DE LA CRUZ R. 2009.Buen planteamiento local para una modificación de la ecuación Korteweg-De Vries . Revista Sigma, 9 (2). Pág. 12-16
http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/articulosIX2/2.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen IX N° 2 (2009), páginas 12-16

Buen planteamiento local para una modificación de la ecuación Korteweg-De Vries

Richard Alexander De la cruz Guerrero [1]

Abstract. In this work, we prove that the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} = \sin u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

is locally well-posed in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$ with $s > \frac{1}{2}$. This equation is a modification to Korteweg-De Vries equation which has been widely studied for its importance in fluid mechanics.

Keywords. Modification for KdV equation, Local well-posedness, Sobolev spaces, local Lipschitz condition

Resumen. En este trabajo, mostramos que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} = \sin u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

es localmente bien planteado en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{1}{2}$. Esta ecuación es una modificación de la ecuación Korteweg-De Vries (KdV) la cual ha sido ampliamente estudiada por su importancia en mecánica de fluidos.

Palabras Clave. Modificación de la ecuación KdV, Buen planteamiento local, Espacios de Sobolev, condición local de Lipschitz

Introducción

La ecuación Korteweg-De Vries (KdV), $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, modela en una dimensión espacial la propagación de ondas en la ecuación de longitud de onda en medios dispersivos. La propagación de ondas solitarias en la superficie del agua, en canales poco profundos, es un ejemplo de medio dispersivo en el que se pueden hallar este tipo de ondas. En este articulo consideramos la ecuación

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} = \sin u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

[1] Universidad Distrital Francisco José de Caldas- Universidad Central - Bogotá

en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.
Observamos de la ecuación (1) que la no linealidad $F(u) = \sin(u)$, satisface la condición local de Lipschitz $\|F(v_1) - F(v_2)\|_s \leq L(\|v_1\|_s, \|v_2\|_s) \|v_1 - v_2\|_s$ para cada $v_1, v_2 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{1}{2}$, donde $L(\cdot,\cdot)$ es una función continua , no decreciente con respecto a cada uno de sus argumentos. En particular, $\|F(v)\|_s \leq L(\|v\|_s, 0) \|v\|_s$ para todo $v \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{1}{2}$

La notación que utilizamos aquí es:

- $H^s(\mathbb{R})$ el Espacio de Sobolev de orden s
- $\|\cdot\|_s$ la norma en $H^s(\mathbb{R})$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ el espacio de Schwartz

1. Buen planteamiento local

Para cada $t \geq 0$, definimos el operador $U(t) = \left(e^{i(\xi^3-\xi)t}\widehat{u_0}\right)^{\vee} = e^{(\partial_x^3+\partial_x)t}\phi$ para todo $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Es fácil ver que $u(x,t) = U(t)u_0$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

Utilizando el método de variación de parámetros con $U(-t)$, obtenemos que

$$u(x,t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-\tau)\sin u(\tau) d\tau \tag{3}$$

Teorema 1.1. *Sea $s > \frac{1}{2}$. Entonces el problema (1) es equivalente a la ecuación integral (3). En otras palabras, si $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}))$ es una solución de (1) entonces u es solución de (3). Recíprocamente, si $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ es una solución de (3) entonces $u \in C^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}))$ y es solución de (1).*

Proposición 1.2. *Sean $u_0, v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ y $u, v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ dos soluciones del problema (1) que satisfacen $u(0) = u_0$ y $v(0) = v_0$. Si $s > \frac{1}{2}$ entonces*

$$\|u_\mu(t) - v_\mu(t)\|_s \leq \|u_0 - v_0\|_s \exp\left(L(M_s, M_s)t\right) \tag{4}$$

para todo $t \in [0,T]$ y M_s esta dado por $M_s = \max\{\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s, \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_s\}$. En particular (1) tiene al menos una solución.

Demostración. De la ecuación (3) tenemos que

$$u(t) - v(t) = U(t)(u_0 - v_0) + \int_0^t U(t-\tau)[\sin u(\tau) - \sin v(\tau)] d\tau \tag{5}$$

y puesto que $U(t)$ es unitario en $H^s(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_s &\leq \|u_0 - v_0\|_s + \int_0^t \|\sin u(\tau) - \sin v(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq \|u_0 - v_0\|_s + \int_0^t L(\|u(\tau)\|_s, \|v(\tau)\|_s) \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq \|u_0 - v_0\|_s + L(M_s, M_s) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \end{aligned}$$

y de la desigualdad de Gronwall se sigue el resultado. ☑

Teorema 1.3. *Sean* $s > \frac{1}{2}$ *y* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$. *Entonces, existe* $T = T(\|u_0\|_s, M) > 0$ *y una* $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ *solución del problema* (1).

Demostración. Para $M, T > 0$, definimos el conjunto $\mathcal{X}(M,T,\phi)$ en $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ por

$$\mathcal{X}(M,T,\phi) = \{u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R})) : \|u(t) - U(t)\phi\|_s \leq M\} \tag{6}$$

el cual dotado con la métrica $d(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_s$ es completo. Consideremos la aplicación $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{X}(M,T,\phi)$,

$$(\mathcal{A}u)(t) = U(t)\phi + \int_0^t U(t-\tau)\sin u(\tau) d\tau, \qquad u \in \mathcal{X}(M,T,\phi) \tag{7}$$

Veamos que $\mathcal{A}u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ para todo $u \in \mathcal{X}(M,T,\phi)$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u(t_1) - \mathcal{A}u(t_2)\|_s &\leq \|(U(t_1) - U(t_2))\phi\|_s + \\ &+ \left\| \int_0^{t_1} U(t_1-\tau)\sin u(\tau) d\tau - \int_0^{t_2} U(t_2-\tau)\sin u(\tau) d\tau \right\|_s \end{aligned} \tag{8}$$

Como $U(t)$ es un grupo en $H^s(\mathbb{R})$, el primer término de la derecha de la desigualdad (8) tiende a cero cuando $t_2 \to t_1$. Para el segundo término, supongamos primero que $0 < t_1 < t_2 < T$. Luego

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t_1} U(t_1-\tau)\sin u(\tau) d\tau - \int_0^{t_2} U(t_2-\tau)\sin u(\tau) d\tau \right\|_s \leq \\ &\leq \int_0^{t_1} \|[U(t_1-\tau) - U(t_2-\tau)]\sin u(\tau)\|_s d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \|U(t_2-\tau)\sin u(\tau)\|_s d\tau \end{aligned}$$

por ser $U(t)$ un grupo unitario en $H^s(\mathbb{R})$, tenemos que

$$\|[U(t_1-\tau) - U(t_2-\tau)]\sin u(\tau)\|_s \leq 2L(\|u\|_s, 0)\|u\|_s$$

del teorema de convergencia dominada se sigue

$$\lim_{t_2 \to t_1+} \int_0^{t_1} \|[U(t_1-\tau) - U(t_2-\tau)]\sin u(\tau)\|_s d\tau = 0$$

Por otro lado, nuevamente, como $U(t)$ un grupo unitario en $H^s(\mathbb{R})$ y por la condición local de Lipschitz en la no linealidad,

$$\lim_{t_2 \to t_1+} \int_{t_1}^{t_2} \|U(t_2-\tau)\sin u(\tau)\|_s d\tau \leq \lim_{t_2 \to t_1+} \sup_{[0,T]} 2L(\|u\|_s, 0)\|u\|_s (t_2 - t_1) = 0$$

Argumentos similares se usan para probar el limite cuando $t_2 \to t_1-$. Con esto se prueba que $\mathcal{A}u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ si $u \in \mathcal{X}(M,T,\phi)$.

Ahora veamos que podemos tomar T suficientemente pequeño tal que $\mathcal{A}(\mathcal{X}(M,T,\phi)) \subseteq \mathcal{X}(M,T,\phi)$. Como $u \in \mathcal{X}(M,T,\phi)$ y $U(t)$ es unitario en $H^s(\mathbb{R})$ tenemos

$$\|\mathcal{A}u(t) - U(t)\phi\|_s \leq \int_0^t \|\sin u(\tau)\|_s d\tau \leq \int_0^t L(\|u(\tau)\|_s, 0)\|u(\tau)\|_s d\tau \tag{9}$$

y además,

$$\|u(\tau)\|_s \leq \|u(\tau) - U(\tau)\phi\|_s + \|U(\tau)\phi\|_s \leq M + \|\phi\|_s, \quad \text{para todo} \quad \tau \in [0,T]$$

De este modo,

$$\|\mathcal{A}u(t) - U(t)\phi\|_s \leq L(M + \|\phi\|_s, 0)(M + \|\phi\|_s)T, \quad \text{para todo} \quad t \in [0, T]$$

así que tomaremos T tal que

$$L(M + \|\phi\|_s, 0)(M + \|\phi\|_s)T \leq M \tag{10}$$

con lo cual $\mathcal{A}u \in \mathcal{X}(M, T, \phi)$ para todo $u \in \mathcal{X}(M, T, \phi)$.

A continuación, veamos que podemos tomar T de tal forma que $\mathcal{A}$ sea una contracción sobre $\mathcal{X}(M, T, \phi)$.
Sean $u, v \in \mathcal{X}(M, T, \phi)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{A}u)(t) - (\mathcal{A}v)(t)\|_s &\leq \int_0^t \|\sin u(\tau) - \sin v(\tau)\|_s \, d\tau \leq \int_0^t L(\|u(\tau)\|_s, \|v(\tau)\|_s) \|u(\tau) - v(\tau)\|_s \, d\tau \\
&\leq L(M + \|\phi\|_s, M + \|\phi\|_s) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s \, d\tau \\
&\leq L(M + \|\phi\|_s, M + \|\phi\|_s) T d(u, v) \quad \text{para todo} \quad t \in [0, T]
\end{aligned}$$

Así, $d(\mathcal{A}u, \mathcal{A}v) \leq L(M + \|\phi\|_s, M + \|\phi\|_s)Td(u, v)$, luego tomando T de tal forma que también se tenga que

$$L(M + \|\phi\|_s, M + \|\phi\|_s)T \leq \frac{1}{2} \tag{11}$$

se sigue que $\mathcal{A}$ es una contracción en $\mathcal{X}(M, T, \phi)$.
Del Teorema del punto fijo de Banach, si T satisface (10) y (11), existe $u \in \mathcal{X}(M, T, \phi)$ punto fijo de $\mathcal{A}$. Esto demuestra el teorema. ☑

Teorema 1.4. *La aplicación $u_0 \mapsto u$ es continua en el siguiente sentido: sean $u_0^{(n)} \in H^s(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ tales que $u_0^{(n)} \to u_0^{(\infty)}$ cuando $n \to \infty$, y sean $u^{(n)} \in C([0, T_n]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0, T_n]; H^{s-3}(\mathbb{R}))$, donde $T_n = T(M, \left\|u_0^{(n)}\right\|_s)$, soluciones de (1) con $u^{(n)}(0) = u_0^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$. Para $T \in (0, T_\infty)$ (el intervalo máximo de existencia de $u^{(\infty)}$), las soluciones $u^{(n)}$ pueden ser extendidas al intervalo $[0, T]$ para todo n suficientemente grande y*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[0,T]} \left\|u^{(n)} - u^{(\infty)}\right\|_s = 0$$

Demostración. Puesto que $T(M, \|u_0\|_s)$ es una función continua por $\|u_0\|_s$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T_n > T$ para todo $n \geq N$. Entonces $u^{(n)}$ esta definida sobre $[0, T]$ para todo n. Así, $u^{(n)} \in \mathcal{X}(M, T, u_0^{(n)})$ para todo $n \geq N$ y satisface

$$\left\|u^{(n)}(t)\right\|_s \leq \left\|u_0^{(n)}(t)\right\|_s + M \leq \gamma + M \tag{12}$$

donde $\gamma = \sup \left\|u_0^{(n)}\right\|_s$. Combinando la proposición 1.2 con (12) se obtiene

$$\left\|u^{(n)} - u^{(\infty)}\right\|_s \leq \left\|u_0^{(n)} - u_0^{(\infty)}\right\|_s \exp(M_{s,n}T)$$

donde $M_{s,n} = L(M_s(u^{(n)}, u^{(\infty)}), M_s(u^{(n)}, u^{(\infty)})) \leq L(\gamma + M, \gamma + M) = \alpha < \infty$ Con lo que

$$\left\|u^{(n)} - u^{(\infty)}\right\|_s \leq \left\|u_0^{(n)} - u_0^{(\infty)}\right\|_s \exp(\alpha T)$$

esto finaliza la prueba. ☑

Teorema 1.5. *El problema (1) es **localmente bien planteado** en el sentido de Hadamard.*

Referencias

[1] Nakao Hayashi and Pavel Naumkin *On the Modified Korteweg-De Vries Equation*, Mathematical Physics, Analysis and Geometry 4: pag. 197-227, 2001.

[2] Iorio, Rafael Jr. y Viera Nunes, W. *Introdução às equações de evolução não lineares*, Rio Janeiro. IMPA (1991).

[3] Iorio, Rafael Jr. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, 2001.

[4] Iorio, Rafael Jr. *KdV, BO and Friends in Weighted Sobolev Spaces*,Function Analitic Methods for Partial Differential Equations,Springer Verlag, Vol. 1450 (1990), pp. 105 - 121.

[5] Miura, R.M. *Korteweg-de Vries equation and generalizations I: A remarkable explicit nonlinear transformation*, Journal of Mathematical Physics, vol. 9, pp. 1202-1204 (1968).

e-mail: radelacruzg.uc@gmail.com