Un modelo alternativo para la descripción de estrategias de estimación en cálculo

Carlos de Castro
Centro Superior de Estudios Universitarios LA SALLE. (UAM) Madrid
Isidoro Segovia y Enrique Castro
Universidad de Granada.

Resumen

En este estudio se analizan las estrategias de estimación en cálculo empleadas por maestros en formación. Se ha utilizado un modelo alternativo para la descripción de las estrategias de estimación. En él, las estrategias están integradas por destrezas de aproximación, algoritmos de cálculo, procesos cognitivos (reformulación, traducción y compensación) y procesos metacognitivos (como la valoración del resultado). La adopción de este modelo permite identificar y caracterizar estrategias de estimación y realizar una clasificación sistemática de las mismas, atendiendo a los procesos de estimación que intervienen en ellas.

Palabras clave

Cálculo; Destrezas básicas; Educación matemática; Estimación; Estrategias; Investigación educativa; Formación inicial de maestros; Modelos mentales; Procesos cognitivos; Procesos metacognitivos.

Abstract

In this study we have analyzed the estimation strategies employed by preservice elementary teachers. It has been used an alternative model for the description of computational estimation strategies. In this model, strategies are integrated by approximation skills, mental computation algorithms, cognitive processes (reformulation, translation and compensation) and metacognitive processes (as the assessment of the outcome). The adoption of this model allows making the identification and characterization of estimation strategies and to complete a systematical classification of the strategies, attending to the estimation processes intertwined with them.

Key words

Basic skills; Cognitive processes; Computation; Educational research; Estimation; Mathematics education; Mental models; Metacognitive processes; Preservice teacher education; Strategies.

Al analizar las estrategias utilizadas en la realización de tareas de estimación en cálculo, Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982) identifican tres procesos cognitivos generales de alto nivel que se ponen de manifiesto en las mismas: reformulación, traducción y compensación. La reformulación es "el proceso

de cambiar los datos numéricos para producir una forma (del problema) más manejable mentalmente. Este proceso deja la estructura del problema intacta" (p. 187); "La traducción es el proceso de cambiar la estructura matemática del problema por otra más manejable mentalmente" (p. 188); Se considera que hay un cambio en la estructura matemática del problema (y, por tanto, un proceso de traducción) cuando la sustitución de los datos iniciales produce un cambio en el algoritmo de cálculo empleado para hallar el resultado; este cambio puede producirse al cambiar las operaciones que se realizan o el orden en que se efectúan las mismas. Por último, la compensación se manifiesta en los "ajustes hechos para reflejar variaciones en los números debidas a la reformulación y a la traducción" (p. 189).

En la mayoría de las investigaciones dedicadas a la identificación y caracterización de estrategias de estimación en cálculo (Dowker, 1992; Dowker, Flood, Griffiths, Harris y Hook, 1996; Hanson y Hogan, 2000; LeFevre, Greenham y Waheed, 1993; Lemaire, Lecacheur y Farioli, 2000; Levine, 1982; Reys y otros, 1982) se han considerado "estrategias específicas" a las destrezas de aproximación utilizadas para sustituir los datos iniciales por otros más manejables (redondeo, truncamiento, sustitución de un decimal por una fracción, uso de números compatibles, etc.). Sin embargo, también han tenido consideración de "estrategias específicas" los algoritmos de cálculo (imitación del algoritmo escrito y los productos parciales incompletos), las propiedades de las operaciones (estrategia distributiva), los procesos generales de estimación (compensación intermedia, compensación final), e incluso las actuaciones de los alumnos en las que se pone de manifiesto que no están realizando una estimación (tratar de hacer un cálculo mental exacto, negarse a realizar una estimación o la ya citada imitación del algoritmo escrito) o en las que no hay un procedimiento genuinamente matemático (intentar adivinar el resultado). Esta falta de criterio para hacer una clasificación sistemática de las estrategias de estimación conduce a que cada autor utilice una clasificación distinta y a que sea difícil hacer una síntesis coherente con los resultados de estos estudios sobre estrategias.

Al contrario de lo que se ha hecho en investigaciones anteriores, en este trabajo se toma el término "estrategia" en un sentido más general. Consideramos como elementos constitutivos de las estrategias las destrezas de aproximación, pero también los procesos de estimación, los algoritmos de cálculo mental y la valoración del resultado. Al adoptar este planteamiento, se da cabida también -dentro de las estrategias de estimación- a procesos metacognitivos como los descritos por Sowder (1994). Esta autora afirma que los individuos considerados como buenos estimadores "suelen ser caracterizados como flexibles, tienen confianza en sí mismos, toleran el error en las estimaciones y (...) examinan la razonabilidad de los resultados" (p. 142). De este modo, el sujeto que realiza una estimación debe ser capaz de elegir de forma flexible una estrategia adecuada para el problema de estimación y de evaluar tanto el proceso (modificándolo si fuera oportuno) como el resultado (examinando la razonabilidad del mismo). Sowder (1994) considera la elección flexible de estrategias y la valoración del proceso y del resultado como ejemplos de "auto-regulación" y "auto-monitorización" que constituyen procesos metacognitivos.

El presente trabajo analiza las estra-

tegias de estimación en cálculo empleadas por maestros en formación mediante un modelo descrito en Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) en el que están recogidos todos los procesos de estimación identificados en estudios previos. En el enfoque adoptado en este trabajo, producir una estimación consiste básicamente en: sustituir los datos del problema por aproximaciones que permitan reducir la complejidad de los cálculos manteniendo la proximidad necesaria al resultado exacto, aplicar un algoritmo de cálculo mental a estas aproximaciones, realizar una compensación (previa o posterior al cálculo) y hacer una valoración del resultado obtenido. Como se ha expuesto, dependiendo del tipo de sustitución que se haga con los datos iniciales y si ésta implica (o no) un cambio en el algoritmo de cálculo, se estará ante un proceso de reformulación o uno de traducción.

Las características de este modelo para las estrategias de estimación pueden resumirse en la figura 1, tomada de Segovia y otros (p. 152). En páginas anteriores se esquematizan algunas estrategias generales que surgen de este modelo; un ejemplo de las mismas es el siguiente:

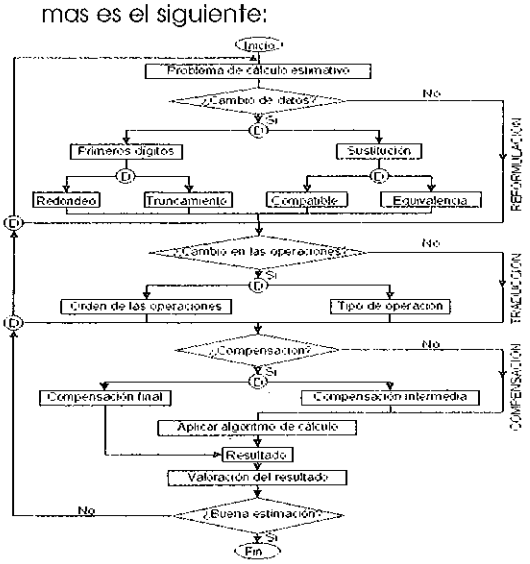

Figura 1. Diagrama de estrategias de estimación en cálculo. El símbolo D representa los puntos del procedimiento en los que hay que tomar una decisión.

PEC → Reformulación → Traducción → Compensación → Cálculo → Resultado → Valoración

El objetivo principal de esta investigación es describir las estrategias generales que utilizan los maestros en formación cuando realizan estimaciones en cálculos descontextualizados y ver si dichas estrategias pueden ser explicadas mediante el modelo descrito en el apartado anterior.

Método

Esta investigación forma parte de un trabajo más general (De Castro, 2001) en el que se estudia la influencia del tipo de número en tareas de estimación en cálculo. Con este fin se ha utilizado el test TEA (Test of Estimation Ability) (Levine, 1982) que consta de diez multiplicaciones y diez divisiones y combina distintos tipos de números: naturales, decimales mayores que uno y decimales menores que uno. En este apartado se describe la parte metodológica correspondiente al análisis de estrategias.

Sujetos

La muestra utilizada la constituyen, en el marco general de la investigación, 53 maestros en formación de diferentes especialidades de primer curso del Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle, adscrito a la Universidad Autónoma de Madrid. De esta muestra fueron seleccionados 10 sujetos para la exploración de estrategias. Todos los alumnos tuvieron un periodo de instrucción sobre estimación en cálculo (de 10 horas de duración) durante el que recibieron enseñanza explícita de estrategias de estimación y se practicó la estimación en cálculos directos y aplicados.

Instrumento y aplicación

Después de aplicar el Test de Levine (1982) a todos los participantes, se utilizaron los resultados para seleccionar sujetos para la fase del estudio de análisis de estrategias (que se describe en este trabajo). Para analizar las estrategias utilizadas por los sujetos se realizó una entrevista en la que se pedía a los sujetos que dieran una estimación para un cálculo propuesto y, a continuación, explicaran el procedimiento que habían utilizado para producir su estimación. En la entrevista se utilizaron los ítems del test de Levine (1982) en los que aparecen números decimales menores que uno (187.5 x 0.06; 64.5 x 0.16; 424 x 0.76; 0.47 x 0.26; 66 : 0.86; 943 : 0.48; 0.76 : 0.89). Se seleccionaron para la entrevista a los sujetos cuyas estimaciones -para los ítems citados- fueran todas compatibles (o todas incompatibles) con el conocimiento adecuado del efecto relativo de las operaciones. Se considera una estimación para el cálculo 187.5 x 0.06 compatible con un conocimiento adecuado del efecto relativo de las operaciones, si está dentro del intervalo (0.06, 187.5). Esto es, si el alumno no incurre al producir su estimación en ideas equivocadas como: "la multiplicación aumenta" o "la división disminuye". Las entrevistas han sido realizadas individualmente. Fueron registradas utilizando una grabadora y transcritas a papel para su posterior análisis.

Resultados

Las estrategias producidas por los sujetos han sido clasificadas teniendo en cuenta los procesos de estimación que aparecen en ellas. Así, hay estrategias en las que solamente se da un proceso de reformulación; en otras, la reformulación se produce junto con un proceso de compensación (que puede ser intermedia o final); un tercer grupo de estrategias es el formado por aquellas en las que se detectan procesos de reformulación y traducción; y, finalmente, en algunas estrategias se ponen de manifiesto todos los procesos de estimación (reformulación, traducción y compensación) considerados en el modelo de Reys y otros (1982). A continuación, se presentan ejemplos de análisis de estrategias pertenecientes a cada uno de los grupos citados. El análisis de cada estrategia se inicia con un fragmento de la trascripción -de las entrevistas realizadas a los participantes del estudio- que viene acompañado por un esquema de la estrategia.

Reformulación. En algunas estrategias solamente se ha identificado un proceso de reformulación. Entre ellas se encuentran los siguientes ejemplos:

Entrevistador: 0.47 x 0.26
Sujeto 41: Pues 0.3... (Redondea el segundo factor). He multiplicado 50 x 30, 0.150. Como si hiciera 50 x 30.

Problema de estimación en cálculo (PEC)	→	Reformulación	→	Cálculo
0.47 x 0.26	→	(50 x 30) ÷ 10000	→	0.150

En este caso, la reformulación se ha llevado a cabo mediante el redondeo de ambos números. Dado que los redondeos se han realizado hacia arriba, podría haberse realizado una compensación final "hacia abajo". Sin embargo, se ha observado que algunos sujetos evitan realizar cualquier tipo de compensación. Quizá por ser este proceso bastante complejo, algunos sujetos prefieren no utilizarlo antes que arriesgarse a cometer un error, incluso en situaciones tan claras como la anterior.

Reformulación y compensación. En los ejemplos siguientes, además de un proceso de reformulación pueden encontrarse compensaciones (tanto intermedias como finales) realizadas para tratar de "corregir" el error produ-

cido al sustituir los datos iniciales en la reformulación.

Entrevistador: 0.47 x 0.26
Sujeto 2: 0.1. Este redondeando a la alta y este a la baja. O sea 0.5 por 0.2.

PEC	→	Reformulación + Compensación intermedia	→	Cálculo
0.47 × 0.26	→	0.5 × 0.2	→	0.1

Entrevistador: 66 ÷ 0.86
Sujeto 42: A ver. Cuando estamos dividiendo, el número aumenta... Este número, si lo dividimos entre uno se queda igual. Al ser más pequeño, este número aumenta. Luego sería 0.86... sería... casi... esto... 75.

PEC	→	Reformulación	→	Cálculo	→	Compensación final
66 ÷ 0.86	→	66 ÷ 1	→	66	→	75

En el primer caso se redondea el 0.47 a 0.5 y, para compensar el aumento de uno de los factores, se redondea (hacia abajo) el otro factor. Tenemos pues una compensación intermedia (previa al cálculo). En el segundo caso la compensación es posterior a la realización del cálculo y se produce al final del proceso.

Reformulación y traducción. En otras estrategias se combinan los procesos de reformulación y traducción. En ellas suele haber una mayor riqueza conceptual que se manifiesta en la abundancia de relaciones que se establecen (entre las que cabe destacar aquellas que conectan los decimales con las fracciones).

Entrevistador: 0.47 x 0.26
Sujeto 53: Multiplicar por 0.25 es aproximadamente multiplicar por 1/4. Entonces divido 0.47 entre 4, pues 0.12.

PEC	→	Reformulación	→	Traducción	→	Reformulación	→	Cálculo
0.47 × 0.26	→	0.47 × 1/4	→	0.47 ÷ 4	→	0.48 ÷ 4	→	0.12

En primer lugar se produce un redondeo (0.26 a 0.25). A continuación se sustituye 0.25 por /. Esta última sustitución supone un cambio de operación (multiplicación por división) con lo cual, hay un proceso de traducción. Después se ha realizado otra reformulación para simplificar el cálculo, sustituyendo el dividendo por un múltiplo del divisor (uso de números compatibles). La primera reformulación lleva implícita una "compensación intermedia" que no ha sido señalada en el esquema por no parecer intencionada. Otro claro ejemplo de traducción es el siguiente:

Entrevistador: 424 x 0.76
Sujeto 53: Multiplicar por 0.76 es aproximadamente multiplicar por 3/4. Entonces, pues esto me da aproximadamente, divido primero entre 4 ya que es 424, entonces es 106 por 3, 318.

PEC	→	Reformulación	→	Traducción	→	Cálculo
424 × 0.76	→	424 × ¾	→	(424 ÷ 4) × 3	→	318

En este caso, en vez de multiplicar por 76 (o por 7 u 8 en el caso de utilizar los primeros dígitos) y luego dividir por 100 (o por 10), se divide primero entre cuatro y luego se multiplica por tres. Con ello, además de cambiar los números con los que se opera, hay un cambio en el orden de las operaciones y, por tanto, cambia la estructura matemática del problema.

Reformulación, traducción y compensación. Sólo en unos pocos casos se han combinado los tres procesos de estimación -descritos en Reys y otros (1982)- en una misma estrategia de estimación. En los siguientes ejemplos se produce una sustitución de un decimal por una fracción que posteriormente conduce a una traducción (pues en ambos casos se produce un cambio de operación).

Entrevistador: 64.6 x 0.16
Sujeto 42: Esto es un 16% de 64, que viene a ser la sexta parte, un poco más, pues... 12 sería mi estimación.

PEC	→	Reformulación	→	Reformulación	→	Traducción	→	Cálculo	→	Compensación
64.6 × 0.16	→	16% de 64	→	1/6 de 64	→	64 ÷ 6	→	¿10?	→	12

Entrevistador: 943 x 0.48
Sujeto 42: 943 dividido entre... 1750.
Entrevistador:

Explícalo. Sujeto 42: Esto si lo multiplicamos por 0.5 esto dobla, es como si lo multiplicamos por dos. Y esto por 2 son... 1900 casi, luego sería un poquito menos 1800 o 1750.

PEC	→	Reformulación	→	Traducción	→	Cálculo	→	Compensación
943 ÷ 0.48	→	943 ÷ 0.5	→	950 × 2	→	1900	→	1750

En cuanto a las dos compensaciones finales, hay en ambas un error en el sentido en que se realizan las mismas.

Procesos metacognitivos. A continuación figuran ejemplos en los se producen procesos metacognitivos como los descritos por Sowder (1994).

Entrevistador:

64.6 x 0.16 Sujeto 45: Pues aquí hago, esto como es 64.6 pongo 65 y 0.16 pongo 2 y entonces son 170. Entonces pongo 168... ¿la coma?... No, porque no es lo mismo 65 por 2 que son, ¿no? Porque esto le sumas 65 y esto... 0.170.

PEC	→	Reformulación	→	Cálculo	→	Valoración	→	Ajuste
64.6 × 0.16	→	65 × 2	→	170	→	Faltan los decimales	→	0.170

También ha habido procesos de estimación, dentro de los cuales el sujeto hacía una valoración conducente a un cambio en la estrategia:

Entrevistador:

66 ÷ 0.86 Sujeto 53: 66 entre 0.86 es multiplicar por 85 cienavos. Entonces divido entre cien y me queda... Bueno, esta me cuesta. Esta... multiplico por... más o menos lo voy a aproximar a 0.9. Entonces 9 x 10^{-1}, es dividir, entonces esto me quedaría aproximadamente 660 entre 9 y me daría... por 7... 63 pues aproximadamente 70.

PEC	→	Traducción	→	Valoración	→			
66 ÷ 0,86	→	66 × (85/100)	→	Difícil	→			
→ PEC	→	Reformulación	→	Traducción	→	Reformulación	→	Cálculo
→ 66 ÷ 0,86	→	66 ÷ (9 × 10^{-1})	→	660 ÷ 9	→	630 ÷ 9	→	70

En el segundo intento, el sujeto utiliza la sustitución mediante el uso de exponentes, lo que supone un proceso de traducción. Esta sustitución se complementa -como en los dos casos anteriores- con el uso de números compatibles, reemplazando 660 por 630 (que es múltiplo de 9).

Conclusiones e implicaciones

En este trabajo se ha utilizado un modelo alternativo para las estrategias de estimación basado en una concepción "global" de las mismas. En él, las estrategias están integradas por destrezas de aproximación, algoritmos de cálculo, procesos cognitivos (reformulación, traducción y compensación) y procesos metacognitivos (como la valoración del resultado).

La adopción de este modelo ha permitido realizar una clasificación de las estrategias de estimación (atendiendo a los procesos cognitivos que aparecen en ellas). Pensamos que este enfoque permite abordar la descripción y el análisis de las estrategias y los errores que se producen en la realización de tareas de estimación en cálculo de una forma más sistemática que la que proporcionan los marcos teóricos anteriores. Los resultados obtenidos han permitido validar el organigrama de análisis de estrategias que se ha mostrado como un modelo teórico comprensivo de los procesos de estimación realizados por los sujetos de la muestra.

Bibliografía

DE CASTRO, C. (2001). Influencia del tipo de número en la estimación en cálculo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

DOWKER, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. Journal for Research in Mathematics Education, 23(1), 45-55.

DOWKER, A., FLOOD, A., GRIFFITHS, H., HARRIS, L., HOOK, L. (1996). Estimation strategies of four groups. Mathematical Cognition, 2(2), 113-135.

HANSON, S. A., & HOGAN, T. P. (2000). Computational estimation skill of college students. Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 483-499.

LEMAIRE, P., LECACHEUR, M., & FARIOLI, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. Canadian Journal of Experimental Psychology, 54(2), 141-148.

LEVINE, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. Journal for Research in Mathematics Education, 15(5), 350-359.

LEFEVRE, J., GREENHAM, S. L. & WAHEED, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. Cognition and Instruction, 11(2), 95-132.

REYS, R. E., BESTGEN, B. J., RYBOLT, J., & WYATT, J. (1982). Processes used by good computational estimators. Journal for Research in Mathematics Education, 12(3), 183-201.

SEGOVIA, I., CASTRO, E., CASTRO, E., & RICO, L. (1989). Estimación en cálculo y medida. Síntesis. Madrid.

SOWDER, J. T. (1994). Cognitive and metacognitive processes in mental computation and computational estimation. In R. E. REYS, & N. NOHDA (Eds.), Computational alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States, (139-46). NCTM. Reston, Va.