

Cuadratura de Polígonos por Disección

Oscar Fernando Soto Agreda¹
Libardo Jácome²

Abstract. The last ten theorems from Book I of the Elements of Euclid turn out to be testimonies of Man's concern for the transformation of equally-large figures and especially in order to find the area of a flat figure using a rule and compass. The problem of the quadrature of the circle, for example, held the academic community up until the 17th century when its insolvability was determined. In this article particular cases of quadratures are presented by means of dissection and with the use of innovative theoretical elements in order to establish a general procedure to find the area of any rectangle without taking into account the value of reason between the longitude of its sides.

Keywords. Equally-large, Quadrature, Real Quadrature, Dissection, Elemental Rectangle.

Resumen. Los últimos diez teoremas del Libro I de los Elementos de Euclides resultan ser testimonios de la preocupación del hombre por la transformación de figuras equiextensas y especialmente por cuadrar una figura plana utilizando regla y compás. El problema de la cuadratura del círculo, por ejemplo, mantuvo en vilo a la comunidad académica hasta el siglo XVII cuando se determinó su irresubilidad. En este artículo se presentan casos particulares de cuadraturas por la vía de la disección y con la utilización de elementos teóricos innovadores al establecer un procedimiento general para cuadrar un rectángulo cualquiera sin importar el valor de la razón entre la longitud de sus lados.

Palabras Clave. Equiextenso, Cuadratura, Cuadratura Real, Disección, Rectángulo Elemental.

Introducción

Un tema recurrente en los textos de contenido científico de carácter popular, o en las secciones de divertimentos en revistas especializadas es el de la transformación de áreas, proceso en el que el concepto de área queda invariante. El problema consiste en diseccionar una figura plana en la menor cantidad de piezas con el fin de reordenarla para convertirla en otra. Los grandes creadores de acertijos, el inglés Ernest Dudeney y el estadounidense Sam Loyd recurrieron al tema de la transformación de áreas para mantener columnas en la Revista Tit-Bits. Por increíble que parezca, en este tipo de rompecabezas cuya solución depende de la disección, subyacen altos conceptos y principios matemáticos. La disección asegura que al cortar una figura y reordenar las piezas, el área total no cambia. A una pregunta del matemático húngaro Wolfgang Bolyai, Gerwein demostró que dados dos polígonos planos

¹Profesor de Tiempo de la Universidad de Nariño- Colombia. Adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística.

²Profesor de Tiempo Completo Ocasional de la Universidad de Nariño-Colombia. Adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística.

de igual área, existe un conjunto finito de piezas poligonales idénticas que pueden ser reordenadas para configurar cualquiera de las dos figuras. Este resultado teórico importante, se conoce como el Teorema de Bolyai-Gerwein y fue demostrado por William Wallace en 1807.

Es importante en la transformación de figuras mostrar ejemplos claros y evidentes de formas que son equivalentes por disección. En este artículo se indica un procedimiento general que permite convertir cualquier rectángulo en cuadrado. El procedimiento entrega una disección particular que se ha denominado cuadratura real y resulta elemental, contrario a las disecciones elaboradas y complejas encontradas por el fanático de la disección David Collison.

En el libro *Dissection: Plane and Fancy* de Greg N. Frederickson, se indican algunos principios básicos de la disección como el principio del escalón y el principio de la teselación. Harry Lingren, autor del libro *Geometry Dissections*, experto mundial en disecciones ha presentado con frecuencia ejemplos de figuras poligonales que se convierten en cuadrados como los correspondientes a la cruz griega, el dodecágono regular y el clásico problema de la silla de mano o silla de la novia.

Como se muestra en este artículo, las disecciones están íntimamente ligadas a otra gran preocupación, que es la agregación de nuevas demostraciones a las casi cuatrocientas que posee el teorema de Pitágoras.

El problema de la cuadratura de una figura plana de área A consiste en construir un cuadrado de área A utilizando regla y compás. Un rectángulo de lados a y b se cuadra al construir un cuadrado de lado \sqrt{ab} , para ello se sigue el procedimiento establecido por Euclides en la Proposición 13 del libro VI de sus Elementos. Sin embargo, esta cuadratura no permite ejecutar una disección del rectángulo para que, por yuxtaposición con las secciones resultantes, se pueda configurar el cuadrado.

Una cuadratura real es la partición de una figura geométrica plana mediante segmentos rectilíneos de manera tal que la yuxtaposición de todas sus partes configuran un cuadrado. La figura inicial y el cuadrado, en consecuencia tienen la misma área.

En el libro de divulgación popular *Nuevos Pasatiempos Matemáticos*, Martín Gardner expone la fragmentación de la estrella de David elaborada por E.B. Scout y del dodecágono regular encontrada por Harry Lindgren. La particularidad de las soluciones exhibidas es que el número de fragmentos es reducido; cinco para la estrella de David y seis para el octágono regular y a ello se anexa que las piezas de la disección adquieren formas curiosas que hacen adivinar que por yuxtaposición de ninguna forma se configuraría un cuadrado. Así, las soluciones son asombrosas, simples y bellas, pues se rodean de perplejidad.

Este artículo exhibe la cuadratura real del octágono regular y de un infinita clase de rectángulos sin importar la razón que tengan las longitudes de sus lados. La idea general es la de descomponer un polígono cualquiera en triángulos que a su vez se transforman en rectángulos y ellos en cuadrados y por último, mostrar que la suma de cuadrados es un cuadrado como lo demostró Euclides en la Proposición 47 del Libro I de los Elementos en el llamado Teorema de Pitágoras o en concordancia con el método real que aquí se presenta. La transformación mencionada se indica en la Figura 1.

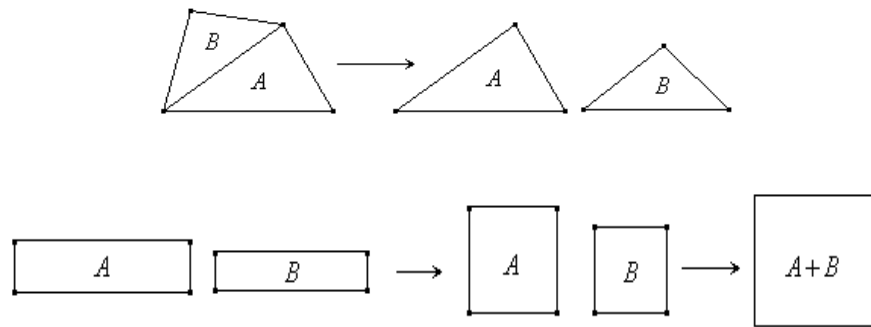


Figura 1:

Cuadratura real significa que es efectivamente posible realizar la disección utilizando papel y tijeras, donde las tijeras adquieren el acento euclideo ya que cortan en línea recta.

1. Cuadratura de Polígonos

Todo polígono es susceptible de diseccionarse en triángulos, si el polígono es convexo es suficiente tomar un vértice cualquiera y trazar todos los segmentos a los demás vértices. En la Figura 2 se indica una triangulación para un polígono cóncavo y otro convexo.

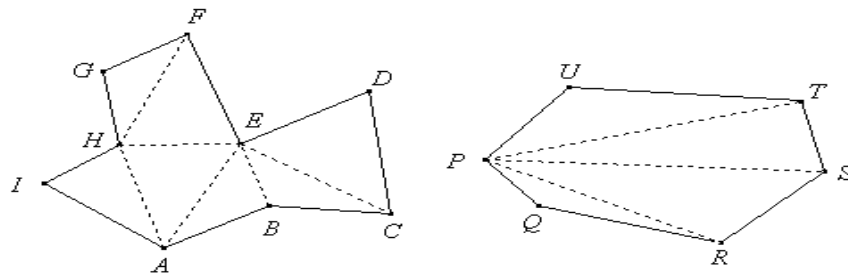


Figura 2: Triangulación para un polígono cóncavo y convexo.

1.1. Cuadratura del Triángulo

Sea el triángulo $\triangle ABC$. La idea es fragmentar el triángulo y conformar, con la partición conseguida, un rectángulo. Se traza la altura CD y se toman los puntos medios M, N, P y Q de los segmentos \overline{AD} , \overline{DB} , \overline{AC} y \overline{BC} respectivamente. El cuadrilátero $MNPQ$ es un rectángulo. Se prolonga \overline{PQ} y se trazan por A y B perpendiculares a la recta \overleftrightarrow{PQ} ; de este modo se determinan los puntos I y J .

Es suficiente ver que $\triangle 1 \cong \triangle 2$ y $\triangle 3 \cong \triangle 4$ y en consecuencia los triángulos 1 y 2 se colocan por movimientos rígidos, en las posiciones de los triángulos 2 y 4 para conformar el rectángulo $ABJI$. Tal y como se indica en la Figura 3.

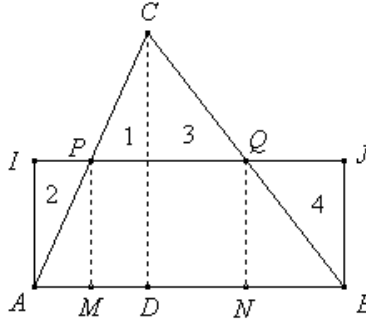


Figura 3:

Para la cuadratura real del rectángulo, que es el paso subsiguiente en el propósito de cuadrar el triángulo, se presentan los siguiente resultados teóricos que conducen a ese objetivo.

Teorema 1.1. *Si desde los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado l se trazan tangentes a una circunferencia de centro en el centro del cuadrado y radio r tal que $r \leq \frac{l\sqrt{2}}{4}$, las tangentes determinan un cuadrado interior y cuatro cuadriláteros congruentes entre sí que por yuxtaposición configuran un cuadrado; esta cinco piezas constituyen una disección del cuadrado que se transforma en dos cuadrados*

Demostración. Sea el cuadrado $LKJI$ y los puntos A, B, C y D los puntos medios de cada uno de sus lados y el cuadrilátero $EFGH$ determinado por las tangentes a la circunferencia de centro en O trazadas desde esos puntos medios. Los puntos S, P, Q y R son puntos de tangencia y también los puntos medios del cuadrilátero R . Se trazan los segmentos $\overline{AC}, \overline{SQ}, \overline{AD}, \overline{AB}$ y \overline{BD} .

Los triángulos rectángulos $\triangle ASO$ y $\triangle CQO$ son congruentes por tener la hipotenusa y un cateto iguales, luego $\overline{AS} = \overline{CQ}$. De igual modo se demuestra que $\overline{BP} = \overline{DR}$ y $\overline{AS} = \overline{BP}$; además los ángulos $\angle \rho$ y $\angle \lambda$ son iguales.

Como el ángulo $\angle HAC \cong \angle FCA$, entonces la recta \overleftrightarrow{FC} es paralela a la recta \overleftrightarrow{AH} . Así mismo la recta \overleftrightarrow{BE} es paralela con la recta \overleftrightarrow{GD} . Por E se traza una paralela a la recta \overleftrightarrow{AC} ; entonces $\Psi = \lambda = \rho$ y $\varphi = \rho$. Ahora $\Psi + \varphi = \rho + \sigma = \frac{\pi}{2}$.

el mismo modo se puede demostrar que los ángulos en F, G y H son rectos. Como la tangente a una circunferencia es perpendicular al diámetro en el punto de tangencia se encuentra que \overline{ES} es perpendicular con \overline{SQ} y dado que el ángulo en E es recto y \overline{SQ} es paralela con \overline{EF} entonces el cuadrilátero $EFQS$ es un rectángulo y por ello $\overline{SQ} = \overline{EF} = 2r$, siendo r el radio de la circunferencia de centro en O . Por idénticos razonamientos se encuentra que $\overline{EH} = 2r$, $\overline{HG} = 2r$ y $\overline{GF} = 2r$ y en concordancia con esto, el cuadrilátero $EFGH$ es un cuadrado.

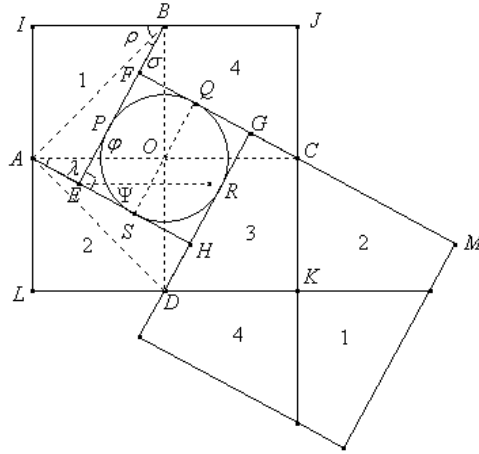


Figura 4:

Se muestra que el cuadrilátero $ABEI$, que se ha signado como 1 en la Figura 4, es congruente con el cuadrilátero rotulado como 2 ya que $\overline{BP} = \overline{AS}$ y $\overline{PE} = \overline{SH} = r$, entonces $\overline{BP} + \overline{PE} = \overline{AS} + \overline{SH}$ y así las cosas $\overline{BE} = \overline{AH}$ o lo que es lo mismo $\overline{BF} + \overline{FE} = \overline{AE} + \overline{EH}$, pero $\overline{FE} = \overline{EH}$, entonces $\overline{BF} = \overline{AE}$. Por discernimientos análogos se prueba que $\overline{AE} = \overline{DH}$.

Los cuadriláteros rotulados como 1 y 2 se descomponen en dos triángulos rectángulos y se observa que $\angle AIB \cong \angle ALD$ y $\angle AEB \cong \angle DHA$ e igual descomposición con congruencias sufren los otros cuadriláteros rotulados como 2 y 4 siendo todos, congruentes entre sí.

Para demostrar que los cuadriláteros 1, 2, 3 y 4 forman un cuadrado es suficiente aplicar translaciones adecuadas a cada uno de ellos como se dispone a continuación y que se han representado en la Figura 4.

El cuadrilátero 1 se traslada según el vector \overrightarrow{IK} .

El cuadrilátero 2 se traslada según el vector \overrightarrow{LK} .

El cuadrilátero 4 se traslada según el vector \overrightarrow{JK} .

El cuadrilátero 3 se traslada según el vector nulo.

El resultado de estas transformaciones rígidas es el cuadrado de lado \overline{GM} que aparece en posición oblicua.

Al llamar b al lado del cuadrado conformado por los cuadriláteros 1, 2, 3 y 4 se tiene que $b = \overline{GC} + \overline{CM} = \overline{GC} + \overline{AH} = \overline{GC} + \overline{AE} + \overline{EH} = 2\overline{CG} + 2r$ de donde $\overline{CG} = \frac{b-2r}{2}$, dato importante para conseguir el propósito que persigue el artículo.

✓

1.2. Cuadratura del Octágono Regular

Una aplicación natural del teorema anterior, es el de la transformación de un octágono regular en un cuadrado; transformación que sigue el recurso en el que se fundamenta este artículo.

Dado el octágono regular $ABCDEFGH$ y siendo $\overline{AB} = l$ se prolonga los lados opuestos con el fin de construir un cuadrado de lado $l + 2x$. La inspección del valor de x determina que

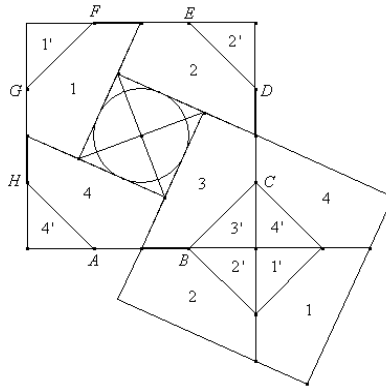


Figura 5:

$x^2 + x^2 = l^2$ y por ello $x = \frac{\sqrt{2}l}{2}$. En concordancia con esto, el área del nuevo cuadrado es $A = \sqrt{2}(2 + \sqrt{2})l^2$. Sea O el centro del cuadrado que hace centro a la circunferencia de radio $\frac{l}{2}$ y desde los puntos medios de los lados del octágono se trazan las tangentes a la circunferencia para configurar los cuadriláteros que se han rotulado en la Figura 5 como 1, 2, 3 y 4 que al disponerlos en concordancia con las traslaciones señaladas en el Teorema 1.1, configuran un cuadrado. El cuadrado pequeño que se ubica en el centro resulta ser la agregación de los triángulos que se agregaron en la construcción inicial.

1.3. Cuadratura de un Rectángulo

El artículo centra su atención en la cuadratura de un rectángulo elemental, pero es natural que uno no elemental se particione en rectángulos elementales, cada uno de los cuales se cuadra. Finalmente se suman cuadrados y se sabe que la suma de cuadrados es un cuadrado.

Todo esto deriva en asegurar que el método expuesto en este artículo permite diseccionar cualquier rectángulo para transformarlo en un cuadrado.

Definición 1.2. Se denomina *rectángulo elemental* a todo rectángulo de lados a y b que satisfacen las relaciones $a > b$ y $b \geq (\sqrt{2} - 1)^2 a$.

La Figura 6 exhibe un rectángulo elemental.

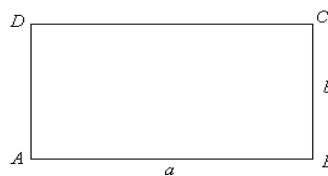


Figura 6:

Teorema 1.3. *Todo rectángulo elemental admite cuadratura real.*

Demostración. Desde los resultados $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ se consigue que $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ y por ello $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$ o $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ y al escribir $d = \frac{a+b}{2}$ y $c = \frac{a-b}{2}$, se tiene en definitiva que $ab = d^2 - c^2$.

Esto significa que el área del rectángulo es igual al área del hexágono en forma de L que aparece sombreado en la Figura 7.

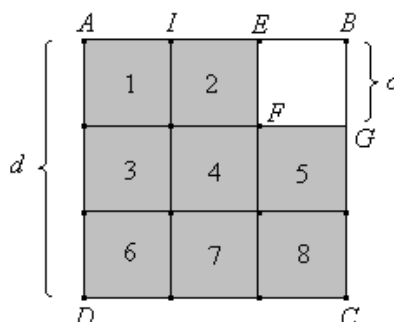


Figura 7:

Para descomponer el rectángulo $ABCD$ que se ha transformado en el hexágono en forma de L, como aparece en la Figura 7, se prolonga el lado \overline{AB} y haciendo centro en B se traza un arco de circunferencia con radio b que corta a la recta \overleftrightarrow{AB} en el punto E ; a continuación se toma el punto medio de \overline{AE} que se rotula con M y por el se traza una perpendicular a la recta \overleftrightarrow{AB} que corta a la recta \overleftrightarrow{CD} en N , como se muestra en la Figura 8.

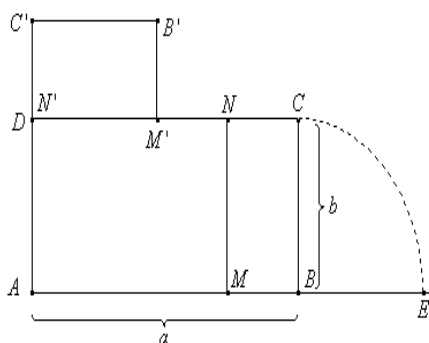


Figura 8:

El punto M pertenece al segmento AB puesto que $AM = \frac{a+b}{2} = d$ y siendo $b < a$ se tiene $\frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2}$, es decir $\frac{a+b}{2} < a$. También $MB = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} = c$. Se dispone, a continuación, el rectángulo $MBCN$ como se indica en la Figura 8 para obtener el hexágono $AMNM'B'C'$ en forma de L con igual área del rectángulo original ab . Además $AC' = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = d$ y $M'N = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$.

Retomando la Figura 7, se toman los puntos I y J que son los puntos medios de los segmentos \overline{AE} y \overline{GC} . Por I se traza una paralela a la recta \overleftrightarrow{BC} y por J una paralela a la recta \overleftrightarrow{AB} ; así quedan determinados los rectángulos rotulados como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 que se pueden disponer en un cuadrado de lado d de la forma en que se muestra en la Figura 9.b. (El cuadrado que no está sombreado queda ubicado en el centro como en un marco tipo paisaje mientras que los rectángulos mencionados hacen un marco.)

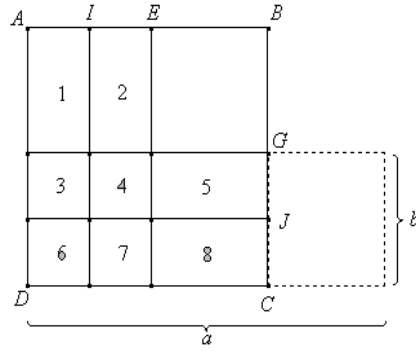


Figura 9.a

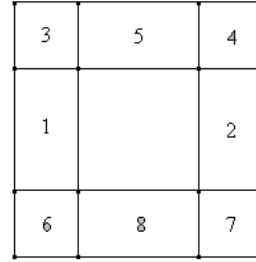


Figura 9.b

Las figuras 9. a, 9.b, 9.c y 9.d presentan todo lo expuesto hasta el momento para determinados valores a y b . La transformación indica como un rectángulo elemental se descompone en el marco de un cuadrado central.

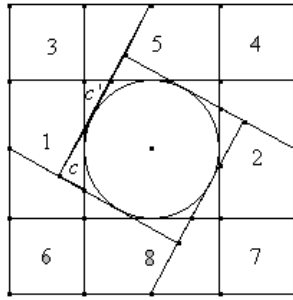


Figura 9.c

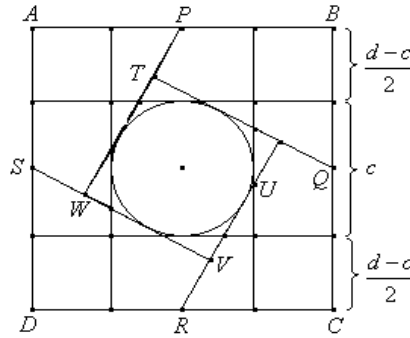


Figura 9.d

Se inscribe en el cuadrado central una circunferencia de radio $\frac{c}{2}$ y desde los puntos medios P, Q, R y S de los lados del cuadrado $ABCD$ se trazan tangentes a la circunferencia como lo indican las figuras 9.c y 9.d. Los triángulos marcados como c y c' tiene la misma área y en la disección compensan. Además se debe satisfacer que $r \leq \frac{\sqrt{2}}{4}d$ o sea $\frac{c}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{a+b}{2}\right)$, o lo que es igual $\frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{a+b}{2}\right)$, esto es $a - b \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{a+b}{2}\right)$ o mejor, $2a - 2b \leq \sqrt{2} a + \sqrt{2} b$, entonces $b \geq (\sqrt{2} - 1)^2 a$ y $b < a$, inecuaciones que constituyen las condiciones para realizar la cuadratura real del rectángulo ab . ☑

Utilizando herramientas de geometría analítica, se demuestra que los triángulos rectángulos c y c' de la Figura 9. c y todos los demás que aparecen bordeando a la circunferencia en el segundo cuadrado son iguales; en consecuencia, los triángulos que se quitan al marco como el c , son compensados con los triángulos rectángulos esquineros del cuadrado central como el c' ; y como los cuadriláteros $APWS$ y sus similares, que aparecen en el cuadrado de la Figura 9.d, forman un cuadrado; entonces, el marco, o sea, el rectángulo ab queda transformado en un cuadrado. La disección y la yuxtaposición de sus partes se muestran en las Figuras 10.a y 10.b.

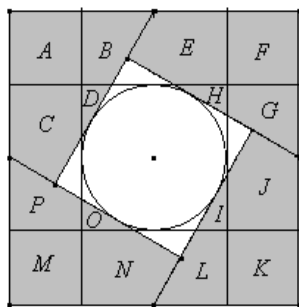


Figura 10.a

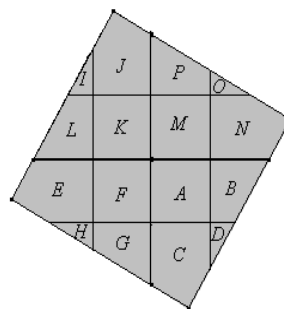


Figura 10.b

Si el rectángulo no es elemental, hecho que ocurre cuando $a > b$, pero $b \geq (\sqrt{2} - 1)^2 a$, se divide el lado a en n partes iguales que determinan n rectángulos elementales. n se escoge de manera que sea el mínimo entero positivo para el que se cumple la relación $b \geq \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 a}{n}$; tal n es $n = \lceil \frac{a}{b} \rceil$ donde $\lceil \cdot \rceil$ indica que se toma la parte entera del cociente.



Figura 11.

Como se ha visto, cada rectángulo admite cuadratura real y en consecuencia se tienen n cuadrados de igual área que se fragmentan para formar un solo cuadrado, para lo cual se puede utilizar el teorema de Pitágoras o la suma de cuadrados que se explica en el teorema 1.4.

Teorema 1.4. *Si se tiene dos cuadrados, el de mayor lado se puede descomponer en cuadriláteros de manera que al disponerlos adecuadamente junto al otro, forman un solo cuadrado.*

Demostración. Sean los cuadrados de lados a y b donde $a \geq b$. Sobre los lados del cuadrado mayor $ABCD$ se toman los puntos P, Q, R y S de manera que $AP = BQ = CR = DS = x = \frac{a-b}{2}$ y por ende $PB = QC = RD = SA = y$. Se trazan los segmentos \overline{PR} y \overline{QS} y el cuadrado queda dividido en cuatro cuadriláteros congruentes cuyos ángulos en O , como se indica en la Figura 12, son rectos. La justificación de este hecho está referida a que los lados del cuadrilátero $PQRS$ son iguales por ser hipotenusas de triángulos rectángulos de catetos x y y . En consecuencia $\angle SRQ = \varphi$ es tal que $\angle DRS + \varphi + \angle ORC = \pi$ y llamando $\angle DRS = \rho$ y $\angle ORC = \sigma$ se tiene que $\rho + \sigma = \frac{\pi}{2}$ y por ello $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y en tal razón \overline{PR} y \overline{QS} son las diagonales de un cuadrado y por ello se cortan en ángulo recto. \square

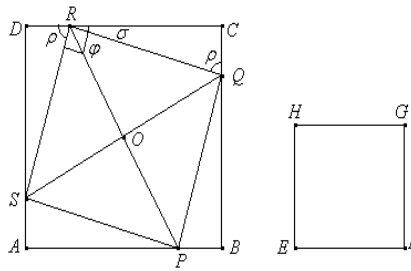


Figura 12.

La disposición se puede llevar a cabo utilizando traslaciones y reflexiones como se indica en la Figura 13.

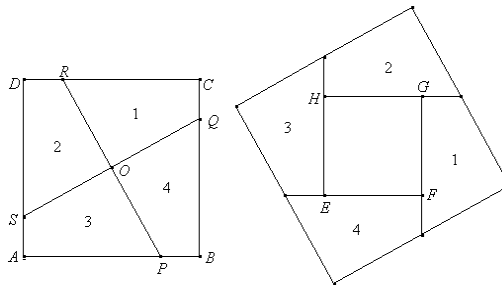


Figura 13.

Teorema 1.5. *Si se tienen n cuadrados, entonces, mediante divisiones adecuadas, se pueden disponer en un solo cuadrado.*

Demostración. Sean c_1, c_2, \dots, c_n los cuadrados. Por el Teorema 1.4 se suman los cuadrados c_1 y c_2 para obtener el cuadrado k_1 ; enseguida se suman, también por el Teorema 1.4, los cuadrados k_1 y c_3 para obtener el cuadrado k_2 y finalmente se aplica el mismo Teorema 1.4 al cuadrado k_{n-2} y al cuadrado c_n para obtener el cuadrado k . \square

1.4. Cuadratura del Triángulo Equilátero.

Las disecciones geométricas se vienen consolidando como una clase de divertimentos y rompecabezas matemáticos que consisten en seccionar figuras geométricas en un número finito de piezas y ensamblarlas para conformar otra. Un ejemplo particular es el presentado por Ernest Dudeney quien demostró ante la Royal Society de Londres en 1905, que con las cuatro figuras básicas que se muestran en la Figura 14, a saber tres cuadriláteros y un triángulo se pueden construir un triángulo equilátero y un cuadrado.

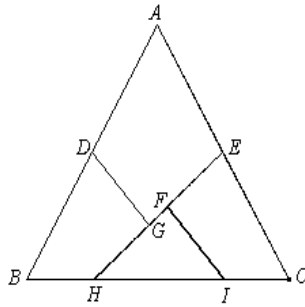


Figura 14.

Este resultado se fundamenta en el cálculo de la longitud del cuadrado final de igual área que el triángulo ABC y que se alcanza calculando la media proporcional. La disección del triángulo equilátero en los cuadriláteros $BHGD$, $DGEA$ y $FICE$ y en el triángulo HIF se realiza procediendo así:

1. Se calculan los puntos D y E que son los puntos medios de los lados AB y AC respectivamente del triángulo equilátero ABC .
2. El punto H se coloca sobre el lado BC de tal modo que la longitud del segmento EH sea igual al lado del cuadrado que tiene igual área que el triángulo ABC .
3. El punto I sobre el lado BC es tal que HI y EC tienen la misma longitud. La herramienta compás es la más versátil para la ubicación de este punto. De este modo HI es una mitad de cualquiera de los lados del triángulo ABC .
4. Las líneas DG e IF , son ambas perpendiculares a la línea EH .

De aquí en adelante, se debe ensamblar de otra manera las cuatro piezas de forma que configuren un cuadrado. La idea es hacer que lados de igual longitud de las piezas coincidan

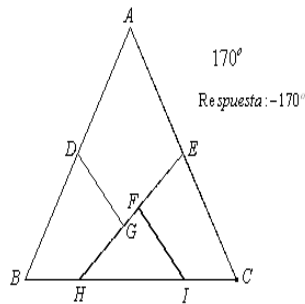


Figura 15.

y para ello, inicialmente, se digita con Edición Numérica un valor cercano a los 180° que a la vez se multiplica por -1 a fin de disponer de una rotación con orientación negativa y otra con orientación positiva. Esta acción se muestra en la Figura 15.

En la Figura 16 se indica la rotación efectuada al cuadrilátero $FICE$ con centro en el punto E y en un ángulo de 170° y al mismo tiempo la rotación del cuadrilátero $BHGD$

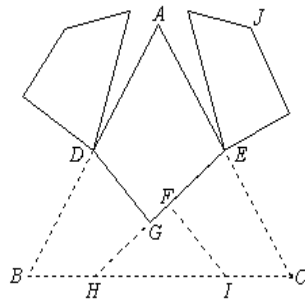


Figura 16.

con centro en el punto D y con un ángulo de -170° . Como este último ángulo depende del anterior es preferible ocultarlo y modificar el primer valor hasta que alcance el valor de 180° , momento en el cual se establece coincidencia con dos lados del cuadrilátero $DGEA$, tal y como se muestra en la Figura 17.

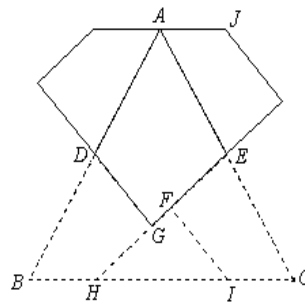


Figura 17.

Por último, y para configurar el cuadrado, se traslada el triángulo HIF según el vector IJ con lo que queda ensamblado un cuadrado, como se observa en la Figura 18.

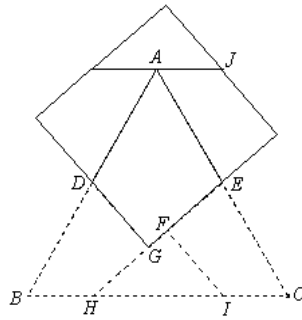


Figura 18.

Resulta atractivo ver paso a paso y por animación del valor de la amplitud de la rotación a partir de un determinado valor, la forma en que se va reacondicionando el cuadrado a partir del triángulo equilátero. La secuencia de las Figuras 19. a y 19.b 64 y 65 evidencian algunos momentos y en adición al triángulo HF se le ha suscitado una traslación según el vector \vec{IJ} y una rotación alrededor de J en un ángulo igual al doble de lo que rota el cuadrilátero $ICEF$.

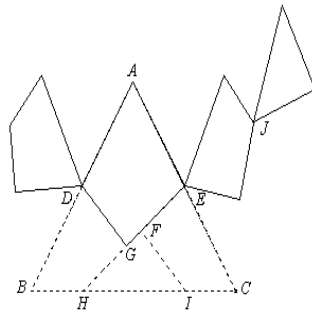


Figura 19.a

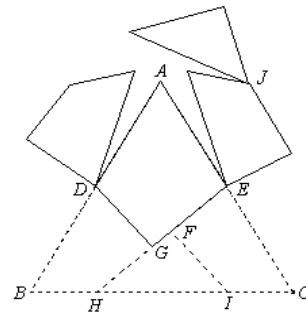


Figura 19.b

Nota 1.1. Los autores de este artículo elaboraron todas las construcciones en el asistente geométrico Cabri Geometre, elaborado en la Universidad Joseph Louis Fourier de Grenoble, Francia, con licencia adquirida por la Universidad de Nariño y ponen a disposición de los interesados los archivos correspondientes que se han construido aprovechando al máximo los modelos euclideo y transformacional del paquete.

Referencias

- [1] GARDNER, MARTIN. *Nuevos Pasatiempos Matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid, 1972. 326 p?ginas.
- [2] LANDAVERDE, F, J. *Curso de Geometría*, Editorial F.T.D. S.A. Bogotá, D.E. Colombia, 1955. 390 p?ginas.
- [3] GOLOVINA, L. I. *Inducción en la Geometría*, Editorial Mir, Mosc?, 1981.
- [4] VERA FRANCISCO. *Elementos de Geometría*, Librer?a Voluntad S.A., 1943. 439 p?ginas.
- [5] BRU?O, G.M.. *Geometría, Curso Superior*, Procuraduría de los Hermanos, Medellín, Editorial Bedout, 1958. 396 p?ginas.
- [6] HERMANOS DE LAS ESCUELAS CRISTIANAS. *Nociones Elementales de Geometría*, París, Procuraduría General, Imprenta de Mame, 12 ava edición. Sin año de publicación. 108 páginas.
- [7] FTD. *Nociones de Geometría Practica y Agrimensura*, Librería Católica, Barcelona, 1909. 268 páginas.
- [8] WENWORTH JORGE Y SMITH DAVID EUGENIO. *Geometría*, Ginn y Compañia. Boston, sin año de publicación. 469 páginas.
- [9] MAHLER. G. *Geometría del Plano*, Traducción de Federico Alicart. Editorial labor S.A. Barcelona. 1949. 165 páginas.
- [10] STEWART IAN. *Locos por las Matemáticas*, Traducción Javier García Sanz. Crítica Barcelona. 2005. 254 páginas.
- [11] EUCLIDES. *Elementos. Libros I-XIII*, Biblioteca clásica Gredos Tres tomos. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. Madrid. 2000.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
e-mail: fsoto@udenar.edu.co