RAICES DE FUNCIONES POLINOMICAS

Edwin Insuasty

El objeto de este artículo es mostrar la forma de determinar el número de raíces reales de una función polinómica y métodos para acotarlas. Para esto se enunciarán algunas propiedades y teoremas sobre las funciones polinómicas sin sus demostraciones, pues se trata más bien de aplicarlos.

Se ofrece al final del artículo bibliografía para que los lectores interesados puedan encontrar más información sobre el tema y las demostraciones rigurosas de lo que se mencionará a continuación.

En adelante, la función $f(x)$ se tomará como la función polinómica: $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ con coeficientes enteros. Se asumirá a_o con signo positivo. Antes de mencionar dos métodos para acotar las raíces de $f(x)$, tomemos las siguientes propiedades:

a) Si el grado de f es par, $f(x) \longrightarrow +\infty$ cuando $x \longrightarrow \pm\infty$

b) Si el grado de f es impar, $f(x) \longrightarrow +\infty$ cuando $x \longrightarrow +\infty$ y $f(x) \longrightarrow -\infty$ cuando $x \longrightarrow -\infty$

Hay que notar que para lo dicho en a) y b), se asume como positivo a a_o.

c) Para obtener de $f(x)$ otra función $g(x)$ la cual tenga por raíces las mismas de f cambiadas de signo, hay que cambiar los signos de los coeficientes pares o impares de f, según sea impar o par el grado de f.

Ejemplo 1: Dada $f(x) = 3x^4 - 6x^2 - 8x - 3$, la función $g(x) = 3x^4 - 6x^2 + 8x - 3$ tiene las mismas raíces de f cambiadas de signo.

Ejemplo 2: Dada $f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x - 14$, la función $g(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x - 14$ tiene las mismas raíces de f cambiadas de signo.

Cotas para las raíces de f(x).

Se enunciarán a continuación dos métodos para acotar superiormente las raíces de una función polinómica $f(x)$. Una cota superior cambiada de signo, para las raíces reales de la función $g(x)$ mencionada en el literal c), se convierte en una cota inferior para las raíces de $f(x)$.

1. **Método de Lagrange:** Si en la función $f(x)$, el primer coeficiente negativo es a_m y el mayor coeficiente negativo tomado en su valor absoluto es a_p entonces

   $$\sqrt[m]{a_p/a_o} + 1$$ es una cota superior para las raíces reales de $f(x)$.

2. **Método de Brest:** Se divide el valor absoluto de cada coeficiente negativo entre la suma de los coeficientes positivos anteriores a él. El mayor de estos cocientes aumentado en 1 es una cota superior para las raíces reales de $f(x)$.

En caso de no resultar entero el valor de la cota, se tomará el entero mayor más próximo. Considerando las funciones de los ejemplos 1 y 2 tenemos:

Ejemplo 3: Para $f(x) = 3x^4 - 6x^2 - 8x - 3$

$[g(x) = 3x^4 - 6x^2 + 8x - 3]$; $m = 2$, $a_p = 8$, $a_o = 3$,

$\sqrt{8/3} + 1 \approx 2.63$ cota superior (Lagrange) es 3

$6/3 + 1 = 3$, $8/3 + 1 \approx 3.66$, $3/3 + 1 = 2$ cota superior (Brest) es 4.

Las cotas inferiores:

$m = 2$, $a_p = 6$, $a_o = 3$, $\sqrt{6/3} + 1 \approx 2.41$ cota inferior (Lagrange) es -3

$6/3 + 1 = 3$, $3/3 + 1 = 2$ cota inferior (Brest) es -3.

Luego se puede asegurar que $f(x)$ tiene sus raíces reales en $(-3, 3)$.

Ejemplo 4: Para $f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x - 14$

$[g(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 12x - 14]$

$m = 1$, $a_p = 14$, $a_o = 1$, $14/1 + 1 = 15$ cota superior (Lagrange) es 15

$6/1 + 1 = 7$, $14/1+5+12 + 1 \approx 1.77$ cota superior (Brest) es 7.

Las cotas inferiores:

$m = 3$, $a_p = 14$, $a_o = 1$, $\sqrt[3]{14/1} + 1 \approx 3.41$ cota inferior (Lagrange) es -4.

$12/1+6+5 + 1 = 2$, $14/1+6+5 + 1 \approx 2.16$; cota inferior (Brest) es -3.

Por tanto $f(x)$ tiene sus raíces reales en $(-3, 7)$.

Funciones de Sturm.

Dada una función $f(x)$ se calcula el m.c.d. entre ella y su derivada $f'(x)$ mediante divisiones sucesivas tomando las siguientes condiciones:

* Cada residuo, al pasar a ser divisor, le cambiaremos sus signos.

* No multiplicar ni dividir por números negativos en cada operación parcial.

* Si el último residuo es una constante no nula, se le cambiará su signo también.

Notando los residuos sucesivos como $r_1(x)$, $r_2(x)$, ..., $r_{n-1}(x)$, llamaremos a:
$f(x)$, $f'(x)$, $r_1(x)$, $r_2(x)$, ..., $r_{n-1}(x)$ funciones de Sturm.

Teorema de Sturm.

Dada una función polinómica $f(x)$, el número de raíces reales que posee en (a, b) es igual al número de variaciones de signo que aparece en las funciones de Sturm cuando $x = a$, menos el número de variaciones de signo en dichas funciones cuando $x = b$.

Particularmente, si se observan los signos que toman las funciones de Sturm en "$-\infty$", 0 y "$+\infty$" se puede determinar el número total de raíces reales, cuántas son positivas y cuántas negativas.

Ejemplo 5: Tomando la función $f(x)$ del ejemplo 1, calculamos las funciones de Sturm (en el proceso de división se pueden multiplicar y dividir los coeficientes por cantidades positivas con el fin de evitar en lo posible las fracciones).

$f(x) = 3x^4-6x^2-8x-3$

$f'(x)= 12x^3-12x - 8$

$r_1(x)= 3x^2 + 6x + 3$

$r_2(x)= -3x - 2$

$r_3(x)= -1/3$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	−	+
$f'(x)$	−	−	+
$r_1(x)$	+	+	+
$r_2(x)$	+	−	−
$r_3(x)$	−	−	−
variaciones	3	2	1

$3 - 1 = 2$ raíces reales (y 2 complejas)

$3 - 2 = 1$ raíz negativa

$2 - 1 = 1$ raíz positiva

Según el ejemplo 3 estas raíces se encuentran en $(-3, 3)$

Ejemplo 6: Tomando la función $f(x)$ del ejemplo 2, tenemos sus funciones de Sturm:

$f(x) = x^4-6x^3+5x^2+12x-14$

$f'(x) = 4x^3-18x^2+10x+12$

$r_1(x) = 17x^2-51x+38$

$r_2(x) = 2x - 3$

$r_3(x) = 1/4$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	−	+
$f'(x)$	−	+	+
$r_1(x)$	+	+	+
$r_2(x)$	−	−	+
$r_3(x)$	+	+	+
variaciones	4	3	0

4 - 0 = 4 raíces reales

4 - 3 = 1 raíz negativa

3 - 0 = 3 raíces positivas.

Para llenar las tablas de estos ejemplos, hay que observar lo dicho en los literales a) y b) y que f(x) toma el signo del coeficiente independiente cuando x = 0.

BIBLIOGRAFIA.

P. Miquel y Merino. Elementos de Algebra superior. Cultural Centroamericana. Guatemala.

A.G. Kurosch. Curso de Algebra Superior. Editorial Mir. Moscú.

Hall y Knight. Algebra Superior. Uteha. México.