COÑECER E COMPRENDE-LAS MATEMÁTICAS

Antón Labraña
CEFOCOP de Santiago de Compostela

"Al revisar los textos de geometría se preguntaba si verdaderamente valía la pena saber leer, y de esos libros guardó una frase larga que soltaba en los momentos de mal humor: "La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo". Frase que más tarde causaba estupor entre los habitantes de El Idilio, y la recebían como un trabalenguas absurdo o una abjuración incontestable".

Luis Sepúlveda *(Un viejo que leía novelas de amor)*

Na biblioteca do instituto, dous dos meus alumnos de 3º de BUP disticutían sobre algunha cuestión relativa ó exame de matemáticas que ían ter despois do recreo. Como a cousa ía a máis, achegueime onda eles:

- ¿Verdade que é así o teorema do valor medio?, díxome el, estudiante de aceptable expediente académico, dándome a libreta de clase, nun xesto e nun ton que case esixían unha confirmación.

Pedinlle a ela, estudiante de regular rendemento, o seu caderno antes de darlles resposta ningunha.

¡Non daba creto ó que estaba a ver!: os dous recolleran frases gramaticalmente incongruentes. ¡Despois de todo o que eu me esforzara!

Ocultando a miña decepción, pregunteilles o que querían dicir.

- ¿Como que queremos dicir?, repuxo novamente el.
- Non te entendo, apostilou ela.

A guinda póñena cando, despois de aguantarme a réplica de rigor, preguntan:
- ¿Entón así non vale?

Na lectura desta fermosa novela de Luís Sepúlveda, o páragrafo que cito fíxome recordar este revelador episodio: ás veces é difícil capta-lo significado dun concepto ou dunha propiedade matemática, e en facer que sexa máis fácil esforzámono-los profesores; pero o que me resulta dramático como profesional da educación é que os estudiantes interioricen que a súa tarefa consiste en reproducilo canto máis exactamente mellor.

Non quero dicir que isto sexa sempre así, nin de xeito absoluto, pero é certo con demasiada frecuencia, e non só na nosa materia.

MATEMÁTICAS E SIGNIFICADO

Non creo que as matemáticas se inventaran para que rapaces e rapazas resolveran os problemas que lles presenta a vida, se non máis ben que foron creadas para afrontar problemas de natureza experimental ou teórica que se presentan nalgúns ámbitos profesionais dos adultos.

Pero se queremos, ou debemos, a pesar disto, comunicarlles unha parte pequena e substancial das mesmas, o problema pedagóxico estriba en conseguir dotalas de significado tamén a esas idades.

Os conceptos e propiedades que intentamos transmitirlles teñen que entrar en xogo en *actividades que para eles teñan sentido*, sexa este recreativo ou de aplicación simulada á realidade, e *deben proporcionar "aumento de eficacia"* nas respectivas actividades.

FORMACIÓN E INFORMACIÓN

Dende unha perspectiva máis ampla, a Educación non debe ter como meta conseguir que a información acabe acumulada nos cerebros dos nenos na maior dose posible, como se os libros e as enciclopedias estiveran a piques de ser queimados por terceira vez en Alexandría.

Na sociedade actual podemos acceder a moita máis información da que nos é posible manexar. Non parece coherente pretender que facer acopio de datos sexa un obxetivo educativo, se non máis ben que, de entre tódolos datos que interveñen nunha actividade, recordemos aqueles que lle dan consistencia e cohesión á mesma.

Tampouco podemos pensar, inxenuamente, que os conceptos e as prácticas que necesitarán os rapaces cando sexan adultos van coincidir cos que hoxe enchen os programas de estudio. Quizais sexa así só nunha pequena parte.

Revisei textos de diferentes editoriais e, aínda habendo en todos eles moitos aspectos interesantes, o dominio dos métodos memorísticos é un serio atranco para unha educación moito máis fructífera dos alumnos na actual "sociedade da información", e un pesado lastre para un traballo docente moito máis gratificante.

O desenvolvemento das capacidades xerais do pensamento (ordenar, relacionar, conxecturar, clasificar, inducir, deducir, planificar, explorar, comprobar, revisar, explicar, consultar...) debera ser un eixe básico e permanente das programacións de aula. O seu dominio esixe, tamén, moita práctica.

A información debera ser coidadosamente seleccionada para gañar tempo en pro dunha exercitación máis intensa neses aspectos ou procedementos que nomeei como "capacidades xerais". As posibilidades pedagóxicas de ter éxito na trasmisión, a presencia social e a vixencia científica son tres parámetros substanciais a ter en conta.

Presentaríase aquela en forma de xogos e problemas, para que os alumnos a procesen. Sen dúbida ningunha, nese procesamento, parte da información quedará rexistrada na memoria individual de cada un (posiblemente a máis relevante, dinámica e productiva), que poderá ser recuperada e reutilizada posteriormente para, contando cunhas capacidades básicas razoablemente desenvolvidas, **descubrir novas propiedades e construír novos conceptos.**

O profesor dirixe o traballo de aula:

propón, orienta, corrixe e explica.

O alumno tenta descubrir e resolver:

achégase á idea, vea, exprésaa, refórzaa e utilízaa.

FASES E CONTIDOS DE APRENDIZAXE

O traballo de aula, tal e como se suxiría nas liñas anteriores, percorrería, a grandes trazos, as seguintes fases:

1. Unha primeira fase, de *achegamento* á idea, preséntase baixo un problema con significados moi claros para os estudiantes.

2. Contrastando as primeiras impresións con novos casos, preténdese que se vexa o concepto ou a propiedade en cuestión.

3. Intentándoo por si mesmos, discutindo cos compañeiros e sendo corrixidos polos profesores, *exprésanse* as nocións que buscamos.

4. Con novos exemplos, con actividades recreativas e, se é pertinente, cunha demostracción deductiva, *refórzase* a aprenhensión das ideas.

5. Aplicándoo primeiro a situacións sinxelas que o suxiren facilmente, e despois a problemas (e xogos) máis diversos, *utilízanse* as ideas, mostrándose eficaces.

Ademais dos conceptos, termos e propiedades, *os procedementos forman parte do contido propio da actividade.*

Isto é importante clarificalo, pois non é tan evidente que así, planificando as diferentes fases, camiñemos con máis lentitude: ocorre que ampliámo-lo abano de cousas que hai que aprender, engadindo ós conceptos, termos e propiedades toda esa serie de recursos ou métodos de traballo que forman parte indisociable da matemática e que son, ademais, compoñentes indiscutibles do pensamento *(relacionar, conxecturar, explicar, confirmar ou rexeitar, explorar, inducir, comprobar, revisar, deducir...).*

O profesorado sempre estivo preocupado por este desenvolvemento harmómico e integral. Non se trata de descubrilo agora para a posteridade. O que viña sucedendo era que non se facía unha demanda explícita destoutros contidos e, consecuentemente, non se incluían nos libros de texto nin nas programacións de curso actividades orientadas á súa aprendizaxe, agás de xeito puntual ou complementario; pero a súa adquisición polo alumno esixe unha práctica continuada.

A continuación desenvolverei nun caso concreto estas ideas. O feito de que se expliciten diante dos alumnos algúns dos procedementos inmersos na tarefa non significa que xa cumpramos con eles. Pola contra, quizais non sexa prudente introducir termos como "conxectura", "inducción" ou "deducción" ata que se realice unha boa dose de práctica en torno a eles. (Este é un suposto para o caso que me ocupa.)

UN EXEMPLO

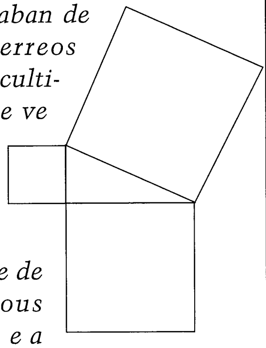
Quixera utilizar como exemplo o teorema de Pitágoras, unha das xoias da xeometría, situándome no nivel de 7º de EXB. Non vou dicir nada del que non se diga xa neste curso, só quero reflexionar sobre a maneira de abordalo.

Nos recadros figuran os textos dirixidos ós alumnos.

Inducción do teorema de Pitágoras

Xulia e Ana viven, cos seus pais, nunha casa de campo situada no medio dunha pequena finca con forma de triángulo rectángulo de lados 26, 24 e 10 metros.

Agora acaban de mercar tres terreos cadrados para cultivar, tal como se ve no debuxo.



A nai encárgalle a Xulia que limpe de maleza os dous máis pequenos, e a Ana, o grande. Xulia protesta, dicindo que os dous xuntos son moito máis có grande.

¿Que opinas ti?

Debuxa o triángulo e comproba que é realmente rectángulo. (Podes tomar a cuadrícula da libreta como unidade.)

¿Sucedería o mesmo se os lados fosen 6, 8 e 10 cm?

Debúxao e comproba se tamén é rectángulo. (Agora podes facelo a tamaño real.)

¿Cres que isto mesmo pasaría con calquera outro triángulo rectángulo? Explícao coas túas propias palabras.

Neste último punto, despois que os alumnos expresen e discutan as súas opinións, convén a intervención do profesor para matizar, precisar e recolle-la idea:

"nun triángulo rectángulo o cadrado da hipotenusa é igual á suma dos cadrados dos catetos" (ou "a área do cadadro construído sobre...", segundo se estime máis oportuno)

Este tipo de opinión, formada a partir duns indicios, chámase **conxectura.**

Agora deberiamos investigar moito máis para tentar de confirmala.

Debuxa un triángulo rectángulo que non coincida cos anteriores, mídeo coidadosamente e comproba se ten a mesma propiedade.

Debes ter en conta que as medicións case nunca saen perfectas, polo que será dabondo con conseguir unha boa aproximación.

Cando remates sae ó encerado e cubre unha liña da táboa.

Mentres traballan, no encerado iremos pintando unha táboa como a que figura ó pé da páxina:

A táboa debe se-lo bastante grande como para que todos poidan escribilo seu nome. Este tipo de actividade ten, ademais, **unha compoñente emocional de grande importancia:** todos, por si mesmos, ou cunha pequena axuda ós alumnos máis atrasados, poderán ve-lo seu nome na pizarra e senti-la utilidade do seu traballo.

Sobre a marcha iremos revisando aqueles debuxos, cálculos e medicións que sexan obviamente erróneos.

Unha conclusión obtida desta maneira dise que é unha **inducción.**

En matemáticas, así como noutros ámbitos da vida, moitos descubrimentos fixéronse deste xeito: pasando dunha sospeita a unha exploración intensa.

Pero hai outros camiños na investigación e no descubrimento, que se reforzan os uns ós outros.

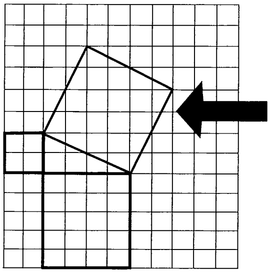
NOME	**a**	**b**	**h**	**a^2**	**b^2**	**h^2**	**$a^2 + b^2$**	**¿aproxímase dabondo?**

ACTIVIDADES RECREATIVAS

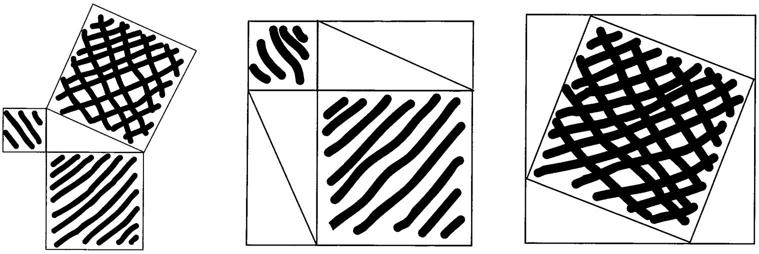
Sobre unha cadrícula pinta un triángulo rectángulo de catetos 3 e 4. Calcula a hipotenusa e comprobao medíndoa.

Debuxa sobre cada lado un cadrado.

Aparte, fai un cadrado de lado 5, recórtao e colócao sobre a hipotenusa: ¿coinciden, non si?



Debuxa en cartolina un triángulo rectángulo e un cadadro sobre cada lado.
Recórtaos e recorta tamén 7 triángulos iguais ó anterior. Constrúe as figuras a) e b) que se indican no debuxo:



Os novos cadrados, ¿son iguais? ¿Como podes comprobalo?

¿Podes razonar a partir de aquí que a área do cadrado feito na hipotenusa é igual ás outras dúas xuntas?

Se o consegues poderás presumir diante dos teus amigos de que tes un "puzle pitagórico", que proba unha das máis importantes propiedades da matemática.

Desfai todo e tenta facelo de novo sen mirar.

DEDUCCIÓN DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Empregando a terminoloxía de Piaget poderiamos dicir que non tódolos alumnos e alumnas acadan o estadio das "opeacións formais" simultaneamente. Pero, se dicimos, simplemente, que a madurez é bastante diferente duns ós outros, tamén nos entederiamos.

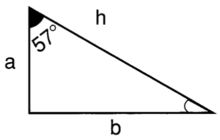
Este apartado, de caracter eminentemente formal, non estará, en opinión de profesores/as de EXB ós que consultei, ó alcance de moitos dos alumnos/as de 7º curso, aínda que si dalgúns.

O razonamento deductivo é agora o que debemos valorar, pois a propiedade de Pitágoras xa será, polas anteriores actividades, coñecida.

Entendo que o razoamento pode facerse máis simple do habitual, conservando todo o rigor dunha deducción, e pode, tamén, apoiarse en sinxelos materiais. Intentareino.

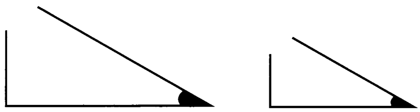
Convén repasar antar algunha cuestión relativa os ángulos dos triángulos e ás relacións de semellanza:

- Os ángulos dun triángulo suman 180°. Se un triángulo rectángulo ten un ángulo de 57º, ¿canto mide o outro?

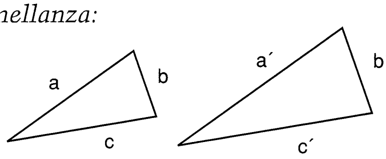


- Figuras semellantes son as que teñen a mesma forma pero diferente tamaño ¿Como son os ángulos de dous triángulos semellantes?

¿Como son dous triángulos rectángulos que teñen un ángulo agudo igual?

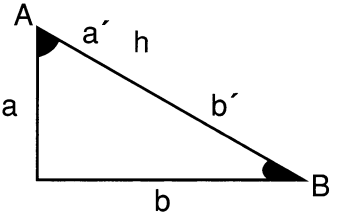


- Os lados homólogos de dous triángulos semellantes son proporcionais. Escribe a relación de semellanza:



Debuxa un triángulo rectángulo e pinta os dous ángulos agudos de colores diferentes.

Cópiao e traza unha perpendicular á hipotenusa, tal como se ve no debuxo. Recórtaos e colócaos na posición máis cómoda. ¿Como son os novos triángulos que obtemos?



Estudia se son semellantes e, en caso de selo, escribe as relacións de semellanza:

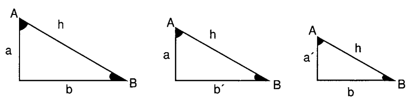
- entre o grande e o mediano

- entre o grande e o pequeno.

Tenta, a partir do anterior, chegar a probar que $a^2 + b^2 = h^2$

O razonamento que se pretende sería:

Colocandoos na orde e na posición que nos é máis cómoda:



Podemos comprobar facilmente que son semellantes pois; sendo os tres rectángulos:

- o mediano ten o mesmo ángulo B que o grande, logo terá tamén o A

- o pequeno ten o mesmo ángulo A que o grande, logo terá tamén o B.

Establecemos as relacións de semellanza:

- entre o grande e o mediano:

$$\frac{h}{b} = \frac{b}{b'} \longrightarrow h.b' = b.b \longrightarrow b^2 = h.b'$$

- entre o grande e o pequeno:

$$\frac{h}{a} = \frac{a}{a'} \longrightarrow h.a' = a.a \longrightarrow a^2 = h.a'$$

De aquí:

$$a^2 + b^2 = h.a' + h.b' = h.\,(a' + b') = h.h = h^2$$

Este tipo de razoamento chámase **deducción**.

Partimos de cousas que xa sabemos ou que aceptamos como válidas e, con *lóxica e enxeño*, tratamos de chegar á conclusión que sospeitamos (ou, coma neste caso, da que xa podiamos estar convencidos por outras maneiras).

É importante reparar en que a lóxica garantízano-la corrección dos pasos dados, pero a decisión de dalos (¿porque cortar o triángulo cunha perpendicular?,....) perteñece ó ámbeto do enxeño.

APLICACIÓNS

A continuación entrariamos nas aplicacións: sinxelos exercicios da propiedade sobre triángulos, problemas que requiren a construcción do triángulo (lonxitude do cable, o pasamáns, pirámide,...) e xogos, adaptados ou orixinais, que recrean o teorema.

Desenvolver isto requíreme algunhas páxinas máis polo que, se resultase de interese, faceríao noutro artigo.