y por el Corolario 3.9, se tiene que $V = \sigma_i(V_i)$. Se sigue entonces de la condición (1) para extensiones de Picard-Vessiot que $\sigma_1(E_1) = \sigma_2(E_2)$.

Usando la propiedad de normalidad de las extensiones de Picard-Vessiot, podemos probar su unicidad.

Teorema 3.11. *Cualquier par de extensiones de Picard-Vessiot de F para L son isomorfas sobre F.*

Demostración. Consideremos E_1 , E_2 extensiones de Picard - Vessiot. El anillo diferencial $T = E_1 \otimes_F E_2$ es una $F-$álgebra finitamente generada, es decir, un anillo noetheriano. Sea M un ideal diferencial primo maximal en T. Entonces el cuerpo diferencial $E = Q(T/M)$ no tiene nuevas constantes,y dadas las inyecciones diferenciales $\sigma_i : E_i \to E$ tales que $\sigma_1(s) = s \otimes 1$ y $\sigma_2(e) = 1 \otimes e$, por la propiedad de normalidad se tiene que $\sigma = \sigma_2\sigma_1^{-1}$ es un isomorfismo de E_1 a E_2.Λ

El siguiente teorema muestra una propiedad básica de los grupos de Galois diferenciales:

Teorema 3.12. *Si E es una extensión de Picard-Vessiot de F para L entonces $G(E/F)$ es un grupo lineal algebraico sobre C.*

El resultado análogo al teorema clásico de la Teoría de Galois es el siguiente:

Teorema 3.13. Teorema Fundamental de la Teoría de Galois Diferencial. *Sea E una extensión de Picard-Vessiot de F por L, entonces existe una correspondencia biyectiva, invirtiendo retículos, entre*

$$\{E \subseteq K \subseteq F \mid K \text{ es un subcuerpo diferencial (con la misma derivación)}\}$$

y

$$\{G \leq G(E/F) \mid G \text{ es un subgrupo cerrado de Zariski}\}$$

dado por

$$K \mapsto (G/K) \text{ y } G \mapsto E^G.$$

Las extensiones de cuerpos intermedios de Picard-Vessiot corresponden a subgrupos normales.

Bibliografía

[1] A. Campos, *Iniciación al análisis de las ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá 1995.

[2] P. Deligne, *Categories tannakiennesA*, Prog. Math., vol. 87, Birkhäuser, Boston, MA, 1990.

[3] J. Gray, *Linear differential equations and group theory*, Birkhäuser, Boston, MA, 2000.

[4] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, 1957.

[5] E. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, 1973.

[6] M. Kuga, *Galois' dream: Group theory and differential equations*, Birkhäuser, Boston, MA, 1993.

[7] A. Magid, *Lectures on Differential Galois Theory*, University Lecture Series, vol. 7, American Mathematical Society, 1994.

[8] J.F. Ritt, *Differential algebra*, AMS. 1950.

[9] M. Van der Put, M. Singer, *Galois theory in linear differential equations*, Springer Verlag, New York, 2003.

[10] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians.