Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XV No. 1 (2008), pp. 36–41

UN OPERADOR COMPACTO EN UN SUBCONJUNTO CERRADO DE $H_1^2(S^n)$

CLAUDIA GRANADOS PINZÓN (*)
WILSON OLAYA LEÓN (**)

Resumen. En este artículo consideramos el problema de la existencia de una subsucesión convergente de una sucesión en un subconjunto cerrado del espacio de Hilbert $H_1^2(S^n)$. Más precisamente, demostramos que cierta funcional J_p Fréchet diferenciable en un subconjunto cerrado del espacio de Hilbert $H_1^2(S^n)$ es compacta en un sentido análogo a la condición Palais-Smale usada en espacios de Banach.

Palabras claves. Espacio de Hilbert, convergencia fuerte y débil, sucesión convergente, operador compacto.

2000 Mathematics Subject Classification: 47B07, 47B37.

Abstract. In this paper we consider the problem of the existence of a sequence's convergent subsequence in a closed subset of Hilbert space $H_1^2(S^n)$. More precisely, we prove that certain Fréchet differentiable J_p in a closed subset of Hilbert space $H_1^2(S^n)$ is compact in similarly of the Palais-Smale condition used in a Banach space.

Keywords: Hilbert space, strong and weak convergence, convergent sequence, compact functional.

Introducción

Sea $S^n = \left\{(x_1, x_2, .., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$, $n \geq 3$ la frontera de la bola unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$ y consideremos

$$H_1^2(S^n) = \{u \in L^2(S^n) : \nabla u \text{ existe y } \nabla u \in L^2(S^n)\}$$

(*) Claudia Granados Pinzón, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, A.A. 432. E-mail: cigranad@uis.edu.co

(**) Wilson Olaya León, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, A.A. 432. E-mail: wolaya@uis.edu.co.

el espacio de Hilbert con norma $||u||_{H_1^2(S^n)} = \left(\int_{S^n}(|\nabla u|^2 + \frac{n(n-2)}{4}u^2)dV\right)^{\frac{1}{2}}$. Sean $R : S^n \to \mathbb{R}$ una función continua,

$$S = \left\{u \in H_1^2(S^n) : ||u||^2 = \frac{n(n-2)}{4}|S^n|, u \geq 0\right\},$$

donde $|S^n|$ es el volumen de S^n, y $J_p : S \subset H_1^2(S^n) \to \mathbb{R}$ la funcional dada por $J_p(u(x)) = \int_{S^n} R(x)u^{p+1}(x)dV$, para $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$. En el resultado principal de este artículo demostramos que J_p es compacta en un sentido análogo a la condición Palais-Smale en un espacio de Banach. Este hecho garantiza la existencia de un valor crítico de J_p en S, más aún, esto demuestra la existencia de una solución de la ecuación diferencial

$$-\triangle u + \frac{n(n-2)}{4}u = R(x)u^p, \quad x \in S^n, \quad u > 0, \tag{0.1}$$

para $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$, donde $n \geq 3$ y $R(x) = \frac{n-2}{4(n-1)}K(x)$, ver [2] pág 73.
Cuando $p = \frac{n+2}{n-2}$ la ecuación (0.1) es conocida como la ecuación que prescribe la curvatura escalar sobre la $n-$esfera unitaria con la métrica euclidiana, (S^n, g_0). Esto significa que se puede encontrar una métrica $g = u^{\frac{4}{n-2}}g_0$ conforme a la métrica euclidiana g_0 con curvatura escalar $K(x)$. Este es un problema clásico en geometría diferencial. Si $K(x)$ es constante el problema es conocido como la conjetura de Yamabe, y fue estudiado por Yamabe (1960), Trüdinger (1968), Aubin (1976) y finalmente demostrado por Richard Shoen en 1984, ver [7] y [8]. Para una función de curvatura $K(x)$ no constante el problema sigue sin resolver. Aunque son numerosos los intentos y los resultados concluyentes encontrados en relación al problema, en la actualidad sigue abierto ya que la gran dificultad en la solución de estos problemas es la falta de compacidad entre los encajamientos de los espacios de Sobolev asociados. En [6], C. Granados presenta una familia de métricas conformes a la métrica euclidiana en la $n-$esfera unitaria tal que $K(x) = n(n-1)$ sea su curvatura escalar.

1. Preliminares

Sea $E : H_1^2(S^n) \to \mathbb{R}$ la funcional $E(u) = ||u||^2_{H_1^2(S^n)}$. Observe que S es un subconjunto de $H_1^2(S^n)$ con norma constante y además que $S = \left\{u \in H_1^2(S^n) : E(u) = \frac{n(n-2)}{4}|S^n|, u \geq 0\right\}$, donde $|S^n|$ es el volumen de S^n. Empezaremos mostrando que S es un subconjunto cerrado del espacio de Hilbert $H_1^2(S^n)$, para lo cual, basta mostrar que S contiene todos sus puntos de acumulación.

Afirmación 1.1. $S = \left\{u \in H_1^2(S^n) : ||u||^2 = \frac{n(n-2)}{4}|S^n|, u \geq 0\right\}$ *es cerrado.*

En efecto, sea $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en S donde $u_i \to u$ fuertemente en $H_1^2(S^n)$, entonces

$$o(1) = ||u_i - u||^2 = ||u_i||^2 - 2\,\langle u_i, u\rangle_{H_1^2(S^n)} + ||u||^2 = ||u_i||^2 - ||u||^2 + o(1),$$

$o(1)$ denota una cantidad pequeña.[1] Luego, $||u_i|| = ||u||$ y por lo tanto $u \in S$. Así S es cerrado. □

Definición 1.2. *Sean A y B espacios normados sobre $\mathbb{R}$. El operador $J_p : A \to B$ es llamado Lipschitz continuo si y solo si existe una constante $c > 0$ tal que*

$$||J_p(u) - J_p(v)|| \leq c||u - v||$$

para todo $u, v \in A$.

Ejemplo 1.3. *Sea $R : S^n \to \mathbb{R}$ una función continua. La funcional $J_p : S \subset H_1^2(S^n) \to \mathbb{R}$ dada por $J_p(u(x)) = \int_{S^n} R(x)u^{p+1}(x)dV$ es Lipschitz continua, para $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$.*
En efecto, sean $u, v \in H_1^2(S^n)$. Entonces

$$\begin{aligned} |J_p(u) - J_p(v)| &\leq c_1 \left| \int_{S^n} u^{p+1}dV - \int_{S^n} v^{p+1}dV \right| \\ &= c_1 \left| ||u||^{p+1}_{L^{p+1}(S^n)} - ||v||^{p+1}_{L^{p+1}(S^n)} \right| \\ &\leq c_2 \left| ||u||_{L^{p+1}(S^n)} - ||v||_{L^{p+1}(S^n)} \right| \\ &\leq c_2||u - v||_{L^{p+1}(S^n)} \leq c_3||u - v||_{H_1^2(S^n)}. \end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene ya que $H_1^2(S^n) \subset L^r(S^n)$, con $1 \leq r < \frac{2n}{n-2}$. Así, J_p es Lipschitz continua. □

Definición 1.4. *Sean A y B espacios de Banach. Un operador lineal acotado $J_p : A \to B$ es compacto si toda sucesión acotada $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ tiene una subsucesión tal que $J_p(u_i)$ converge en B.*

Lema 1.5. *Sean $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ y $L(T_{u_i}S, \mathbb{R})$ el conjunto de transformaciones lineales de $T_{u_i}S$, el espacio tangente de S en u_i, en $\mathbb{R}$. El operador $J_p' : S \to L(T_{u_i}S, \mathbb{R})$ es compacto.*

Demostración. Sea $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $S \subset H_1^2(S^n)$. Por la definición de S, $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es acotada. Dado que $H_1^2(S^n) \subset L^r(S^n)$, donde $1 \leq r < \frac{2n}{n-2}$ y $L^r(S^n) \subset L^q(S^n)$ si $1 \leq q < r$ (ver [1] pág. 55). Entonces existe una subsucesión de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, denotada de igual forma, y $u \in H_1^2(S^n)$ tal que

$$u_i \rightharpoonup u \;\text{ débilmente en }\; H_1^2(S^n)$$

y

$$u_i \to u \;\text{ fuertemente en }\; L^r(S^n),\; 1 \leq r < \frac{2n}{n-2}.$$

[1]Una sucesión a_n es o(1) cuando $n \to \infty$ si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Así, para todo $v \in H_1^2(S^n)$

$$\begin{aligned}
||J_p'(u_i) - J_p'(u)|| &= \sup_{||v||\leq 1} |J_p'(u_i)v - J_p'(u)v| \\
&= \sup_{||v||\leq 1} \left| \int_{S^n} Ru_i^p v dV - \int_{S^n} Ru^p v dV \right| \\
&\leq c_1 \sup_{||v||\leq 1} \int_{S^n} |u_i^p - u^p||v| dV \\
&\leq c_1 \sup_{||v||\leq 1} \left(\int_{S^n} |v|^{p+1} dV \right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{S^n} |u_i^p - u^p|^{\frac{p+1}{p}} dV \right)^{\frac{p}{p+1}} \\
&\leq c_1 ||u_i^p - u^p||_{L^{\frac{p+1}{p}}(S^n)}.
\end{aligned}$$

Luego, $J_p'(u_i)$ tiene una subsucesión convergente en S. Por lo tanto J_p' es compacto. $\square$

2. Resultado Principal

Lema 2.1. *Si $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ y $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $S \subset H_1^2(S^n)$, S definido como antes, y $J_p(u_i)$ acotado en $\mathbb{R}$ con*

$$J_p'(u_i)|_{T_{u_i}S} \to 0, \text{ cuando } i \to \infty \tag{2.1}$$

entonces $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en S.

Demostración. Al igual que en la prueba del Lema 1.5 tenemos por la definición de S que $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es acotada en $S \subset H_1^2(S^n)$. Además, puesto que $H_1^2(S^n) \subset L^r(S^n)$, donde $1 \leq r < \frac{2n}{n-2}$, y $L^r(S^n) \subset L^q(S^n)$ si $1 \leq q < r$ (ver [1] pág. 55) existe una subsucesión de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, denotada de igual forma y $u \in H_1^2(S^n)$ tal que

$$u_i \rightharpoonup u, \text{ débilmente en } H_1^2(S^n) \tag{2.2}$$

y

$$u_i \to u \text{ fuertemente en } L^r(S^n),\ 1 \leq r < \frac{2n}{n-2}. \tag{2.3}$$

Por el Lema 1.5 y por (2.1) tenemos que

$$J_p'(u)v = 0, \tag{2.4}$$

donde $u \in S$ y $v \in T_uS$. De la definición de E en S y por (2.4), tenemos que

$$J_p'(u)v = \lambda E'(u)v, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ahora, supongamos que $v \in (T_uS)^\perp$, donde $(T_uS)^\perp$ es el espacio ortogonal a T_uS. Como $(T_uS)^\perp$ tiene dimensión uno, entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $J_p'(u)v =$

$\lambda E'(u)v$.
Así,

$$J'_p(u)v = \lambda E'(u)v,$$

para todo $v \in H_1^2(S^n)$ y $\lambda \neq 0$.

Sea $\gamma_n = \frac{n(n-2)}{4}$ y como $J'(u)v = (p+1)\int_{S^n} Ru^p v dV$ y $E'(u)v = 2\int_{S^n}(\nabla u \nabla v + \gamma_n uv)dV$ entonces, si $v_i = u_i - u$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{S^n} \left(Ru_i^p v_i - \lambda \nabla u_i \nabla v_i - \lambda \gamma_n u_i v_i\right) dV \\
&= \int_{S^n} \left(R(v_i+u)^p v_i - \lambda \nabla (v_i+u) \nabla v_i - \lambda \gamma_n (v_i+u) v_i\right) dV \\
&= \int_{S^n} R(v_i+u)^p v_i dV - \lambda \int_{S^n} (|\nabla v_i|^2 + \nabla u \nabla v_i + \gamma_n v_i^2 + \gamma_n u v_i) dV \\
&= \int_{S^n} R(v_i+u)^p v_i dV - \lambda ||v_i||^2_{H_1^2(S^n)} - \lambda \left\langle u, v_i \right\rangle_{H_1^2(S^n)} \\
&= \int_{S^n} R(v_i+u)^p v_i dV - \lambda ||v_i||^2_{H_1^2(S^n)} - \lambda \left\langle u, u_i \right\rangle_{H_1^2(S^n)} + \lambda \left\langle u, u \right\rangle_{H_1^2(S^n)} \\
&= \int_{S^n} R(v_i+u)^p v_i dV - \lambda ||v_i||^2_{H_1^2(S^n)} + o(1),
\end{aligned}$$

la última igualdad se tiene puesto que $u_i \rightharpoonup u$ débilmente en $H_1^2(S^n)$.
Ahora, puesto que R es acotada en S^n, se tiene que

$$\lambda ||v_i||^2_{H_1^2(S^n)} = \int_{S^n} R(v_i+u)^p v_i dV + o(1) \leq C \int_{S^n} (v_i+u)^p v_i dV + o(1).$$

Por otra parte, $w_i = u_i^p$ pertenece a $L^q(S^n)$ con $q = \frac{p+1}{p}$ puesto que

$$\int_{S^n} |w_i|^q dV = \int_{S^n} |u_i|^{p+1} dV < \infty.$$

Además, como $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p+1} = 1$, tenemos que

$$||w_i v_i||_{L^1(S^n)} \leq ||w_i||_{L^q(S^n)} ||v_i||_{L^{p+1}(S^n)} = ||u_i||^p_{L^{p+1}(S^n)} ||v_i||_{L^{p+1}(S^n)}.$$

Luego, por lo anterior y (2.3) se tiene que

$$||w_i v_i||_{L^1(S^n)} = o(1).$$

Lo cual implica que

$$\lambda ||v_i||_{H_1^2(S^n)} \leq o(1).$$

En consecuencia, como $\lambda \neq 0$ tenemos que

$$||v_i||_{H_1^2(S^n)} \leq o(1).$$

Así, $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en $S \subset H_1^2(S^n)$. $\square$

Bibliografía

[1] T. Aubin, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer-Verlag Berlin Hiedelberg New York, 1998.

[2] W. Chen and C. Li, *Prescribing scalar curvature on S^n*, Pacific Journal of Mathematics, vol 199, 2001, pág. 61-78.

[3] L. Evans, *Partial differential equations*, vol 19, America Mathematical Society Providence, Rhode Islan, 1998.

[4] G. García, H.H. Gómez, J.R. Quintero y C. Rodriguez, *Infinitas soluciones de una ecuación semilineal elíptica con exponente menor que el exponente de Sobolev*, Lecturas Matemáticas, Sociedad Colombiana de Matemáticas, vol. XII, Números 1-2-3, Santafé de Bogotá, 1991.

[5] C. Granados, Tesis de maestría: *Sobre la existencia de una métrica conforme a la métrica euclidiana en la $n-$esfera*, Universidad del Valle, 2005.

[6] C. Granados, *Un caso particular del problema de prescribir la curvatura escalar en S^n*, Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Escuela Regional de Matemáticas, vol. XV, N° 1, Santiago de Cali, 2007.

[7] R. Schoen y S. Yau, *Lectures on Differential Geometry,* International Press Publications, Boston, 1994, pág. 183-229.

[8] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature.* Journal Differential Geometry, no. 2, 1984, pág. 479-495.

Recibido: Julio de 2007. Aceptado para publicación: Abril de 2008