*LLULL*, *vol. 30, 2007, 213-229*

# Análisis comparativo de la comunicación del cálculo diferencial en el siglo XVIII: la educación militar en Francia y Prusia

MÓNICA BLANCO
Universitat Politècnica de Catalunya

*RESUMEN*

*Debido en parte a una perspectiva internalista, el desarrollo histórico del cálculo en contextos relevantes y detallados ha sido ignorado hasta el momento, así como la interacción entre dichos contextos. Un aspecto fundamental en el desarrollo histórico del cálculo es el proceso de algebraización. Dicho proceso, sujeto a variables sociales, hay que entenderlo como desarrollándose dentro de un sistema educativo nacional, que a su vez pertenece a un contexto cultural y epistemológico específico. En particular, el análisis comparativo de libros de texto permite aproximarse a un sistema educativo específico, así como analizar su comunicación con otros sistemas, ya que emergen de un contexto educacional específico. El objetivo del presente artículo es explorar la comunicación de ciertas cuestiones relacionadas con la algebraización del cálculo diferencial en dos contextos relevantes y detallados: los sistemas educativos militares de Francia y Prusia en el siglo XVIII. Con este propósito, se lleva a cabo un análisis comparativo de libros utilizados en estos contextos para la enseñanza del cálculo diferencial.*

*ABSTRACT*

*It is partly because of an internalist perspective that the historical development of calculus in relevant contexts has been ignored as yet, as it has also been the communication between such contexts. A fundamental aspect of its development, the process of the algebraization of calculus, can be regarded as being subject to social variables. Hence, it has to be understood as developing within a national educational system, belonging in turn to a specific cultural and epistemolgical context. In particular, comparative analysis of textbooks allows to approach a particular educational system, as well as its communication with other systems, since they emerge from a specific educational context. The aim of this paper is to explore how some aspects concerning the algebraization of differential calculus were communicated in two well-defined and relevant contexts, namely, the French and Prussian systems of military education in eighteenth century. To this purpose a comparative analysis of some educational books is carried out, concerning the teaching of differential calculus in these contexts.*

*Recibido el 5 de mayo de 2008*
*Aceptado el 21 de mayo de 2008*

*ISSN 0210-8615*

Palabras clave: Algebraización, Cálculo, Matemáticas, Análisis comparativo de libros de texto, Educación militar, Siglo XVIII.

Keywords: Algebraization, Calculus, Mathematics, Comparative textbook analysis, Military education, 18th Century.

En el desarrollo histórico del cálculo destaca el proceso de algebraización. Craig G. Fraser distingue las siguientres tres etapas: en la primera etapa los problemas y concepciones tratados eran de índole geométrica. La segunda etapa representa un paso analítico-algebraico, donde análisis y álgebra juegan un papel instrumental para investigar las curvas geométricas. La tercera etapa corresponde al período clásico, donde el cálculo adquiere su total establecimiento [FRASER, 1989]. Por otro lado, Gert Schubring considera la algebraización como una categoría de desarrollo conceptual, sujeta a las variables sociales, que la moldean cultural y epistemológicamente [SCHUBRING, 2005, pp. 8-9]. Sin embargo, tradicionalmente la historiografía del cálculo ha enfocado el desarrollo de esta disciplina desde un punto de vista internalista, centrado fundamentalmente en el desarrollo intrínseco de aspectos conceptuales y metodológicos. De este modo, el estudio del proceso de algebraización del cálculo en contextos relevantes y detallados ha sido ignorado hasta el momento, así como la interacción entre dichos contextos. Por esta razón, Schubring señala la necesidad de una revisión de las perspectivas desarrolladas hasta el momento en la historiografía de las matemáticas, en general, y aboga por una reconstrucción hermenéutica del desarrollo conceptual[1].

Como categoría socialmente moldeada, hay que entender el proceso de algebraización como desarrollándose dentro de un sistema educativo nacional, que a su vez pertenece a un contexto cultural y epistemológico específico. Los sistemas educativos pueden considerarse unidades básicas dentro de las cuales la comunicación está garantizada. Dentro de un sistema educativo nacional específico nacen los libros de texto destinados a comunicar una materia a una determinada comunidad de practicantes. En consecuencia, Schubring propone el análisis comparativo de libros de texto para examinar las tendencias nacionales en lo que respecta a estilo, significado y epistemología, y para comparar cómo diferentes conceptos fueron recibidos por otras comunidades y contextos [SCHUBRING, 1996, pp. 363-364].

Partiendo de la postura de Schubring, en el artículo se presenta un análisis comparativo de libros de texto centrado en la algebraización del cálculo diferencial. Como el término «libro de texto» no estaba aún definido en el siglo XVIII, aquí resulta preferible referirse a libros educacionales, o libros empleados con fi-

nes educacionales, tal como aparece en Bertomeu-Sánchez et al. [2006]. Con este propósito se analiza la forma en que aspectos relacionados con la algebraización del cálculo diferencial fueron comunicados en los sistemas educativos militares de Francia y Prusia a través de ciertos libros educacionales. En contraste con la historia tradicional de grandes hombres y sus ideas, el presente trabajo introduce algunos «libros olvidados,» como los denomina Jonathan R. Topham, para diferenciarlos de las «obras canónicas» [TOPHAM, 2000, pp. 566-567].

El trabajo de Topham se puede enmarcar en una propuesta programática reciente en el estudio de la historia de la ciencia, abierta por James A. Secord. El punto central del programa de Secord es la conceptualización del conocimiento como comunicación. Tomando esta dirección, Secord sugiere que la cuestión de «qué» se comunica sólo puede contestarse mediante la comprensión del «cómo», «dónde», «cuándo» y «para quién» [SECORD, 2004, pp. 663-664]. Por esta razón, se puede considerar que el análisis comparativo que este artículo presenta se adecúa perfectamente al marco de las preguntas formuladas por Secord.

El análisis de libros educacionales también permite un análisis de las prácticas de lectura y de su apropiación. En este sentido Lissa Roberts se aproxima, a través del análisis de las particularidades locales de los diferentes sistemas de educación, a la comunicación e interpretación del conocimiento, así como a la posibilidad de comunicación entre mundos sociales distintos [ROBERTS, 2005].

Este artículo se centra en la comunicación de elementos de algebraización del cálculo en dos contextos relevantes y detallados: la educación militar en Francia y Prusia en el siglo XVIII. La comparación de la apropiación local y la interacción entre ambos sistemas se lleva a cabo mediante el estudio de diversos libros educacionales de cálculo utilizados en ambos contextos. Dado el proceso de desarrollo en que se encontraba el cálculo diferencial en el siglo XVIII resulta interesante profundizar en la relación entre educación e investigación, factor relevante en el estudio de la emergencia del cálculo como disciplina como señala Kathryn M. Olesko [OLESKO, 2006]. Por otro lado, en el marco de teorización de Rudolf Stichweh se entiende cuán importantes son los libros educacionales en la formación del cálculo diferencial como disciplina [STICHWEH, 1994]. Sin embargo, mientras que el objeto de estudio de Stichweh lo forma la emergencia de las disciplinas en las universidades alemanas del siglo XIX, el presente artículo extiende su marco de teorización a los contextos de educación militar francés y prusiano del siglo XVIII.

Este artículo empieza con una breve descripción de los sistemas educativos militares de Francia y Prusia en el siglo XVIII. Después de la introducción de algunos libros educacionales usados en ambos contextos, se expone el análisis comparativo de dichos libros, análisis que llevará a las conclusiones finales.

**Sistemas de educación militar: Francia y Prusia**

Empecemos revisando de forma breve el marco institucional concerniente a la educación matemática de Francia y Prusia en el siglo XVIII, con particular énfasis en sus respectivos sistemas de educación militar.

En la Francia pre-revolucionaria del XVIII la educación universitaria se limitaba básicamente a los *collèges*, dirigidos por órdenes religiosas, donde el nivel de matemáticas era más bien elemental. Sin embargo, este sistema coexistía con otros. Alrededor de 1750 se estableció una red de *écoles militaires*, algunas de las cuales provenían de hecho de *collèges* anteriormente religiosos. El control estatal ejercido sobre estas escuelas garantizaba la homogeneidad en la educación. Además, el hecho de que tanto profesores como examinadores estuvieran a menudo relacionados con la Académie des Sciences favoreció esta tendencia. Otra característica de este sistema fue el énfasis dado a las aplicaciones, siendo así un precursor de la llamada *école physico-mathématique*. El programa de estas escuelas cubría con frecuencia aritmética, álgebra, geometría y trigonometría. Algunas *écoles*, sin embargo, se mostraron inclinadas a introducir nuevas materias. En la década de 1780, por ejemplo, se celebraron ejercicios públicos sobre cálculo diferencial e integral en las *écoles* de Brienne y Sorèze —ambas antiguos *collèges* benedictinos—. Incluso la última de éstas llegó a ofrecer un curso de cálculo diferencial e integral ya en 1772. Tal origen proporcionó a las escuelas militares el apoyo institucional necesario para las matemáticas en el siglo XVIII[2].

En este período la estructura nacional alemana difería enormemente de la de Francia, en el sentido de que no había unidad nacional o cultural en modo alguno. De hecho lo que hoy se denomina territorio alemán estaba dividido en cientos de estados, de confesión bien católica, bien protestante, cada cual con su propio sistema educativo. En lo que respecta a la educación superior, los estudios matemáticos alcanzaron una posición notable dentro del contexto universitario de los estados protestantes del norte (luteranos). Las universidades de Halle (Prusia) y de Göttingen (Hannover) representan ejemplos paradigmáticos de este contexto. Hay que mencionar que, además de enseñar, los profesores tenían que publicar los resultados de su investigación, donde las reflexiones sobre los fundamentos de la ciencia ocupaban un lugar privilegiado. En cambio, la educación en los estados del sur se hallaba bajo el control estricto de los Jesuitas, reacios a cualquier reforma social y educativa. En este contexto las matemáticas mantuvieron un rol marginal, como materia elemental y en cierto modo enciclopédica, sólo enseñada en parte del último año de la escuela secundaria, por profesores no especializados.

A diferencia de Francia, los estados alemanes no habían desarrollado ningún sistema importante de escuelas militares. Sin embargo, como consecuencia de las ter-

ribles pérdidas sufridas por el ejército prusiano en la Guerra de los Siete Años (1756-1763) el rey Frederick II consideró necesario mejorar la educación de sus oficiales. Con este fin ordenó el establecimiento de instituciones para la instrucción militar, para atraer jóvenes de la nobleza y convertirlos en oficiales. Como parte de su proyecto en 1765 se fundó en Berlín la «Académie militaire,» que en 1791 pasó a ser una academia de artillería. Aquí, los suboficiales podían adquirir conocimientos de topografía, cartografía y geología para ser promocionados en la escala militar.

Las diferencias existentes entre los dos sistemas de educación podrían ser una de las razones por las que el intercambio mutuo entre Francia y los estados alemanes es prácticamente inexistente antes de los 1790, con la excepción de la comunicación establecida entre miembros académicos, como se observa en Schubring [1996, p. 365].

## Libros de cálculo diferencial utilizados en los sistemas de educación militar de Francia y de Prusia

El objetivo del presente artículo es analizar la transición en el proceso de algebraización del cálculo diferencial en el siglo XVIII mediante el examen y comparación de algunos libros educacionales sobre la materia usados en los sistemas de educación militar de Francia y Prusia. Según el público al cual estaban dirigidos originalmente, estos trabajos se pueden agrupar en dos categorías. La primera categoría la componen aquellos trabajos dirigidos a un público más amplio, general, escritos en la primera mitad del siglo. Por otro lado, la segunda categoría incluye aquellos libros dirigidos a un público más específico, en este caso, a los estudiantes de las escuelas militares.

En el primer grupo se incluyen los siguientes libros educacionales: el *Analyse des infiniment petits* (1696) de Guillaume François Antoine de L'Hospital, Marqués de Sainte-Mesme (1661-1704)[3], el *Analyse démontrée* (1708) del padre Charles R. Reyneau (1656-1728), y las *Instituzioni analitiche* (1748) de Maria Gaetana Agnesi (1718-1799). La idea de la composición de este grupo surgió durante el examen de las diferentes prácticas de comunicación involucradas en la circulación de las lecciones de cálculo diferencial de Johann Bernoulli en Francia y norte de Italia en el XVIII [BLANCO, 2008a]. En 1696 L'Hospital publicó, el *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, considerado por contemporáneos e historiadores posteriores como el primer libro educacional de cálculo diferencial[4]. Claramente, las fuentes de este trabajo son las lecciones que Johann Bernoulli (1667-1748) dio a L'Hospital entre 1691 y 1692[5]. L'Hospital y Johann Bernoulli fueron presentados por Nicolas Malebranche (1638-1715),

un miembro de la congregación del Oratoire. A través del grupo que fundó en París, Malebranche ejerció una gran influencia en el desarrollo y difusión de las matemáticas, en general, y del cálculo leibniziano, en particular. Fue también Malebranche quien en 1698 animó a su amigo Charles René Reyneau, también miembro del Oratoire, a escribir un trabajo sobre el nuevo cálculo dirigido a principiantes. Para llevar a cabo la petición de Malebranche, Reyneau consiguió una copia del manuscrito de Johann Bernoulli, la trabajó y finalmente publicó su *Analyse démontrée* en 1708. Este trabajo resultó ser la fuente principal del libro de Maria Gaetana Agnesi, *Instituzioni analitiche*, concebido como una introducción (sistemática y con intenciones educativas) al álgebra, al análisis cartesiano y al cálculo, dirigida a la comunidad erudita del norte de Italia. A pesar de estar dividida en diversos estados y ciudades-estado, la Italia del XVIII se caracteriza por su homogeneidad religiosa, siendo aceptada la fe católica de forma generalizada. Las instituciones católicas, especialmente las Jesuitas, controlaban el sistema de educación. Lo cual implica que las matemáticas eran enseñadas a un nivel más bien elemental, sin especialización. Sin embargo, a principios y mediados del XVIII Italia experimentó un movimiento reformista católico, al cual Mazzoti se refiere como la «Ilustración Católica». Este movimiento promulgaba una reforma del conocimiento (cultura científica moderna) dentro de la ortodoxia católica[6]. Uno de los focos más importantes fue Milán, donde Maria Gaetana Agnesi había nacido. A través de uno de sus tutores, el monje benedictino olivetano Ramiro Rampinelli (1697-1759), Agnesi mantuvo correspondencia con uno de los estudiosos del cálculo leibniziano en Italia, Jacopo Riccati (1676-1754). Con su futuro trabajo en mente, en su correspondencia Agnesi y Riccati discutían fundamentalmente sobre cuestiones de cálculo. También por recomendación de Rampinelli Agnesi estudió el *Analyse démontrée* de Reyneau. Que el libro de Agnesi se basara en el de Reyneau apenas puede sorprendernos, ya que compartía con éste la misma formación filosófica, un Cartesianismo filtrado por la interpretación de Malebranche.

No sólo el libro de Reyneau viajó a Italia, donde fue apropiado por Agnesi, sino que además las *Instituzioni analitiche* de Agnesi fueron posteriormente traducidas al francés y presentadas a la Académie des Sciences en París. En 1775, una comisión de la Académie recomendó la traducción al francés del segundo volumen de Agnesi dedicado al cálculo diferencial. En las escuelas militares reales de Brienne y Sorèze se recomendó la lectura de esta versión en 1782 y 1784, respectivamente. Así mismo los trabajos de L'Hospital y de Reyneau se hallaban en la biblioteca de diversas *écoles militaires*[7]. Así pues, habiendo surgido dentro del contexto de academias y sociedades en la primera mitad del siglo XVIII, los trabajos de L'Hospital, Reyneau y Agnesi acabaron siendo usados en las escuelas militares francesas, probablemente como herencia de su estructura original de *collège* religioso.

Los límites del segundo grupo están definidos de forma más nítida, ya que se trata de libros educacionales explícitamente escritos para estudiantes de escuelas militares. Dentro del sistema de educación militar francés destaca la figura de Étienne Bézout (1730-1783) como escritor de libros educacionales de matemáticas dirigidos a los estudiantes de las diversas instituciones militares en las que estuvo involucrado. Junto con Charles-Étienne Camus (1699-1768) y Charles Bossut (1730-1814), Bézout pertenece al grupo de destacados examinadores y autores educacionales de las escuelas militares francesas. Profesor y examinador de *Gardes de la Marine* (escuela oficiales navales) desde 1763, Bézout sucedió a Camus en 1768 como examinador de *Corps d'Artillerie* (escuela del cuerpo de artillería). En un principio Bézout escribió su famoso *Cours de mathématiques* para los ingenieros navales (1764-1767), seguido por una versión reducida en contenido para los oficiales de artillería (1770-72). Para llevar a cabo el análisis comparativo fue seleccionada una de las muchas ediciones posteriores del trabajo de Bézout, *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie* (1799-1800), publicada a finales del siglo. De hecho sus obras siguieron siendo recomendadas en el nuevo sistema educativo, post-revolucionario, por su homogeneidad estructural y como ejemplo de compendio completo de educación general matemática, entre otras razones[8]. En Schubring [2005, pp. 217-220] se señala que, en claro contraste con los trabajos de Camus (1749-1752) y de Bossut (1781), el *cours* de Bézout incluyera nociones de cálculo diferencial e integral. De hecho, como se afirma en la primera página del tercer volumen, los principios del cálculo resultaban útiles para la introducción de las ciencias físico-matemáticas.

Como ya se ha mencionado anteriormente, en la Alemania del XVIII no había un sistema bien desarrollado de escuelas militares. A pesar de esta falta aparente, resultaba oportuno incluir en este grupo un volumen dirigido a los cadetes de la Artillería Real Prusiana, el *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* (1770) de Georg F. Tempelhoff (1737-1807). El cálculo diferencial es el tema principal del primer volumen del *Anfangsgründe*. Aunque Tempelhoff estudió matemáticas en las universidades de Frankfurt an der Oder y de Halle, cuando empezó la Guerra de los Siete Años entró en la infantería prusiana y poco tiempo después fue transferido a la fuerza de artillería. Durante su carrera militar obtuvo distinciones, hasta el punto de ser promocionado a Lugarteniente General en 1802. De hecho Tempelhoff fue nombrado primer director de la Academia de Artillería de Berlín en 1791. Además de su *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* publicó diversos trabajos matemáticos, entre otros: el *Anfangsgründe der Analysis der endlichen Grössen* (1768), el *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1773) y la *Geometrie für Soldaten* (1790). Algunos de sus trabajos, incluso el de balística, se consideraban más relevantes a nivel teórico que práctico. Lo cual concuerda con la tendencia de los estados alemanes protestantes de centrarse en reflexiones teóricas, sobre los fundamentos de la ciencia.

**Análisis comparativo: Bézout *versus* Tempelhoff**

En la sección anterior se han destacado las obras *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie* de Bézout y *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* de Tempelhoff. Por su carácter único durante el período estudiado, estos libros educacionales sobre cálculo diferencial, específicamente dirigidos a estudiantes de escuelas de artillería, pueden ser considerados como representativos de la educación militar en Francia y Prusia, respectivamente. Por esta razón, en esta sección se discuten fundamentalmente los trabajos de Bézout y de Tempelhoff, con referencias puntuales a los trabajos anteriormente citados y a la obra de Leonhard Euler (1707-1783).

El análisis comparativo se centra en el punto de vista de los autores en lo que respecta al uso de funciones, la caracterización de límite, el concepto de curva, la aplicación de desarrollo en serie y la elección de coordenadas, elementos que han sido tomados como indicadores en el proceso de algebraización.

El trabajo de Bézout empieza con algunas reflexiones sobre la naturaleza de las cantidades infinitas y las infinitamente pequeñas [BÉZOUT, 1799-1800, §§1-5].

> Decimos que una cantidad es infinita o infinitamente pequeña con respecto a otra, cuando no es posible asignar ninguna cantidad suficientemente grande o suficientemente pequeña para expresar la relación de estas dos, es decir, el número de veces que una contiene a la otra[9].

En la siguiente sección añade una reflexión relacionada con el orden de las cantidades infinitas e infinitamente pequeñas:

> Como una cantidad no puede, sin dejar de ser cantidad, dejar de ser susceptible de aumento o de disminución, no hay ninguna cantidad tan pequeña o tan grande con respecto a otra, que no se pueda concebir una tercera infinitamente menor o mayor[10].

Este tipo de reflexión no aparece en el libro de L'Hospital. Aparte de este hecho, la manera en que Bézout introduce las definiciones básicas y las reglas del cálculo diferencial a partir del punto §6, incluso el contenido de su trabajo, se asemeja al de L'Hospital. Para empezar, la definición de diferencia proporcionada por L'Hospital en la primera sección del *Analyse*:

> La porción infinitamente pequeña en que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente, se llama la *Diferencia*[11].

no difiere substancialmente de la definición que aparece en el libro de Bézout:

> Si se considera una cantidad *variable* como creciendo en pasos infinitamente pequeños, si se quiere conocer el valor de esos crecimientos, lo más natural, es determinar el valor de dicha cantidad en un instante cualquiera, y el valor de esta

> misma cantidad en el instante inmediatamente siguiente: entonces la diferencia de esos dos valores es el incremento o decremento que la cantidad recibe: es lo que también se llama la *diferencia* o la *diferencial* de esta cantidad[12].

La regla de la diferenciación del producto ilustra otro aspecto fundacional que coincide en las exposiciones de L'Hospital y de Bézout. L'Hospital lleva a cabo la diferenciación del producto de $xy$ de la manera siguiente: si las cantidades $x$ e $y$ se incrementan en $dx$ y $dy$, respectivamente, entonces la diferencia de $xy$ resulta ser. Considerando $dx$ como constante, el término $dxdy$ se puede despreciar ya que es una cantidad infinitamente pequeña, comparada con $ydx$ y $xdy$. Un siglo más tarde, Bézout demuestra la regla exactamente de la misma forma en su *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie* [BÉZOUT, 1799-1800, §9; L'HOSPITAL, 1696, §5]. Dicha postura sorprende ya que la regla del producto fue un punto crucial en la cuestión de cómo evitar las cantidades infinitesimales. Por ejemplo, en el texto de Reyneau se justifica la regla exactamente de la misma manera que Newton en sus *Principia*, eludiendo así el espinoso tema de los infinitesimales, en una época anterior al ataque de Berkeley al procedimiento newtoniano.

Trece años antes de la primera aparición del *Cours* de Bézout, Euler mostraba el cálculo del diferencial del producto en su obra *Institutiones calculi differentialis*. Sean $p$ y $q$ funciones de $x$, si $p$, $q$ son aumentadas en $dp$, $dq$, respectivamente, entonces:

$$(p + dp)(q + dq) = pq + pdq + qdp + dpdq$$

$$d.pq = pdq + qdp$$

El producto $dpdq$ se puede eliminar ya que se trata de una cantidad infinitamente pequeña de segundo orden, respecto a $pdq$ y $qdp$ [EULER, 1755, §3].

Otro indicador del proceso de algebraización del cálculo diferencial está relacionado con el concepto de curva. Un punto fundamental en el cálculo leibniziano es la identificación de la curva con un polígono de infinitos lados, infinitamente pequeños, es decir, el polígono infinitangular. De eso se deduce que la tangente se pueda tomar como una extensión de uno de los lados del polígono infinitangular. Este enfoque se halla tanto en el libro de L'Hospital, como en el de Bézout. En la primera sección de su libro L'Hospital ofrece la siguiente definición de curva, donce relaciona el ángulo entre lados con la curvatura de la curva:

> Se pide que una línea curva pueda ser considerada como el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas, cada una de ellas infinitamente pequeña: o (lo que es lo mismo) como un polígono de un número infinito de lados, cada uno infinitamente pequeño, los cuales determinan por los ángulos que forman entre ellos la curvatura de la línea[13].

En la siguiente sección explicita la definición de tangente ligada al polígono (Fig. 1):

> Si se prolonga uno de los lados pequeños *Mm* del polígono que compone una línea curva; este lado pequeño así prolongado se llamará la *Tangente* de la curva en el punto *M* o *m*[14].

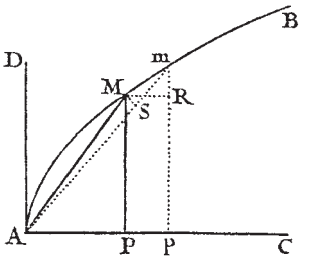


Figura 1: Tangente y polígono infinitangular en L'Hospital (1696, Fig. 1).

En el caso de Bézout la idea de curva como polígono infinitangular aparece precisamente en la definición de la tangente:

> Para trazar una tangente a una línea curva cualquiera *AM*, se representa esta línea curva, como un polígono de una infinidad de lados infinitamente pequeños: la prolongación *MT* de uno de sus lados, *Mm*, es la tangente,...[15].

En su obra *Institutiones calculi differentialis* (1755) Leonhard Euler consideraba las secuencias de valores no como inducidas por el polígono infinitangular, sino por una función de una variable independiente. Es bien sabido que su tratado de 1748, *Introductio in analysin infinitorum*, contribuyó esencialmente a la elaboración del concepto de función. Siete años después su texto sobre cálculo diferencial proporcionó un tratamiento completo de derivación funcional. Sin embargo, hay que remarcar que Bézout introduce el concepto de función sólo en la sección sobre cálculo integral, y no en la correspondiente de cálculo diferencial. Lo cual, según se señala en Schubring [2005, pp. 217-219], es representativo de la ausencia del concepto de función en el contexto univesitario francés.

Por el contrario, en su *Anfangsgründe* Tempelhoff introduce el uso de funciones. En particular, para la regla del producto aplica el logaritmo a la expresión, y a través del diferencial de los logaritmos llega al diferencial del producto [TEMPELHOFF, 1770, §320][16]:

$$w = u - b,$$
$$lw = l(u - b) = la + lx + ly,$$
$$dlw = dla + dlx + dly,$$
$$\frac{dw}{w} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y},$$
$$dw = \frac{wdx}{x} + \frac{wdy}{y},$$
$$du = \frac{(u - b)dx}{x} + \frac{(u - b)dy}{y},$$
$$du = aydx + axdy.$$

De forma similar a la exposición de Euler en *Institutiones calculi differentialis*, Tempelhoff empieza señalando que la *diferencia* de una función entre dos valores consecutivos es una cantidad finita. Entonces extrapola desde diferencias finitas a *diferenciales*, o diferencias infinitamente pequeñas.

> Esta diferencia es siempre una cantidad finita y real, mientras las cantidades $x$, $y$, $z$, etc., en que las cantidades variables $X$, $Y$, $Z$, etc. crecen o decrecen, sean cantidades finitas: Mientras tanto las mismas serán cada vez más pequeñas, cuanto más pequeñas se supongan las cantidades $x$, $y$, $z$[17].

El enfoque de Tempelhoff se asemeja también al de Euler cuando afirma que una línea puede ser considerada como generada cinéticamente. Es más, Tempelhoff hace referencia en diversas ocasiones al *Treatise of Fluxions* (1742) de Colin Maclaurin. En particular en el punto §254 comenta que los antiguos geómetras usaron los límites de las proporciones con éxito, como introdujo Maclaurin en su tratado. Esto parece indicar que Tempelhoff poseía una concepción intuitiva del límite de la razón de diferencias, el tratamiento siendo exclusivamente verbal, todavía no operacional[18].

Esta concepción intuitiva se adivina en la definición de Tempelhoff de la tangente como límite de las líneas secantes. En el proceso de hallar el límite, Schubring señala que Tempelhoff fue el primero en introducir la algebraización de los conceptos fundamentales del cálculo en los libros educacionales dirigidos a ingenieros y a estudiantes de escuelas militares [SCHUBRING, 2005, p. 251].

A pesar de no definirlas explícitamente, Tempelhoff sí clasificó las funciones en algebraicas y transcendentes; las algebraicas podían ser racionales o irracionales, enteras o fraccionarias; las transcendentes serían del tipo seno, coseno, tangente, secante o logaritmo [TEMPELHOFF, 1770, §256]. Su clasificación es similar a la presentada en la obra *Introductio in analysin infinitorum* de Euler [1748, libro I, §§7-8].

En relación con el tratamiento de funciones, el capítulo 6 de las *Institutiones calculi differentialis* de Euler está dedicado a la diferenciación de las funciones transcendentes, partiendo de su expansión en serie. En la medida en que Euler describe allí las reglas para la diferenciación de las funciones trigonométricas, se podría esperar que a partir de entonces el seno y el coseno se trataran como funciones. Que cualquier función se podía expandir en serie de hecho ya lo afirma Tempelhoff en el punto §561 de su libro. Sin embargo, Tempelhoff deduce los diferenciales de las líneas trigonométricas a partir de las proporciones que caracterizan dichas funciones [TEMPELHOFF, 1770, §332-349]. En el caso del seno, por ejemplo, Tempelhoff demuestra la fórmula partiendo de la comparación entre el diferencial de un arco del círculo y el propio seno. En su libro Tempelhoff se refiere al seno y al coseno como «líneas,» pero también como «funciones» [TEMPELHOFF, 1770, §332 y §565]. Veamos con más detalle el desarrollo del diferencial del seno, expuesto por Tempelhoff.

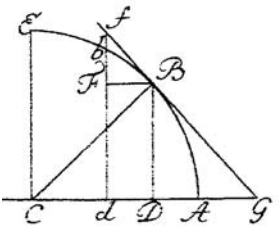


Figura 2: Diferencial del seno según Tempelhoff (1770, Tab. VI, Fig. 86).

Consideremos los siguientes elementos: el arco $\varphi$ (que aquí juega el papel de variable independiente), $\sin \varphi = BD$, $\cos \varphi = CD$ y $r = CA = BC$ y (Fig. 2). Tomando otro punto $b$ sobre el arco, trazamos un segmento $bd$ paralelo a $BD$. Entonces $bF$ es la diferencia entre $BD$ y $bd$. El segmento $bd$ corta en el punto $f$ con la tangente que pasa por el punto $B$. A medida que $b$ se acerca a $B$ la razón $Bb : bF$ se aproxima a la razón $Bf : fF$. Ambas razones son idénticas cuando $b$ y $B$ coinciden. La razón $Bf : fF$ es el límite al cual se aproxima la razón $Bf : fF$, cuando el arco $Bb$ es infinitamente pequeño. Mediante triángulos semejantes se obtiene la proporción:

$$Bf : fF = BC : CD$$

Así, la razón $BC : CD$ es el límite de la razón $Bb : bF$. Ambas razones coinciden cuando $Bb$ y $bF$ son los diferenciales infinitamente pequeños $d\varphi$ y $d.\sin\varphi$, respectivamente. Por lo tanto:

$$d\varphi : d.\sin\varphi = r : \cos\varphi.$$

Sorprendentemente, esta vez es Bézout quien obtiene los diferenciales del seno y del coseno como aparece en Euler [1755, §195], a partir del desarrollo de las fórmulas para la suma de dos ángulos [BÉZOUT, 1799-1800, §§22-ff]:

$$\sin.(z + dz) = \sin.z \cos.dz + \sin.dz \cos.z$$

Como $\sin.dz$ y $\cos.dz = 1$la igualdad anterior se transforma en:

$$\sin.(z + dz) = \sin.z + dz \cos.z$$

y entonces:

$$\mathrm{d}(\sin.z) = \sin.(z + dz) - \sin.z = dz \cos.z$$

Antes de concluir esta sección es necesario destacar el hecho de que ambos autores, Tempelhoff y Bézout, escogían coordenadas ortogonales para las curvas implicadas en los problemas que querían resolver, independientemente de la naturaleza geométrica de la curva. Esta preferencia apunta a la emergencia de la variable independiente, crucial en la consolidación del papel fundamental del concepto de función. Por el contrario, en la obra de L'Hospital se observa un tratamiento geométrico de la curva, que le inducía a elegir las coordenadas según la naturaleza geométrica de la curva. De esta forma la expresión de las curvas transcendentes resulta más simple y clara. Éste fue el procedimiento habitual a finales del siglo XVII, y de hecho Leibniz recomendaba considerar la transformación más adecuada para un problema específico, de manera que la nueva ordenada fuese expresable como función racional de la nueva abscisa [HOFMANN, 1972, p. 235].

Así mismo, se observa una posición diferente frente a la dualidad educación-investigación en los dos textos analizados. Mientras que en la obra de Bézout se mantiene la estructura y contenidos vigentes a principios de siglo, Tempelhoff introduce los últimos avances de la materia. Esto repercutirá en el proceso de emergencia del cálculo diferencial como disciplina.

## Conclusiones

Por debajo de las líneas epistemológicas de las obras de Bézout y de Tempelhoff, representativas de los sistemas de educación militar francés y prusiano, respectivamente, se pueden reconocer ciertas tendencias nacionales, que vienen a confirmar algunos de los puntos expuestos al principio del presente trabajo. En relación a la algebraización del cálculo, los libros utilizados en el sistema militar francés con fines educativos no incluían el concepto de función, y menos aún el de límite de la razón de las diferencias. Por el contrario, se ha visto que en su libro Tempelhoff otorga una posición relevante a la consideración de nuevos enfoques.

Si se puede afirmar que el *Anfangsgründe* desempeñó un papel importante en cuanto a una recepción temprana de Euler, el libro de Bézout, por el contrario, ofrecía una exposición del cálculo diferencial más bien elemental, con muchos puntos en común con el *Analyse* de L'Hospital. Que su sección sobre cálculo precediera sus secciones sobre mecánica e hidrostática transmite la idea de que el cálculo era una herramienta auxiliar, enfatizando las aplicaciones de éste.

Por tanto, se puede hablar de dos tendencias en lo que respecta a la relación entre educación e investigación dentro de los contextos analizados. Como sistema recién creado, la educación militar en Prusia podría haber recibido influencias del contexto dominante, en este caso, el universitario, en el cual se potenciaba la investigación. En cambio, en el sistema militar francés, educación e investigación seguían caminos diferentes. No resulta improbable que esto se debiera al marco institucional heredado de los *collèges* religiosos. Dado el papel relevante que juega la conexión entre educación e investigación a la hora de moldear una disciplina, se puede concluir que la emergencia del cálculo diferencial como disciplina evolucionó a un ritmo diferente en los contextos objeto del presente trabajo. Así, la emergencia de una disciplina parece no ser independiente del sistema educacional nacional, vigente en un determinado período.

En resumen, la diferente percepción de educación e investigación pudo impedir que el cálculo diferencial se transformara en un un «objeto límite» («boundary object») entre los contextos analizados. Es decir, los significados divergentes que presentaba el cálculo en estos dos grupos sociales no propició un medio reconocible de traducción[19]. Este hecho confirma la afirmación de Schubring de que raramente se diera el intercambio mutuo entre Francia y Alemania antes de la década de 1790, en particular entre los correspondientes sistemas de educación militar [SCHUBRING, 1996, p. 365].

## NOTAS

1. Aquí se entiende por *hermenéutica* la técnica que concierne la interpretación y comprensión de textos, enmarcada dentro de una visión cultural de la ciencia en un contexto relevante, refiriéndose de forma explícita al conocimiento y metodologías científicas de que disponía la sociedad contemporánea, así como a su forma de plantearse un problema. Véase SCHUBRING [2005, p. 3].
2. Sobre la educación matemática en el contexto militar francés en el siglo XVIII, véase SCHUBRING [1996] y TATON [1986].
3. Podemos encontrar su nombre escrito L'Hospital o l'Hospital. La familia también lo escribía Lhospital y, más tarde, L'Hôpital. Aunque en BLANCO [2001, 2008a] se haya utilizado la forma L'Hôpital, en el presente artículo, por coherencia con el nombre original, se ha preferido utilizar la forma L'Hospital.

4. Sobre la publicación del libro de L'Hospital véase, por ejemplo, BOSSUT [1802, vol II, p. 138].
5. BLANCO [2001] ofrece un análisis comparativo del *Analyse* de L'Hospital y las lecciones de Johann Bernoulli.
6. Véase MAZZOTTI [2001, pp. 660-661].
7. En TATON [1986] se afirma que había ejemplares de sus trabajos en la École de Valence (1785) y en la École Royale d'Artillerie de Strasbourg (1789).
8. La obra de Bézout fue prescrita por Lagrange para el uso de los estudiantes de las *Écoles Centrales*, como preparación para su ingreso en la *École Polytechnique*. Véase SCHUBRING [1997, pp. 57-58].
9. «Nous disons qu'une quantité est infinie ou infiniment petite à l'égard d'une autre, lorsqu'il n'est pas possible d'assigner aucune quantité assez grande ou assez petite pour exprimer le rapport de ces deux-là, c'est à dire, le nombre de fois que l'une contient l'autre». BÉZOUT [1799-1800, §3].
10. «Comme une quantité ne peut, sans cesser d'être quantité, cesser d'être susceptible d'augmentation ou de diminution, il n'y a point de quantité si petite ou si grande à l'égard d'une autre, que l'on ne puisse en concevoir une troisième infiniment plus petite ou plus grande». BÉZOUT [1799-1800, §4].
11. «La portion infiniment petite dont une quantité variables augmente ou diminue continuellement, en est appellée la *Différence*». L'HOSPITAL [1696, Définition II].
12. «Lorsque l'on considère une quantité variable comme croissant par degrés infiniment petits, si l'on veut connoître la valeur de ces accroissemens, ce qui se présente de plus naturel, est de déterminer la valeur de cette quantité pour un instant quelconque, & la valeur de cette même quantité pour l'instant immédiatement suivant: alors la différence ce ces deux valeurs est l'accroissement ou la diminution que cette quantité reçoit: c'est aussi ce qu'on appelle la *différence* ou la *différentielle* de cette quantité». BÉZOUT [1799-1800, §6].
13. «On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (c'est que la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux la courbure de la ligne». L'HOSPITAL [1696, §3].
14. «Si l'on prolonge un des petits côtés *Mm* du poligone qui compose une ligne courbe; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point *M* ou *m*». L'HOSPITAL [1696, Définition, Section II].
15. «Pour mener une tangente à une ligne courbe quelconque *AM*, on se représente cette ligne courbe, comme un poligone d'une infinité de côtés infiniment petits: le prolongement *MT* de l'un *Mm* de ces côtés, est la tangente...». BÉZOUT [1799-1800, §30].
16. En BLANCO [2008a] se compara el procedimiento usado por Tempelhoff con los desarrollados por otros autores alemanes del siglo XVIII.
17. «Diese Differenz ist allezeit eine wirkliche und endliche Grösse, so lange die Grössen *x*, *y*, *z*, u., um denen die veränderliche Grössen *X*, *Y*, *Z*, u. zu oder abnehmen, endliche Grössen sind: Inzwischen wird dieselbe immer kleiner, je kleiner diese Grössen, *x*, *y*, *z*, angenommen werden». TEMPELHOFF [1770, §260].

18. Sobre el tratamiento operacional o no operacional del límite, véase SCHUBRING [2003].
19. Aquí se ha tomado prestada la definición de «boundary object,» citada por Susan Leigh Star y James Griesemer en ROBERTS [2005, p. 3]: «both plastic enough to adapt to local needs and constraints of the several parties employing [it], yet robust enough to maintain a common identity across sites... [it has] different meanings in different social worlds but [its] structure is common enough to more than one... [making it a] recognizable means of translation».

## BIBLIOGRAFÍA

AGNESI, M.G. (1748) *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana*. Milán, Nella Regia Ducal Corte. Reeditado en microforma por Readex Microprint, New York, 1977.

BERTOMEU-SÁNCHEZ, J.R.; GARCÍA-BELMAR, A.; LUNDGREN, A.; PATINIOTIS, M. (2006) «Introduction: Scientific and technological textbooks in the European periphery». *Science and Education, 15 (7-8)*, 657-665.

BÉZOUT, É. (1799-1800) *Cours de mathématiques à l'usage du Corps de l'Artillerie*. París, Chez Richard, Caille et Ravier, vol. III.

BLANCO, M. (2001) «Análisis de la discusión L'Hôpital-Bernoulli». *Cronos, 4 (1-2)*, 81-113.

— (2008a) «On how Johann Bernoulli's lessons on differential calculus were communicated in eighteenth-century France and Italy». En: J. Simon, N. Herrán, T. Lanuza (eds.), *Beyond Borders: Fresh Perspectives in History of Science*. Cambridge, Cambridge Scholars Press, 113-140.

— (2008b) «Differential calculus in military schools in late eighteenth-century France and Germany: a comparative textbook analysis». En: *Proceedings of the 5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education (ESU-5)* (en prensa)

BOSSUT, C. (1802) *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*. París, Chez Louis.

EULER, L. (1748) *Introductio in analysin infinitorum*. Berlín. Traducción en inglés de J. D. Blanton, *Introduction to Analysis of the Infinite*. Nueva York, Springer-Verlag, 1988. Traducción en español de J. L. Arantegui Tamayo, con notas de A. J. Durán Guardeño, *Introducción al análisis de los infinitos*. Sevilla, SAEM «Thales» y Real Sociedad Matemática Española, 2000.

— (1755) *Institutiones calculi differentialis*. St. Petersburgo. Traducción en alemán con anotaciones de J. A. C. Michelsen, *Vollständige Anleitung zur Differential-Rechnung*. Berlín, Lagarde und Friedrich, 1790-1793.

FRASER, C.G. (1989) «The calculus as algebraic analysis: Some observations on mathematical analysis in the 18th century». *Archive for History of Exact Sciences, 39 (4)*, 317-335.

HOFMANN, J.E. (1972) *Leibniz in Paris (1672-1678). His Growth to Mathematical Maturity*. Cambridge, Cambridge University Press.

L'HOSPITAL, G.F.A. de (1696) *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris: Imprimerie Royale (reprinted by ACL-Éditions, Paris, 1988).

MAZZOTTI, M. (2001) «Maria Gaetana Agnesi. Mathematics and the making of the Catholic Enlightenment». *Isis, 92*, 657-683.

OLESKO, K.M. (2006) «Science pedagogy as a category of historical analysis: past, present and future». *Science & Education, 15*, 863-880.

REYNEAU, C. R. (1708) *Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les problêmes des mathématiques et d'apprendre facilement ces sciences*. París, Chez Quillau.

ROBERTS, L. (2005) «Circulation Promises and Challenges». *The Circulation of Knowledge and Practices: The Low Countries as an historical laboratory*. Workshop, Woudschoten, 27-28 May 2005.

SECORD, J.A. (2004) «Knowledge in Transit». *Isis, 95 (4)*, 654-72.

SCHUBRING, G. (1996) «Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in nineteenth-century Europe». En: Goldstein et al. (eds.) *Mathematical Europe. Myth, History, Identity*. París, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 363-388.

SCHUBRING, G. (1997) *Analysis of Historical Textbooks in Mathematics (Lecture Notes)*. 2ª edición (revisada), Río de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

— (2003) «A algebrização do conceito do limite no século XVIII». Río de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, prepublic. Mat. 10/2003.

— (2005) *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*. Nueva York, Springer.

STICHWEH, R. (1994) «La structuration des disciplines dans les universités allemandes au XIXe siècle». *Histoire de l'éducation, mai (62)*, 55-73.

TATON, R. (ed.) (1986) *Enseignement et diffusion des sciences en France au dix-huitième siècle*. París, Hermann.

TOPHAM, J.R. (2000) «Scientific Publishing and the Reading of Science in Nineteenth-Century Britain: A Historiographical Survey and Guide to Sources». *Studies in History and Philosophy of Science, 31 (4)*, 559-612.

TEMPELHOFF, G.F. (1770) *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*. Berlín, Lange.