Ecuaciones diferenciales, una mirada a su teoria cualitativa

Saulo Mosquera López

PRESENTACION

Es normal que en pregrado los cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) traten una gran cantidad de métodos para resolver un gran número de ecuaciones diferenciales; pero también es normal que la mayoría de las E.D.O. que ocurren en las ciencias aplicadas no se adapten, en general, a estos métodos y que por tanto se deba recurrir a métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas de estas ecuaciones. Existe otro enfoque en el cual el énfasis se hace no en el conocimiento explícito de las curvas solución sino en el comportamiento cualitativo de las mismas; bajo este punto de vista se pretende en estas notas, presentar mediante ejemplos algunos conceptos utizados en este análisis.

INTRODUCCION

Hacia finales del siglo IXX, Henry Poincaré creó una nueva rama de las matemáticas cuando publicó su famosa memoria sobre la Teoria Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Desde entonces, la Topología Diferencial, uno de los principales desarrollos modernos del cálculo diferencial, tiene un lugar propio para esta teoría. Este tema ha llamado mucho la atención por ser una de las principales áreas de enlace y de semilla entre matemáticas puras y ciencias aplicadas. Las E.D.O. aparecen en muchos contextos científicos diferentes y en muchas ocasiones la teoria cualitativa proporciona una mayor comprensión de la realidad física de una situación. En la dirección opuesta, partes considerables de matemáticas puras pueden ser atacadas, directa o indirectamente, por esta fuente.

Supongamos que estamos estudiando un proceso que evoluciona con el tiempo y que deseamos presentar un modelo matemático de esta situación. Los posibles estados del sistema que tienen lugar durante el proceso pueden ser representados por puntos de una variedad diferenciable, la cual se conoce como EL ESPACIO DE ESTADOS del modelo. Por ejemplo, si el sistema consta de una sola partícula restringida a moverse sobre una linea recta, entonces se puede tomar como espacio de estados el Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^2$. El punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ representa el estado de la partícula situada, con respecto a un punto dado, x unidades a lo largo de la línea recta moviéndose en una dirección dada, con velocidad de y unidades en dicha dirección. El espacio de estados de un modelo puede ser de dimensión finita, como en el caso anterior, o puede ser de dimensión infinita. Por ejemplo, en dinámica de fluidos se tiene que considerar la velocidad del fluido en una cantidad infinita de puntos diferentes, así el espacio de estados es de dimensión infinita. Puede suceder que, durante el proceso los estados pasados y futuros del sistema estén determinados por su estado en un instante particular. En este caso diremos que el sistema es DETERMINISTICO . Los procesos que tienen modelo en la mecánica clásica son determinísticos; aquellos que tienen modelo en la mecánica cuántica, no lo son.

En el contexto determinístico, es frecuente el caso de que los procesos que pueden tener lugar en el sistema estén gobernados por un campo vectorial suave sobre el espacio de estados. Por ejemplo, en mecánica clásica, el campo vectorial involucrado, es solo otra manera de describir LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO que rigen todos los movimientos posibles del sistema. Se puede ser más explicito con lo que se quiere decir "el campo vectorial gobierna el proceso". Como el proceso evoluciona con el tiempo, el punto, representante del estado del sistema, se mueve a lo largo de una curva sobre el espacio de estados. La velocidad de este punto para toda posición x sobre la curva es un vector tangente con base en x, en el espacio de estados. El proceso está **gobernado** por el campo vectorial si su vector tangente es el valor del campo vectorial en x, para cualquier x sobre la curva.

En la TEORIA CUALITATIVA , se estudian campos vectoriales suaves sobre la variedad diferenciable, centrando la atención sobre la colección de curvas parametrizadas sobre la variedad que tienen la propiedad de tangencia descrita arriba. Se espera que cuando el campo vectorial es parte de un buen modelo matemático para una situación física, los rasgos sobresalientes de todas las propiedades geométricas de las curvas en el sistema, correspondan a fenómenos físicos significativos. Esto parece ser suficientemente razonable y es lo que se realiza en la práctica. Se examinan a continuación dos ejemplos de mecánica elemental desde este punto de vista.

1. EL PENDULO SIMPLE

Se considera una partícula P, de m unidades de masa, que está fija al final de una varilla de longitud ℓ y masa despreciable, el otro punto O de la varilla se considera fijo. La varilla rota libremente alrededor de O, sin fricción y sin resistencia del aire, sobre un plano vertical a través del mismo punto. El problema consiste en estudiar el movimiento de P bajo la acción de la gravedad. El sistema mecánico que se ha descrito se conoce como EL PENDULO SIMPLE y es, naturalmente una idealización de un péndulo en la vida real. Sin pérdida de generalidad se puede tomar $m = \ell = 1$ ya que siempre se puede modificar la unidad de medida para producir esto. Completamos la primera etapa de nuestro modelo con la suposición de que la gravedad ejerce una fuerza constante sobre P de g unid/sg^2 verticalmente hacia abajo.

Se desea encontrar un espacio de estados para el péndulo simple. A menudo esto se logra considerando la rotación de OP alrededor de O como positiva en una dirección y negativa en la otra; midiendo además

1. El desplazamiento angular θ (en radianes) de OP, respecto de la vertical a través de O.

2. La velocidad angular (en rad/sg) de OP (Fig. 1).

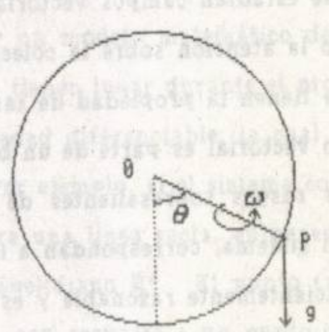


Fig. 1

Se puede tomar como espacio de estados $\mathbb{R}^2$, con coordenadas $(\theta,\ \omega)$. Se obtiene que la ecuación del movimiento para el péndulo es

$$\ddot{\theta} = -\,g\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{1}$$

donde $\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$. Si se usa la definición de ω, la ecuación (1) se puede reemplazar por el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\,g\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned} \tag{2}$$

Una solución de (2) es una curva (curva INTEGRAL) en el plano $(\theta,\ \omega)$ parametrizada por t. Si las coordenadas parametrizadas de la curva son $(\theta(t),\ \omega(t))$ entonces el vector tangente a la curva en el tiempo t es $(\omega(t),\ -g\,\mathrm{sen}(\theta(t)))$ con base en el punto $(\theta(t),\ \omega(t))$.

Si cuando $t = 0$ se escogen varios valores iniciales de θ y ω se obtienen varias curvas integrales, estas curvas forman el llamado DIAGRAMA DE FASES del modelo. Se puede mostrar que en este caso el diagrama de fases se ve como en la Fig. 2. Por sus diferentes apariencias en este diagrama se pueden distinguir cinco tipos de curvas integrales. Estas pueden ser interpretadas de la siguiente manera:

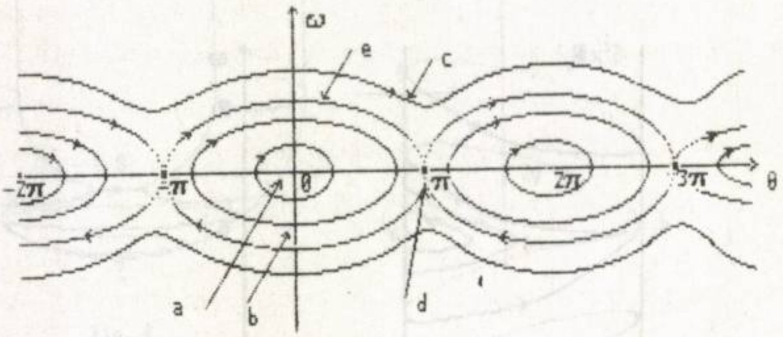


Fig. 2

a- El péndulo cuelga verticalmente hacia abajo y permanece en reposo.

b- El péndulo oscila entre dos posiciones de reposo instantáneo e igualmente alejadas de la vertical.

c- El péndulo rota continuamente en la misma dirección y nunca llega al reposo

d- El péndulo cuelga verticalmente hacia arriba y permanece en reposo.

e- Es el caso límite entre b y c, cuando el péndulo toma un tiempo muy grande para oscilar de una posición a otra.

El diagrama de fases de la Fig. 2 presenta ciertos hechos insatisfactorios. En primer lugar, el péndulo posee únicamente dos posiciones de equilibrio una ESTABLE (hacia abajo) y una INESTABLE (hacia arriba); sin embargo, a cada una de ellas, le corresponden infinitas curvas (puntos) en el diagrama de fases. En segundo lugar, las soluciones de tipo c son movimientos periódicos del péndulo pero en el retrato fase aparecen como curvas no periódicas. El hecho de importancia es que al menos existen razones muy fuertes para considerar que $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta_0 + 2\pi$ producen la misma posición del péndulo, puesto que no existe manera de distinguir instantáneamente entre ellas. Por tanto, EL ESPACIO DE CONFIGURACION, que es la variedad diferenciable que representa la posición espacial de los elementos del sistema mecánico, es en realidad un círculo en lugar de una línea recta. Para obtener un espacio de estados que describa completamente el sistema, reemplazamos el primer factor $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por el círculo S^1 el cual es realmente los números reales módulo 2π. Conservando θ y ω como parámetros se obtiene el diagrama de fases sobre el cilindro (Fig. 3).

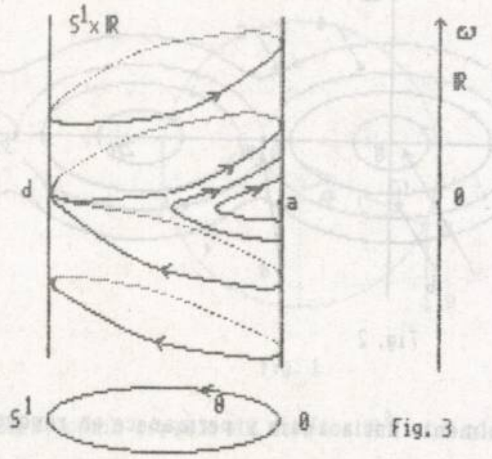


Fig. 3

Si se consideran la ENERGIA CINETICA T y la ENERGIA POTENCIAL V del péndulo, dadas por $T(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2$ y $V(\theta, \omega) = g(1 - \cos\theta)$ y se escribe $E = T + V$ para la ENERGIA TOTAL del péndulo, se encuentra que las ecuaciones (2) implican que $E' = 0$. Esto dice que E es constante sobre toda curva integral y se dice entonces que el sistema mecánico es HAMILTONIANO (CONSERVATIVO). En realidad, en este ejemplo, el diagrama de fases se construye más fácilmente determinando las curvas de nivel para E. Una manera sencilla de describir el papel de E es representar el espacio de estados $S^1 \times \mathbb{R}$ como un tubo doblado en $\mathbb{R}^3$ e interpretar E como la altura (Fig. 4)

Los dos brazos del tubo contienen soluciones correspondientes a rotaciones del péndulo en direcciones opuestas con la misma energía E, con $E > 2g$, la energía potencial del estado de equilibrio inestable.

Las propiedades de estabilidad individuales son evidentes de la Fig. 4. En particular, toda curva integral a través de un punto que es cercano a la posición de

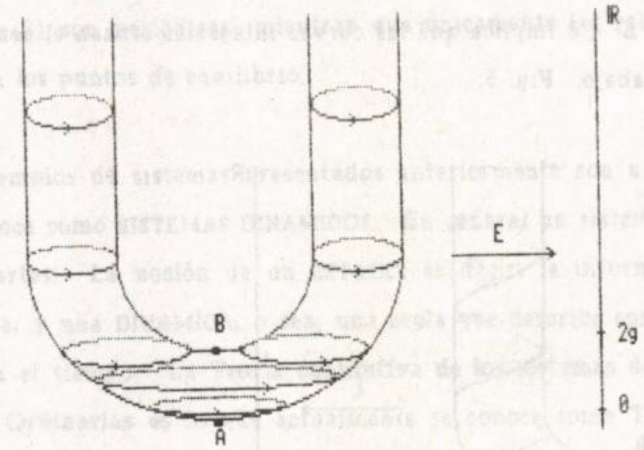


Fig. 4

equilibrio estable A permanece cercana a A para todo tiempo. Por otro lado existen puntos arbitrariamente cercanos a la posición de equilibrio inestable B tales que toda curva integral a través de ellos sale de una pequeña vecindad de B dada. Obsérvese que la función de energía E toma su mínimo absoluto en A y es estacionaria en B. De hecho en B se tiene un **punto silla**.

2. UN SISTEMA DISIPATIVO

En el ejemplo anterior, la conservación de la energía se debe a la ausencia del aire y de la fricción en el punto O. Ahora se desea tomar en consideración estas fuerzas y para evitar complicaciones supondremos que son directamente proporcionales a la velocidad angular. En este caso la ecuación (1) se reemplaza por

$$\ddot{\theta} = -g\,\mathrm{sen}\theta - a\,\dot{\theta} \tag{3}$$

donde a es una constante positiva. El sistema (2) queda

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -g\,\mathrm{sen}\theta - a\,\omega\end{aligned} \tag{4}$$

se encuentra entonces que $E' = -a\omega^2 < 0$ siempre que $\omega \neq 0$ y por tanto la energía decrece a lo largo de toda curva integral y se dice entonces que el sistema es DISIPATIVO. Si como en el caso anterior, E se representa como la función altura, la desigualdad $E' < 0$ implica que las curvas integrales cruzan el contorno horizontal de E hacia abajo. Fig. 5.

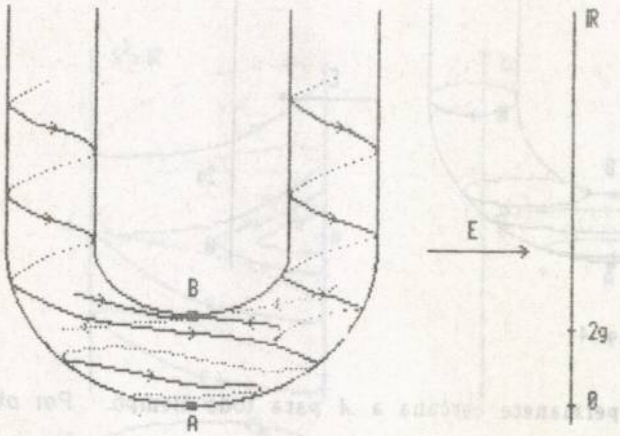


Fig. 5

Obsérvese que el equilibrio estable es ahora ASINTOTICAMENTE ESTABLE, es decir soluciones cercanas tienden hacia A en tiempos cercanos. El punto B sigue siendo un punto de equilibrio inestable y se tienen cuatro soluciones extrañas que se acercan o se alejan de B. En la práctica no se espera ser capaz de encontrar alguna de estas soluciones, puesto que no podemos esperar satisfacer las condiciones iniciales que se necesitan para ello, lo mejor que podemos esperar son soluciones cercanas que no poseen el efecto requerido.

Una comparación de los sitemas de ecuaciones (2) y (4) nos ayuda a mirar el importante concepto de ESTABILIDAD ESTRUCTURAL. En términos coloquiales, un sistema es estructuralmente estable si su diagrama de fases permanece cualitativamente el mismo cuando el sistema es modificado por una perturbación suficientemente pequeña del campo vectorial que define el sistema. **Cualitativamente el mismo** significa que existe un homeomorfismo del espacio de estados que aplica curvas integrales de un sistema en curvas integrales del otro. El sistema (4) muestra que el sistema (2) no es estructuralmente estable, puesto que la constante ϵ puede ser tan pequeña como queramos y los dos sistemas tienen propiedades esencialmente diferentes ya que por ejemplo la mayoría de las soluciones de (2) son periódicas, mientras que únicamente las soluciones periódicas de (4) son los puntos de equilibrio.

Los ejemplos de sistemas presentados anteriormente son una muestra de lo que se conoce como SISTEMAS DINAMICOS. En general un sistema dinámico consta de dos partes: La noción de un ESTADO, es decir, la información esencial de un sistema; y una DINAMICA, o sea, una regla que describe como el estado evoluciona con el tiempo. La **Teoría cualitativa de los sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** es lo que actualmente se conoce como **Teoría de los Sistemas Dinámicos.**

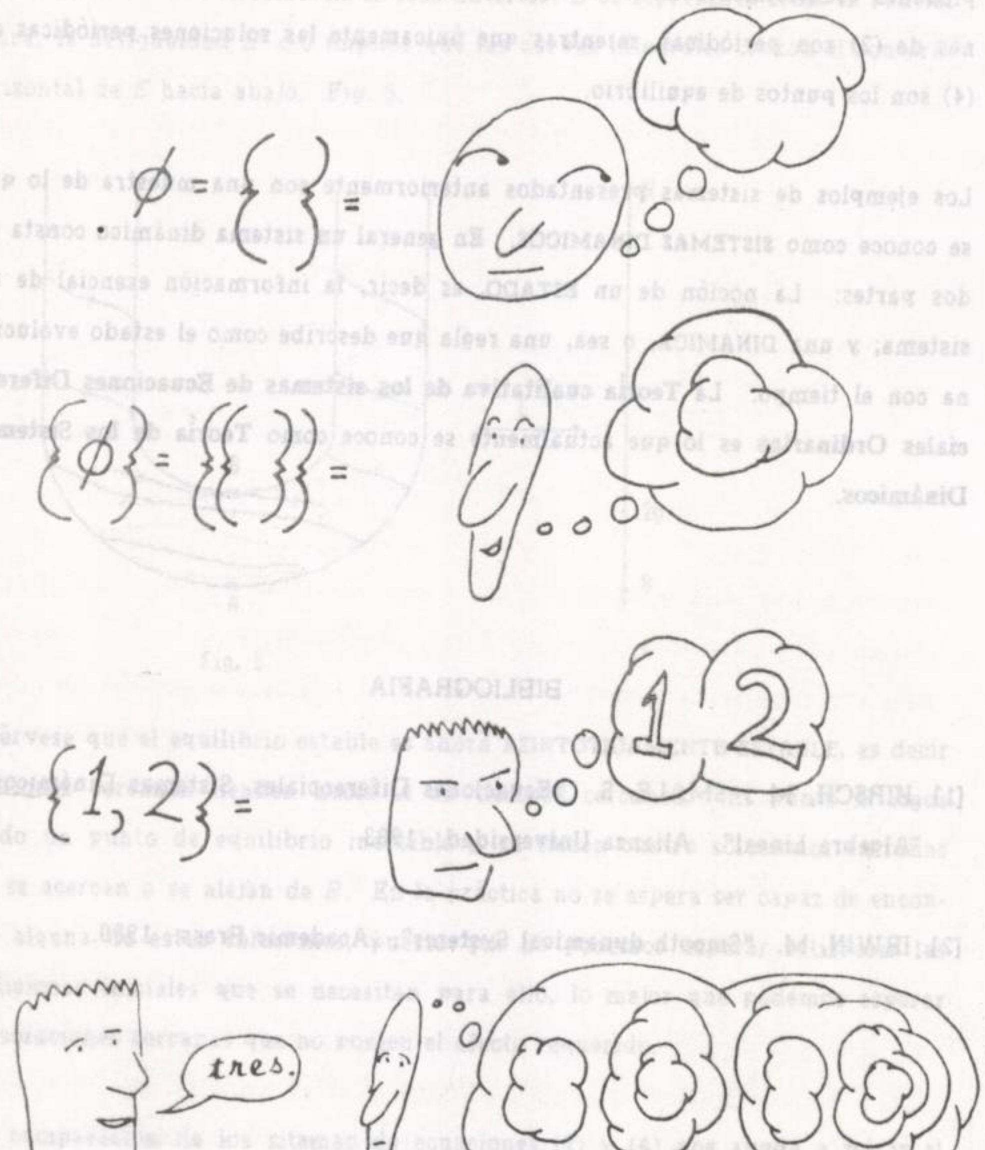
BIBLIOGRAFIA

[1] HIRSCH, M y SMALE, S. "Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Algebra Lineal". Alianza Universidad. 1983

[2] IRWIN, M. "Smooth dynamical Systems". Academic Press. 1980.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPTO. DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA
PASTO (N).

Dos puntos de vista



Rudy Rucker en Infinity and the Mind, Birkhäuser, 1982.

Tomado de "LECTURAS MATEMATICAS", volumen VIII, Nos. 1-2-3.