Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XV No. 1 (2008), pp. 70–83

SOLUCIONES GENERALIZADAS EN LA TEORÍA DE CASCARONES ELÁSTICOS

ALEJANDRO GÓMEZ HENAO (*)
LEONID P. LÉBEDEV (**)
LEONARDO RENDÓN ARBELÁEZ (***)

RESUMEN. Se consideran algunos problemas de deformación de cascarones elásticos de la teoría lineal con el fin de determinar cuáles son las herramientas de matemáticas que se utilizan en mecánica y cómo influye la mecánica en las matemáticas.

PALABRAS CLAVES. Cascarones elásticos, mecánica, problemas con condiciones de frontera, existencia y unicidad de soluciones, soluciones generalizadas, mínimo del funcional de energía, espacio de energía, espacios de Sobolev.

2000 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 35Q72, 35Q99.

ABSTRACT. Some problems of deformations of the elastic shells linear theory are considered, in order to determine what are the mathematical tools utilized and what is the influence of the mechanics in the mathematics.

KEY WORDS AND PHRASES. Elastic shells, mechanics, boundary value problems, existence and uniqueness of solutions, generalized solutions, minimum of energy functional, energy space, Sobolev spaces.

(*) Alejandro Gómez Henao, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. E-mail: gomez@math.rochester.edu

(**) Leonid P. Lébedev, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. E-mail: llebedev@unal.edu.co

(***) Leonardo Rendón Arbeláez, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. E-mail: lrendona@unal.edu.co .

> Mathematics may be compared to a mill of exquisite workmanship, which grinds your stuff to any degree of fineness; but, nevertheless, what you get out depends on what you put in.
>
> Thomas Huxley (1825 - 1895) [1]

Las matemáticas no están aisladas de las otras partes de la ciencia y su desarrollo afecta el desarrollo de éstas, y éstas a su vez, influyen en las matemáticas. Este ir y venir es un proceso natural de cualquier área del conocimiento.

La mecánica generalmente es considerada parte de la física y pareciera no tener relación con las matemáticas puras, pero actualmente es considerada una rama de las matemáticas. Nació de la ingeniería, sin embargo, a través de la historia sus métodos han evolucionado y se volvieron tan rigurosos que su desarrollo propone y resuelve preguntas de tipo matemático.

Sus técnicas son complejas y usa herramientas de las matemáticas modernas como son las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) modernas. - Mas aún, las EDP se vieron afectadas por métodos que nacieron en la mecánica. - Otras áreas matemáticas que se vieron desarrolladas son el cálculo variacional, el análisis funcional y los espacios de Sóbolev. Estas teorías hacen parte esencial de la mecánica y de las EDP modernas.

La mecánica tiene dos objetivos, el primero es desarrollar modelos de los fenómenos físicos relacionados con la mecánica; se hace evidente la influencia de la ingeniería en los experimentos, los cuales, aportan las ideas para definir los conceptos. El segundo es estudiar los modelos lo más rigurosamente posible para obtener resultados . Cuando estos modelos se establecen, se estudian de la misma forma que un matemático estudia sus problemas pero con una pequeña diferencia, cuando son demasiado difíciles para resolverlos, se tratan de cambiar las hipótesis razonablemente para obtener resultados prácticos y satisfactorios.

Es notable que hay ramas de la mecánica que tienen una estructura idéntica a las matemáticas puras. Parece que a raíz de esta similitud, Hilbert enuncó su sexto problema, el cual propone representar la física, y explícitamente la mecánica clásica como una ciencia axiomática. Un intento de esta axiomatización de la mecánica clásica fue hecho por Stephan Banach en su libro "Mecánica", escrito en 1938, al inicio de su carrera como ingeniero cuando dictaba un curso de temas de mecánica. Pero el sexto problema continua sin solución, pues la mecánica lejos de ser estable evoluciona día a día como la física misma.

Usualmente es necesario que los resultados sean útiles y prácticos, por esto se formulan unos principios básicos para modelos matemáticos de mecánica que son:

---

[1] Geological Reform, 1869, published in Collected Essays, vol. 8, 1894

I. El problema debe describir algo real.
II. El problema tiene al menos una solución.
III. Si se espera que un problema de mecánica tenga una solución única, la solución de la descripción matemática del problema debe ser ésta.

El segundo y tercer inciso son preguntas de tipo matemático y tienen la misma estructura que los problemas de existencia y unicidad de una EDP con valores en la frontera .

Para los modelos de descripción de equilibrio o del movimiento de sus objetos en mecánica continua, se deben escoger:

- Las medidas de deformación.
- Las medidas de tensión.
- Las posibles relaciones entre ellas (tipo la Ley de Hook).
- Las ecuaciones de equilibrio o movimiento.

Si en el problema se incluyen influencias como temperatura, electricidad o cualquier otra influencia no mecánica, debemos considerar características distintas de los procesos y relacionarlas con otras leyes de deformación.

En este artículo consideramos el punto de vista general para ver cuales son las herramientas de matemáticas que se usan en mecánica y cómo influye la mecánica en las matemáticas, por esto se consideran algunos problemas de deformación de cascarones elásticos de la teoría lineal. El lector puede encontrar en Ciarlet [2] y [3], Destuynder [4], Lébedev [7] y Vorovich [9] casos similares.

Un cascarón C es un objeto parecido a una superficie con grosor. Algunos libros consideran los cascarones como una superficie con propiedades especiales que, al estar sometida a una carga por alguna ley definida, resiste la deformación. Claro que un cascarón es un modelo de un cuerpo sólido de la vida real como pueden serlo: cohetes, submarinos, barcos, aviones y muchos otros objetos de tres dimensiones. Por este motivo su descripción como una superficie con grosor específico no es exacta. Sin embargo, los modelos dos dimensionales son suficientes para las aplicaciones a la ingeniería.

Nosotros consideramos un cascarón como el conjunto de puntos de una superficie S junto con los puntos que están a una distancia ϵ en dirección normal y los simétricos respecto a la superficie, 2ϵ es el grosor del cascarón C. S es una superficie parametrizada por una función $\boldsymbol{\rho} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ suficientemente suave e inyectiva, donde Ω es un dominio, con frontera Lipchitz continua. En S tenemos coordenadas locales (q^1, q^2) que definen una base local en cada punto de S: $(\boldsymbol{\rho}_1 = \partial\boldsymbol{\rho}/\partial q^1, \boldsymbol{\rho}_2 = \partial\boldsymbol{\rho}/\partial q^2, \mathbf{n})$, donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria a S. Aquí se introducen la base dual $(\boldsymbol{\rho}^1, \boldsymbol{\rho}^2, \mathbf{n})$ donde $\boldsymbol{\rho}^\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta = \delta^\alpha_\beta$, es el símbolo de Kronecker.

Ahora se presenta la teoría de cascarones más común en la cual las medidas de deformación son:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}\right) - b_{\alpha\beta}u_3\,, \\
&\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = u_{3\,|\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}u_3 + b^{\tau}_{\alpha}u_{\tau|\beta} + b^{\tau}_{\beta}u_{\tau|\alpha} + b^{\tau}_{\alpha|\beta}u_{\tau}\,,
\end{aligned} \tag{1}
$$

que son llamadas medidas de pequeñas deformaciones y cambio del tensor de curvatura respectivamente. Dichas ecuaciones están escritas en términos del vector de desplazamiento $\mathbf{u}$ que en la base $(\boldsymbol{\rho}^1, \boldsymbol{\rho}^2, \mathbf{n})$ tiene componentes (u_1, u_2, u_3). En estas y en las siguientes expresiones se usa la convención siguiente. Los índices griegos varían en $\{1,2\}$ y los índices latinos varían en $\{1,2,3\}$, a menos que se diga lo contrario. Se usará la notación de geometría tensorial donde es tácita la fórmula de sumación de Einstein, esto es, si aparecen índices repetidos uno arriba y otro abajo quiere decir que se está sumando sobre el conjunto correspondiente. Si aparecen índices libres, se refiere a varias ecuaciones reemplazando los índices en el conjunto dado. Entonces, u_α se refiere a las componentes covariantes, u^α a las contravariantes de $\mathbf{u}$ en la superficie S, $u_3 = u^3$ es la componente en dirección normal a la superficie y $u_{\alpha|\beta}$ se refiere a la derivada covariante de u_α, b^α_σ son las componentes mixtas del tensor de curvatura de la superficie y $c_{\alpha\beta} = b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta}$. El lector que quiera profundizar este tema puede consultar a Ciarlet [2] y Lébedev [6]. La tensión en el cascarón es determinada por las resultantes de la tensión $T^{\alpha\beta}$ y de los momentos de flexión $M^{\alpha\beta}$, las relaciónes entre estas con $\gamma_{\alpha\beta}$; y $\rho_{\alpha\beta}$ están basadas en ley de Hook; que en nuestro caso tiene la forma:

$$
T^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = a^{\alpha\beta\tau\sigma}\gamma_{\tau\sigma}(\mathbf{u})\,, \quad M^{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{3}\epsilon^2\, a^{\alpha\beta\tau\sigma}\rho_{\tau\sigma}(\mathbf{u})\,, \tag{2}
$$

donde $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ son las componentes covariantes del tensor de constantes elásticas del cascarón.

Se omitirá, cuando no haya lugar a duda, la dependencia de $\mathbf{u}$ en las expresiones. Las ecuaciones de equilibrio del cascarón son:

$$
\left(T^{\beta\alpha} + 2b^\alpha_\tau M^{\beta\alpha}\right)_{|\beta} + b^\alpha_\tau M^{\beta\tau}|_\beta + p^\alpha = 0\,, \tag{3}
$$

$$
-M^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + p^3 = 0\,, \tag{4}
$$

donde p^k son fuerzas externas dadas. No se muestra, aquí cómo se encuentran las ecuaciones de equilibrio usando los métodos de mecánica si el lector quiere estudiarlo puede referirse a Ciarlet [2] y [3], Koiter [5] y Vorovich [9]. Reemplazando los tensores T, M de las ecuaciones de equilibrio y usando (1) y (2), tenemos tres ecuaciones escritas en términos de los desplazamientos. La primera pregunta que surge es ¿ cuáles deben ser las condiciones en la frontera del cascarón para que sean satisfechas las condiciones II y III?

Se buscan condiciones en la frontera que tengan representación física y que al mismo tiempo nos permitan encontrar una solución única del problema como problema de una EDP. La respuesta no es inmediata , las dos primeras ecuaciones de equilibrio en desplazamiento tienen segundas derivadas de u_1, u_2 y la tercera ecuación tiene derivadas de orden 4 de u_3 y derivadas de orden 3 de u_1 y u_2. En la tercera ecuación de equilibrio para una placa, que es el caso particular de las ecuaciones de este artículo, no aparecen las derivadas de tercer orden de u_1 ni de u_2 y en este caso es posible decir que deben ser 4 condiciones en frontera[2]. Se encontró que en un cascarón cualquiera el número de condiciones en la frontera también debe ser 4. Consideramos dos tipos de condiciones en la frontera, la primera es cuando la posición de la frontera está dada, condiciones de Dirichlet, y la segunda es cuando las fuerzas en la frontera están dadas. Estos dos problemas son muy parecidos a los considerados para la ecuación de Poisson con condiciones en la frontera de tipo Dirichlet o de tipo Neumann. Es posible considerar problemas mixtos, donde se tiene una combinación de estas dos condiciones, pero no lo hacemos en el artículo.

Para estudiar estos problemas con valores en la frontera se debe definir las propiedades de suavidad de las soluciones. Hace 250 años se consideraban las derivadas clásicas para que las ecuaciones de equilibrio estuvieran bien definidas. Las soluciones de este tipo se llaman soluciones clásicas y se pueden encontrar sólo para ciertos cascarones particulares. Esta situación coincide con la de EDP, donde el análisis clásico se usa sólo en cierto tipo de ecuaciones.

Hay otra clase de solución para estos problemas de EDP que se llama solución generalizada. La base para definir esta solución se conoce en mecánica desde hace mucho tiempo, pero su uso en matemáticas es relativamente reciente cambió el estudio de la teoría de EDP. Lo que en mecánica se conocía como la solución del problemas de equilibrio de cuerpos elásticos usando el principio del mínimo de energía total es equivalente a la solución generalizada. Los primeros trabajos con esta ley se basan en que todo lo que sucede en el mundo físico se hace de la manera más económica posible. Por esta razón personas como Euler estaban seguros de la existencia de ciertas integrales con puntos de mínimo, seguridad que en este momento ningún matemático tiene sin una demostración rigurosa. Para el problema de equilibrio del cascarón se buscan los desplazamientos que minimizan el funcional de energía total E dado por:

$$E(\mathbf{u}) = E_0(\mathbf{u}) - A(\mathbf{u}) \,, \tag{5}$$

[2]Este problema no es sencillo. Sophie Germain encontró una respuesta usando su conocimiento de mecánica y con esto ganó un premio de La Academia Francesa de la Ciencia en 1816, pero luego encontraron que su solución estaba errada y eran necesarias menos condiciones que las que ella proponía.

donde

$$E_0(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u})\,\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + \frac{\epsilon^3}{3}a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\mathbf{u})\,\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\right)\sqrt{a}\,d\Omega\,,$$

$$A(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega} p^i u_i \sqrt{a}\,d\Omega\,.$$

Este funcional está definido sobre el conjunto de desplazamientos admisibles, es decir, sobre las funciones que tienen ciertas propiedades de suavidad y que satisfacen las condiciones en la frontera.

El principio del mínimo de energía total es válido para todos los problemas lineales de mecánica de elasticidad y ha sido muy conocido en mecánica pero prácticamente no ha tenido influencia en la teoría EDP. Sorprendentemente, usando el cálculo variacional se obtiene, como consecuencia del mínimo de energía, que la solución satisface las ecuaciones de equilibrio, llamadas también ecuaciones de Euler-Lagrange para $E(\mathbf{u})$. Aún más, con el cálculo variacional y la ley del mínimo de energía se encuentran condiciones naturales en la frontera para los problemas con condiciones tipo Neumann. El análisis variacional también permite definir condiciones en la frontera para los problemas con condiciones mixtas. Como resultado particular se obtiene que en cada punto de la frontera basta con conocer 4 condiciones, como lo habíamos mencionado.

Ahora, nos ocupamos del problema de la suavidad de los desplazamientos admisibles, esto es el conjunto donde buscamos la solución que minimiza $E(\mathbf{u})$. La teoría clásica supone que todos los miembros de las ecuaciones de equilibrio son continuos, pero considerando el principio del mínimo de energía encontramos que esto tiene que suceder salvo por, posiblemente, un número finito de puntos. Cuando Euler estudiaba este problema puso su interés en las ecuaciones de equilibrio, sin embargo, si lo que se quiere es encontrar el mínimo del funcional cuadrático $E(\mathbf{u})$ nos damos cuenta que las condiciones son 2 derivadas de u_3 , 1 de u_1 y 1 de u_2. Para encontrar el conjunto más general consideramos las soluciones generalizadas que introdujo Sóbolev al estudiar un problema de mecánica de líquidos hace 70 años. En estos trabajos, él introduce las nociones de soluciones generalizadas, espacios de Sóbolev. En 1950 50 publicó su famoso libro [8], iniciando el cambio en la teoría de EDP.

Espacios de Sóbolev. Sea Ω un conjunto dos dimensional abierto y acotado cuya frontera es suficientemente suave. Considere el espacio $C^{k,2}(\Omega)$, esto es, el espacio de la funciones k-veces diferenciables sobre Ω tal que todas las derivadas están en $L^2(\Omega)$. Considerando que $\mathbf{j} = (j_1, j_2)$ y $|\mathbf{j}\,| = j_1 + j_2$, se define una norma de la siguiente manera:

$$\|f\|_{W^{k,2}} = \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{k} \left(\int_{\Omega} \left|\partial^{\mathbf{j}} f\right|^2 \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{k} \left\|\partial^{\mathbf{j}} f\right\|_{L^2} ,$$

Si $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, donde $f_1, f_2 \in C^{k,2}(\Omega)$, la norma se define:

$$\|\mathbf{f}\|_{W^{k,2}} = \|f_1\|_{W^{k,2}} + \|f_2\|_{W^{k,2}} \ .$$

Este espacio no es de Banach con la norma dada anteriormente, por lo que se considera el espacio completado. El espacio de Sóbolev $W^{k,2}(\Omega)$ es justamente este espacio.
Sea $H^{k,\beta}(\Omega)$ el conjunto de funciones a valor real, continuas y derivables hasta orden k, cuyas derivadas de orden k cumplen una condición de Hölder con exponente $\beta \in (0,1)$ y además están en $L^2(\Omega)$. La norma de $H^{k,\beta}(\Omega)$ está dada por la fórmula:

$$\|f\|_{H^{k,\beta}} = \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{k} \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} \left|\partial^{\mathbf{j}} f(\mathbf{x})\right| + \sum_{|\mathbf{j}|=k} \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega} \left| \frac{\partial^{\mathbf{j}} f(\mathbf{x}) - \partial^{\mathbf{j}} f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\beta}} \right| .$$

Se dice que la frontera del conjunto Ω cumple la condición del cono si existe un cono Q tal que para cualquier punto x en la frontera de Ω existe Q_x un cono congruente a Q contenido en Ω.
Ahora introducimos el concepto de derivada generalizada.

Definición 1. *Si $f \in L(\Omega)$ es una función en Ω, donde Ω es un conjunto abierto y acotado, y si existe una función $\varphi \in L(\Omega)$ tal que para toda ψ infinitamente diferenciable, con soporte compacto en Ω se tiene la siguiente igualdad:*

$$(-1)^{|\mathbf{k}|} \int_{\Omega} f \partial^{\mathbf{k}} \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} \varphi \, \psi \, d\Omega \, ,$$

entonces se le llama a φ la derivada generalizada de orden (k_1, k_2) de f o simplemente la derivada generalizada de f.

Las derivadas de los elementos del espacio de Sobolev son generalizadas. Para entender las propiedades de los elementos de este espacio, Sóbolev desarrolla el teorema de inmersión. El siguiente es su versión particular.

Teorema 1. *Sea Ω un conjunto abierto, acotado, dos dimensional cuya frontera cumple la condición del cono. Si $k > 1$ entonces, $f \in W^{k,2}(\Omega)$ implica que $f \in H^{k-2,\beta_*}(\Omega)$ para β_* tan cercano a 1 como se quiera. Además, el operador $I : W^{k,2}(\Omega) \to H^{k-2,\beta_*}(\Omega)$ es compacto y por lo tanto se tiene que, para algún $m > 0$ que no depende de f, vale la desigualdad:*

$$\|f\|_{H^{k-2,\beta_*}} \leq m \, \|f\|_{W^{k,2}} \ .$$

Si $k = 1$ entonces, $f \in W^{1,2}(\Omega)$ luego $f \in L^q(\Omega)$ para $1 < q < \infty$. Además, el operador $I : W^{k,2}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ es compacto y por lo tanto se tiene que , para algún $m > 0$ que no depende de f, vale la desigualdad:

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq m\,\|f\|_{W^{1,2}} \ .$$

Si Γ es una curva en $\overline{\Omega}$ suficientemente suave se tiene que si $f \in W^{1,2}(\Omega)$ entonces $f \in L^q(\Gamma)$ para $1 < q < \infty$ y por lo tanto existe $0 < m_1 < \infty$, que no depende de f, tal que

$$\|f\|_{L^q(\Gamma)} \leq m\,\|f\|_{W^{1,2}} \ .$$

Para una presentación más detallada de estos temas ver Adams [1] y Sóbolev [8].

1. Problema de Equilibrio con Condiciones en la Frontera del tipo Dirichlet Homogéneas

El problema de Dirichlet homogéneo para cascarones tiene las condiciones en la frontera:

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad u_2|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad u_3|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial u_3}{\partial \eta}\right|_{\partial\Omega} = 0\,, \tag{6}$$

donde η es la normal exterior unitaria de $\partial\Omega$. Para resolver el problema del mínimo del funcional $E(\mathbf{u})$ consideramos el conjunto $H = \{\mathbf{u} \in W^{1,2} \times W^{1,2} \times W^{2,2} = \mathbb{W} : \mathbf{u}$ que cumple las condiciones (6) $\}$ y sobre este conjunto definimos el concepto de solución generalizada.

Definición 2. *Decimos que $\mathbf{u} \in H$ es una solución generalizada del problema de equilibrio del cascarón C con condiciones en la frontera del tipo Dirichlet homogéneas si es un punto de mínimo de $E(\mathbf{u})$.*

Finalmente queremos usar el teorema de inmersión de Sóbolev para encontrar una solución suave del problema. Por esto consideramos la desigualdad:

$$\begin{aligned} \|u_2\|^2_{W^{1,2}} + \|u_2\|^2_{W^{1,2}} + \|u_3\|^2_{W^{2,2}} \\ \leq c \int\limits_{\Omega} \left(a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\, \gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) + \frac{\epsilon^3}{3}\, a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\, \rho_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) \right) d\Omega\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Esta desigualdad hace parte de las desigualdades del tipo de Korn y son muy importantes en la teoría de EDP. Su demostración puede encontrarse en Ciarlet [3], la cual se sustenta en la famosa desigualdad de Korn:

$$\int\limits_{\Omega} \left(u^2 + v^2 + u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2\right) d\Omega < c \int\limits_{\Omega} \left(u_x^2 + v_y^2 + (u_y + v_x)^2\right) d\Omega$$

que nació en la teoría de elasticidad y es válida para las condiciones (6).

Teniendo en cuenta la desigualdad (7) se observa que en el subespacio H podemos considerar una norma equivalente a la inducida por $\mathbb{W}$ llamada norma energética:

$$\|\mathbf{u}\|_H^2 = E_0(\mathbf{u}) \ . \tag{8}$$

La norma (8) es inducida por el producto interno:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_H = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\,\gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{v}) + \frac{\epsilon^3}{3}\,a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\,\rho_{\sigma\tau}(\mathbf{v})\right) d\Omega\,, \tag{9}$$

así que H es un espacio de Hilbert. Con esta notación el funcional de energía total tiene la forma:

$$E(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}\,, \mathbf{u}\rangle_H - A(\mathbf{u}) \ . \tag{10}$$

Según el cálculo variacional, si tenemos una solución generalizada suficientemente suave entonces es una solución clásica. Es posible que exista una solución generalizada cuando no existen soluciones clásicas, y más aún, por el teorema de unicidad que estableceremos más tarde, toda solución clásica es una solución generalizada si para esta solución la energía es finita. Con el teorema de inmersión de Sóbolev en mente regresamos a (10).
Para garantizar que A es un funcional lineal y continuo se supone que:

$$p^1, p^2 \in L^q \text{ y } p^3 \in L^1 \quad , \quad 1 < q < \infty\,, \tag{11}$$

por lo tanto tenemos que:

$$|A(\mathbf{u})| = \left|\int_\Omega p^i u_i\, d\Omega\right| \le \left\|p^1\right\|_{L^q}^2 \|u_1\|_{L^p}^2 + \left\|p^2\right\|_{L^q}^2 \|u_2\|_{L^p}^2 + \left\|p^3\right\|_{L^1}^2 \|u_3\|_{L^\infty}^2 \ .$$

Por el Teorema 1 y la desigualdad (7) tenemos que

$$|A(\mathbf{u})| < C\,\|\mathbf{u}\|_H \tag{12}$$

donde C no depende de $\mathbf{u} \in H$. Esto signfica que el funcional A es continuo en H. Por el teorema de representación Riesz se tiene que

$$A(\mathbf{u}) = 2\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0\rangle_H\,,$$

donde $\mathbf{u}_0$ es único, así que la energía total toma la forma:

$$E(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_H - 2\,\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0\rangle_H = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_H^2 - \|\mathbf{u}_0\|_H^2 \ . \tag{13}$$

De la ecuación (13) se deduce que $\mathbf{u}_0$ es el mínimo de $E(\mathbf{u})$ en H y se puede enunciar el teorema de existencia y unicidad.

Teorema 2. *La solución generalizada del problema de equilibrio del cascarón con condiciones en la frontera del tipo Dirichlet homogéneas, cuando se cumple* (11)*, existe y es única.*

En mecánica las soluciones generalizadas se llaman soluciones energéticas o soluciones débiles. Otro método para introducir las soluciones generalizadas es tener en cuenta que un funcional $e(\mathbf{v})$ tiene como punto de mínimo una solución del ecuación

$$2\left\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\right\rangle_H - A\left(\mathbf{v}\right) = 0. \tag{14}$$

Usando desigualdad (12) y el teorema de representación de Riesz, nosotros tenemos la igualdad:

$$2\left\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\right\rangle_H - A\left(\mathbf{v}\right) = 2\left\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\right\rangle_H - 2\left\langle \mathbf{v},\mathbf{u}_0\right\rangle_H = 2\left\langle \mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{u}_0\right\rangle_H = 0\,, \tag{15}$$

la cual es válida para toda $\mathbf{v} \in H$. Esto significa que el problema del mínimo de $E(\mathbf{v})$ y de la solución de la ecuación (14) en el espacio H son equivalentes porque tienen la misma solución. Entonces podemos introducir una solución generalizada del problema de equilibrio empezando con la ecuación (14).

2. Problema de Equilibrio con Condiciones en la Frontera del tipo Dirichlet no Homogéneas

Podemos estudiar problemas en mecánica usando métodos de EDP modernas, estos métodos bien hubieran podido nacer en la mecánica. Los ingenieros, una vez que observaron que los métodos de aproximación de Riesz, Galerkin y elementos finitos se acercaban a la solución generalizada, comenzaron a considerarlos como naturales.
Cuando se consideran las condiciones en la frontera del tipo Dirichlet no homogéneas:

$$u_1|_{\partial\Omega} = \phi_1\,, \quad u_2|_{\partial\Omega} = \phi_2\,, \quad u_3|_{\partial\Omega} = \phi_3\,, \quad \left.\frac{\partial u_3}{\partial \eta}\right|_{\partial\Omega} = \phi_4\,, \tag{16}$$

se intenta reducir el problema al caso anterior. Suponiendo la existencia de una función $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{W}$ que satisface las condiciones en la frontera (16) y se busca una solución de la forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0\,. \tag{17}$$

Claramente $\mathbf{v}$ debe estar en H, es decir, debe cumplir las condiciones (6). El problema del mínimo de $E\left(\mathbf{u}\right)$ se reduce al problema del mínimo del funcional: $E_1\left(\mathbf{v}\right) = \left\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\right\rangle_H + B\left(\mathbf{v}\right)$ donde $B\left(\mathbf{v}\right) = B_1\left(\mathbf{v}\right) + B_2\left(\mathbf{v}\right)$, $B_1\left(\mathbf{v}\right) = 2\left\langle \mathbf{v}_0,\mathbf{v}\right\rangle - A\left(\mathbf{v}\right)$ es un funcional lineal y continuo. Si las fuerzas pertenecen a las misma clase que en (12) y $B_2\left(\mathbf{v}\right) = \left\langle \mathbf{v}_0,\mathbf{v}_0\right\rangle_H - A\left(\mathbf{v}_0\right)$ es constante. Repitiendo el procedimiento del Teorema 2 se obtiene:

Teorema 3. *Sea $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{W}$ y las fuerzas externas satisfacen la condición* (11) *entonces existe y es único el punto de mínimo $\mathbf{v}^*$ del funcional de energía total $E\left(\mathbf{v}+\mathbf{v}_0\right)$ en H y existe una única solución generalizada $\mathbf{v}^* + \mathbf{v}_0$ del problema de equilibrio del cascarón con condiciones en la frontera fijas .*

La unicidad de la solución generalizada es consecuencia del Teorema 2.

3. El problema de equilibrio del cascarón libre

Mucho más interesante es el problema de equilibrio de un cascarón libre, es decir, se tienen fuerzas en la frontera y ésta no está fija. Este problema es muy parecido al problema del tipo Neumann para la ecuación de Poisson y sin embargo la mecánica y las matemáticas lo tratan de formas distintas.
Como se consideran fuerzas en la frontera el funcional de energía cambia. Esto se observa en $A(\mathbf{u})$, en este caso hay que considerar la ecuación para el funcional de fuerzas externas:

$$A_1(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} p^i u_i \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(g^i u_i + M_n \frac{\partial u_3}{\partial \eta} \right) ds \, , \tag{18}$$

donde g^i son las componentes del vector de distribución de fuerzas en la frontera y M_n las del momento de flexión; s es el parámetro de longitud del contorno $\partial\Omega$.
Ahora, el funcional de energía total tiene la expresión:

$$E_1(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_H - A_1(\mathbf{u}) \, . \tag{19}$$

El principio del mínimo de energía tiene la misma presentación que en los casos anteriores pero el conjunto en donde están los desplazamientos admisibles cambia dado que no hay condiciones en la frontera, sin embargo, de la misma manera se introduce una noción de solución generalizada.

Definición 3. *Se dice que* $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$ *es una solución generalizada del problema de equilibrio del cascarón libre si satisface la igualdad*

$$2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_H - A_1(\mathbf{v}) = 0 \tag{20}$$

para toda $\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

La formulación del problema de equilibrio del cascarón libre es parecida a la del problema de Dirichlet. Por lo tanto se puede pensar en el uso del Teorema 2 para probar existencia. Pero hay un problema grave: en el Teorema 2 la forma cudrática $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_H$ es un producto interno en el espacio energético pero en este problema la ecuación $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_H = 0$ tiene soluciones no triviales $\mathbf{u} = \mathbf{z} \neq 0$ que satisfacen las ecuaciones

$$\gamma^{\alpha\beta}(\mathbf{z}) = 0 \qquad \rho^{\alpha\beta}(\mathbf{z}) = 0.$$

Las funciones $\mathbf{z}$ describen el movimiento del cascarón como un cuerpo rígido en la teoría de cascarones. Desplazamientos rígidos en la teoría de cascarones, por su sentido, son aproximamente iguales a los desplazamientos rígidos de la teoría lineal de elasticidad, por eso el conjunto de todos los $\mathbf{z}$ es un espacio lineal 6-dimensional. En coordenadas generales de la superficie del cascarón el problema de hallar la forma adecuada de $\mathbf{z}$ es difícil. Es posible que los conjuntos de movimientos rígidos de la teoría de cascarones y los de 3D elasticidad sean iguales pero el problema está abierto.

Al sustituir $\mathbf{v} = \mathbf{z}$ en la ecuación (20), tenemos que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle_H = 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$. Entonces $A_1(\mathbf{z}) = 0$ para todo desplazamiento rígido $\mathbf{z}$. Esta condición necesaria tiene un sentido mecánico: todas las fuerzas externas deben ser balanceadas cuando el cascarón es rígido, tales fuerzas se llaman autobalanceadas.
Suponemos que las fuerzas externas están en autobalance y queremos aplicar la idea de la sección 1. Es decir, miramos $\|\cdot\|_H$ como una norma del espacio energético relacionado con $\mathbb{W}$. Pero cuando se verifican los axiomas de norma, vemos que para todo vector $\mathbf{z}$ de desplazamientos rígidos se tiene que $\|\mathbf{z}\|_H = 0$. Mecánicamente es claro que todas las soluciones del problema de equilibrio para el cascarón libre están definidas hasta vectores $\mathbf{z}$, esto es, si $\mathbf{v}$ es una solución entonces $\mathbf{v}+\mathbf{z}$ también lo es, para $\mathbf{z}$ arbitrario. Las ideas de mecánica muestran que es bueno fijar el desplazamiento. Así introducimos

Definición 4. *El espacio H_1 es el subespacio de los elementos $\mathbf{u}$ del espacio $\mathbb{W}$ tales que $\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{z}\, d\Omega = 0$ para todo movimiento rígido $\mathbf{z}$ del cascarón, con el producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_H$.*

Es claro que H_1 es un espacio lineal. Mas, en la teoría de cascarones que se investiga actualmente se considera a $\|\cdot\|_H$ como la norma de H_1. Desafortunadamente no sabemos si H_1 es un espacio de Banach y cuales son las propiedades de sus elementos. Los resultados que se conocen de la teoría de elasticidad dos y tres-dimensional para cuerpos elásticos libres y los resultados de Sóbolev [8] acerca de la equivalencia de normas en espacios de Sóbolev apoyan lo siguiente:

Conjetura 1. *En H_1 la norma $\|\cdot\|_H$ es equivalente a la norma de $\mathbb{W}$.*

Es claro que la conjetura puede ser valida sólo si Ω es tal que podemos aplicar los teoremas de inmersión de Sóbolev, por ejemplo si Ω cumple la condición del cono.
Ahora, para estudiar el problema de equilibrio de cascarón libre, suponiendo que la Conjetura 1 es valida, vemos que $A_1(\mathbf{u})$ es continuo en H_1 cuando:

$$p^\alpha \in L^q(\Omega)\,, \quad p^3 \in L^1(\Omega)\,, \qquad g^\alpha, M_n \in L^q(\partial\Omega)\,, \quad g^3 \in L^1(\partial\Omega) \tag{21}$$

para algún $1 < q < \infty$.
Ahora enunciamos el teorema de existencia y unicidad:

Teorema 4. *Si son válidas*
i) Conjetura 1,
ii) las suposiciones (21),
iii) las fuerzas están en autobalance
entonces en H_1 existe un punto $\mathbf{u}$ de mínimo de $E_1(\mathbf{u})$ que es único. El problema de equilibrio del cascarón libre tiene una solución generalizada de la forma $\mathbf{u}_1 + \mathbf{z} \in H$ donde $\mathbf{z}$ es un desplazamiento rígido y arbitrario.

Demostración La demostración prácticamente repite la demostración del Teorema 2. Usando el Teorema 1 y las propiedades (21) de las fuerzas tenemos que

$$|A_1(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{v}\|_H$$

con constante C que no depende de $\mathbf{v} \in H_1$, entonces A_1 es un funcional lineal y continuo. Por el teorema de representación de Riesz tenemos que existe un único $\mathbf{u}_1 \in H_1$ tal que

$$A_1(\mathbf{v}) = 2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle_H .$$

La ecuación (21) toma la forma

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_H - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle_H = 0$$

para todo $\mathbf{v} \in H_1$, entonces la solución del problema intermedio es $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ y la solución del problema de equilibrio del cascarón libre es $\mathbf{u}_1 + \mathbf{z}$. Lo que muestra el Teorema.

Teoremas parecidos a los Teoremas 2 y 3 el lector los puede encontrar en Ciarlet [3]. El Teorema 4 se basa en la Conjetura 1 . La Conjetura 1 esta abierta al igual que la determinación del conjunto de los desplazamientos rígidos del cascarón en esta teoría.

El lector se dará cuenta que si la condición de autobalance no se cumple, el problema es irresoluble. Mecánicamente esta hipótesis de autobalance tiene un significado esencial para el problema. El lector que conozca la teoría del problema de Neumann para la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en Ω cuando $\partial u / \partial \eta|_{\partial\Omega} = \phi$ sabe que para resolver esta ecuación es necesario que se cumpla $\oint_{\partial\Omega} \phi \, ds = 0$, la cual es justamente la condición de autobalance de las fuerzas externas, que se representan con ϕ.

Habiendo visto estos tres casos podemos hacer un balance del aporte de las ideas de las matemáticas y la mecánica para resolver problemas. En el primer caso, tenemos un problema físico de equilibrio que lo transformamos en buscar el mínimo de un funcional. Para encontrar el mínimo se apela al análisis funcional, al cálculo variacional y a los espacios de Sóbolev; así la mecánica aporta herramientas, que se desarrollan matemáticamente sin propósito aparente, pero que luego vuelven a la mecánica para resolver algunos problemas. En el caso del cascarón libre se tiene que el problema es imposible de resolver si no se agregan condiciones adicionales. Estas condiciones no son aparentes si no hay una interpretación mecánica del problema. De esta forma se encuentra la solución de un problema matemático con la ayuda de las ideas mecánicas.

Podemos decir, finalmente, que el intercambio de ideas de mecánica y EDP es un hecho enriquecedor y, además, nos permite estudiar algunos problemas prácticos de una manera relativamente fácil que de otra forma serían muy difíciles, si no imposibles de resolver.

Referencias

[1] R.A. Adams & J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsevier, 2003, 2005.
[2] Ph.G. Ciarlet, *An Introduction to Differential Geometry with Applications to Elasticity*, Springer, 2005.
[3] Ph.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol III: Theory of Shells*, North-Holland, 2000.
[4] Ph. Destuynder & M. Salaun, *Mathematical Analysis of Thin Plate Models*, Springer, 1996.
[5] W.T. Koiter, *On the foundations of the linear theory if this elastic shells*, Proc. Kon, Ned. Acad. Wetensch. B73, 1970, 169-175.
[6] L.P. Lebedev & M.J. Cloud, *Tensor Analysis*, World Scientific, 2003.
[7] L.P. Lebedev & I.I. Vorovich, *Functional Analysis in Mechanics*, Springer, 2003.
[8] S.L. Sobolev, *Some applications of function al analysis in mathematical phisics*, Leningrad State University, 1950 (English translation: Amer.Mathematical Soc., 1991).
[9] I.I. Vorovich, *Nonlinear Theory of Shallow Shells*, Springer-Verlag, 1999.

Recibido: Febrero de 2008. Aceptado para publicación: Junio de 2008