

EXPLORACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS  
MEDIANTE CONFIGURACIONES PUNTUALES  
ESTUDIO CON ESCOLARES DE PRIMER CICLO DE SECUNDARIA

*BERNARDO GÓMEZ ALFONSO*  
*Universidad de Valencia*

**INTRODUCCIÓN**

**Debate:** Discusión, especialmente en una asamblea o reunión (Diccionario de la lengua).

En lo que sigue, mi intención no es hacer el tipo de juicios propios de un miembro de tribunal de tesis, ni los comentarios de un asesor que contribuye a su mejora; más bien de lo que trataré es de propiciar la reflexión a toro pasado sobre las circunstancias, los fundamentos, el diseño, las aportaciones y las proyecciones de esta tesis de doctorado.

**ACERCA DEL TEMA Y TÍTULO**

Mi primera reflexión, lo que se me ocurre para arrancar, tiene que ver con el tema y título elegido: "Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria". Este título no se corresponde con los que se utilizan para organizar o clasificar los temas de investigación de nuestros congresos, ni tampoco es el título de ninguno de los bloques temáticos del curcucho, o de los temas clásicos de aritmética. ¿Por qué, pues? La respuesta me viene sugerida por las circunstancias que rodean a la tesis.

*Las circunstancias*

Sitúo las circunstancias de la tesis en una encrucijada entre un enfoque curricular conservador y otro innovador. En esta encrucijada emerge un punto de vista que considera la matemática como la ciencia que estudia regularidades, que trabaja sobre patrones, su descubrimiento, análisis, observación, y generalización.

*Los fundamentos*

Las propuestas didácticas dentro de un enfoque curricular innovador necesitan sustento y fundamentación desde la investigación sistemática validada académicamente. Desde esta perspectiva, se puede fundamentar este trabajo de investigación desde aspectos filosóficos, curriculares y psicológicos.

**Filosóficos**

En cierto modo se podría enmarcar la tesis en el empirismo filosófico, corriente caracterizada por considerar que la percepción y la observación sensorial es la fuente del conocimiento, y por tanto, del conocimiento matemático. Desde este planteamiento, se entiende que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se debe privilegiar las formas gráficas o simbólicas que hacen intervenir el sentido de la vista. O, dicho de otra manera, se debe enfatizar la función esencial que desempeña la información visual en la formación del conocimiento matemático.

*Problemática desde esta perspectiva*

Desde esta perspectiva se considera que la representación es un recurso visual y, por tanto, que en la formación del conocimiento matemático resulta conveniente trabajar utilizando los distintos sistemas de representación y modelos que son propios de dicho conocimiento. En el caso de los números, su conceptualización actual no tiene esto en cuenta, cuando se identifican los números naturales con los numerales que se obtienen utilizando las reglas del sistema decimal de numeración se ignora que se trata sólo de una forma más de representar los números, lo que se traduce en una pérdida de información y un inconveniente, ya que cada una de las formas de representación de los números pone énfasis en algunas de sus propiedades y dificulta la expresión de otras. (Castro y Castro, 1997, p. 114).

*Finalidad*

Intentando paliar esta deficiencia, en esta tesis, se estudian las potencialidades de integrar los sistemas de representación de los números naturales denominados: configuración puntual, desarrollo aritmético de estos números y sistema de numeración decimal.

configuración puntual	• ••	•• •••	••• ••••
numeración decimal	3	5	7
desarrollo aritmético	1+2	2+3	3+4

El segundo sistema de representación se refiere a la secuencia numérica en su forma usual, el tercero a los números vistos como resultado de las operaciones aritméticas, y el primero es un sistema gráfico que incluye los denominados tradicionalmente números figurados.

La razón por la que aquí no se le llama números figurados sino configuraciones puntuales está relacionada con que la finalidad de la tesis es más general. En palabras de la autora, "estudiamos la comprensión que manifiestan los escolares en establecer relaciones entre números, reconocer y utilizar patrones y proporcionar una generalización a la estructura común que tienen los términos de una secuencia" (Castro, 1995, p. 10).

### **Curriculares**

También se podría enmarcar la tesis en un pragmatismo investigador curricular, entendido como aquél que considera que "los investigadores preocupados por los temas curriculares deben proporcionar a los profesores alternativas a las que recurrir (Castro, 1995, p. 19).

### *Delimitación del problema*

Desde esta perspectiva la autora considera algunas prioridades e incoherencias en los cambios curriculares en curso desde su propia experiencia docente, lo que es un valor añadido a la hora de delimitar el problema. Una de estas incoherencias es la carencia de un sistema adecuado de representación para el estudio de las sucesiones (p.10). Carencia que se justifica a partir del paralelismo que debería haber entre el tratamiento curricular de las funciones y el de las sucesiones, unas situadas en las matemáticas continuas y otras en las discretas, pero cuyo dominio se sustenta en el mismo tipo de componentes:

- expresiones verbales de dependencias funcionales
- tablas numéricas
- notación simbólica
- representaciones gráficas

En el caso de las sucesiones llama la atención que la representación gráfica no está considerada como un componente estable en su estudio.

### *Finalidad*

Por una cuestión de analogía parece razonable abrir una propuesta de investigación que intente conocer las potencialidades de incluir algún tipo de representación gráfica en el estudio de sucesiones. Esto permite delimitar el problema señalado antes: el de la integración de los sistema de representación, al caso particular de las secuencias lineales y cuadráticas de números naturales.

En la propuesta de trabajo se hace especial hincapié en la estructura de relaciones que se pone de manifiesto al representar los números de estas secuencias mediante un patrón geométrico o un desarrollo aritmético y verificar la utilidad de este análisis en relación con el concepto más complejo de término general de una sucesión (p. 165).

### **Psicológicos**

Se podría situar esta tesis en otra encrucijada, entre lo que son tesis de primera o tesis de segunda generación, es decir entre tesis de un área de conocimientos que empieza y tesis propias de un área que se consolida. En esta encrucijada emergen los problemas que acompañan a los pioneros. A saber, la falta de una "jerga" propia y la falta de investigación precedente sobre el tema.

### *Jerga*

Con relación a la "jerga" o argot utilizada a lo largo de la tesis para denominar epígrafes, expresar nociones, ideas, procesos, etc., se hace evidente la falta de términos acuñados y aceptados por nuestra comunidad, por lo que se aprecia un esfuerzo añadido a la hora de recurrir a términos procedentes de otras áreas y a explicarlos. Se agradece el esfuerzo, a pesar de que a veces se tiene que recurrir a perífrasis donde aparecen términos cuyo significado parece más complejo que el del que se quiere establecer.

Valga como ejemplo la acepción que adopta de la noción de modelo: "Un *modelo* es un *esquema* o *representación* de un *sistema* que, por sus cualidades, está adaptado a la naturaleza del pensamiento humano" (Castro, 1995, p. 24). A mi modo de ver la noción de modelo es más intuitiva y más clara que la de esquema o sistema.

Me pregunto hasta que punto este fenómeno, consecuencia de una falta de "jerga" propia que unifique nuestros discursos, va desapareciendo en la actualidad en las tesis de segunda generación y hasta que punto las tesis de la primera están contribuyendo a ello. Esperemos que con el tiempo nuestras tesis no tengan que dedicar capítulos enteros para explicar los términos que utilizamos, y el sentido que les damos, desviando la atención del objetivo primordial de la investigación.

Esto vale también en relación al uso de anglicismos, como por ejemplo tópico en vez de tema o cuestión. Así como en relación con la denominación de las partes que organizan el documento: Racionalidad de la investigación en vez de Justificación o importancia de la misma, encuadre en vez de fundamentos o marco teórico, etc.

#### *La investigación precedente*

De nuevo encontramos el problema anterior, la falta de antecedentes en investigación sistemática acerca del tema dirigida hacia los objetivos de nuestra área de conocimiento, lo que es precisamente una de las justificaciones lógicas para abordarla, obliga a recurrir a fuentes externas aunque vinculadas, en este caso a la Psicología cognitiva, para encontrar un marco teórico que le de sustento. De aquí, la necesidad de dedicar un apartado a clarificar y relacionar nociones multidefinibles o de difícil definición, tales como pensamiento matemático, habilidad matemática, habilidad espacial, visualización, imagen, imagen visual, imagen mental, pensamiento visual. Con todo, en este "maremagnum", la autora consigue dar una pincelada que nos acerca a un propósito claro: mostrar que hay evidencias de una relación positiva entre la "visualización" y el aprendizaje de las matemáticas, y que la "visualización" es un medio para llegar a la comprensión de las matemáticas.

La visualización referida a la formación de imágenes mentales y referida a la habilidad para interpretar y entender información figurativa y manipularla mentalmente; representar sobre un soporte material cualquier concepto matemático o problema y usar diagramas para representar conceptos matemáticos y resolver problemas (Castro, 1995, p. 44).

La comprensión referida a establecer conexiones entre ideas, hechos, procedimientos y representaciones (Castro, 1995, p. 73. Citando a Hiebert y Carpenter, 1992, p. 67).

#### *Problemática*

Desde esta perspectiva la autora se propone explorar las posibilidades de comprensión de los conceptos de patrón numérico cuando interviene como vía de acceso el factor visual a través del contexto figurativo.

En particular se hace énfasis en los procedimientos, y en algún caso dificultades, de continuar una secuencia, extrapolar términos, generalizar, expresar el término general y utilizarlo en la obtención de términos concretos.

## ACERCA DE LA METODOLOGÍA

Continuando con las encrucijadas, la tesis se puede situar entre lo que es un docente preocupado por la investigación sistemática y lo que es un investigador preocupado por la docencia. En esta encrucijada el estudio se lleva a cabo a partir de una secuencia típica de enseñanza: preparación de un material, enseñanza propiamente dicha y evaluación. Pero la recogida de datos y su análisis ya no es típica, puesto que incorpora elementos que no están al alcance de un docente estándar. A saber, la observación participante del investigador ajena al trabajo del maestro titular de la clase, la videograbación para la interpretación posterior de lo acontecido en el aula, el modelo de interpretación por categorías, las pruebas test para la medición objetivable, el análisis estadístico y el control experimental de los cambios producidos en los escolares de la muestra.

### *La observación participante del investigador*

En relación con la observación participante del investigador éste, que es consciente del problema que plantea su compromiso personal con los objetivos de la investigación, en un momento dado del proceso no duda en abandonar el papel de observador para tomar la iniciativa en el aula, cambiando su papel por el del profesor titular de la clase ante la problemática que plantea el desarrollo de un tema novedoso e ignorado por el currículo. Me pregunto si esta implicación también se hubiera dado si el investigador fuera de la segunda categoría señalada en la encrucijada anterior. Me atrevo a pensar que no, creo que este es un estilo propio de los docentes metidos a investigadores.

### *El modelo de interpretación de los datos*

En relación con la interpretación subjetiva de los datos ésta se deriva y se sustenta en la construcción de un modelo local de interpretación que se basa en un esquema clasificatorio por categorías. Tengo la impresión de que aquí encontramos un elemento que está presente de modo recurrente en parte de nuestras tesis en Didáctica de las Matemáticas, éste elemento es parte de los resultados y una aportación sustancial a los objetivos del área.

En el caso que no ocupa el modelo de interpretación se sustenta en tres grupos de categorías: 1. Categorías de interacción didáctica, 2. Categorías de contenido matemático, 3. Categorías de comprensión del contenido. Estas categorías organizan la información de un modo inconexo, esto me llama la atención especialmente en el caso

de las de contenido matemático y las de comprensión del contenido, donde una reestructuración de las mismas a partir de un desarrollo en árbol podría poner de relieve paralelismos e interrelaciones.

Hago especial énfasis en la necesidad de que los modelos de interpretación sean validados, o bien en ulteriores investigaciones, o bien durante el proceso mediante la negociación con un reducido grupo de colegas, de tal modo que se supere la fase de elaboración personal y se consiga ir ahondando en la consecución de un marco teórico propio de nuestra área. Estoy convencido de la importancia de los modelos de interpretación basados en esquemas clasificatorios para describir la información: contenido, comportamientos de los estudiantes, etc., y también, de las posibilidades que nos brinda nuestra preparación como matemáticos para hacerlos de la mejor manera para nuestros intereses y objetivos.

### **PLANIFICACIÓN Y ACTUACIÓN**

La selección, organización, secuenciación, temporalización y tratamiento en el aula del contenido se planifica en torno a dos elementos las llamadas unas veces “categorías de contenido matemático” y otras veces “unidades de actuación” (de nuevo problemas con la jerga), y las llamadas tareas o actividades a realizar por el estudiante.

Estas últimas tienen que ver con el análisis de los patrones definidos mediante configuraciones puntuales y desarrollos operativos, la traducción de uno a otro de los sistemas de representación de los términos de una secuencia lineal o cuadrática, la continuación de la secuencia, la extrapolación de términos, la generalización y expresión del término general, y la obtención de términos particulares a partir del término general.

*El paso al término general de un suceso.*

Ejemplos especialmente interesantes de “unidades de actuación” son los que se refieren al “cálculo del término general”. En las tareas planificadas se aborda esta cuestión sin preparación especial (p.172). En cuanto es sometida a los estudiantes se constata la dificultad de la tarea ante el desconcierto de los estudiantes (p. 191).

La estrategia planificada se sustenta en una tabla que organiza los términos de la secuencia y los modos de representación. La primera tarea que aborda este tipo de unidad de actuación es la 10, consiste en presentar la sucesión de los cuatro primeros números cuadrados en una tabla en la que se relacionan el orden del término, su

presentación puntual y el desarrollo aritmético. Se pide a los estudiantes que añadan el siguiente término, el noveno y el enésimo.

Representación	1°	2°	3°	4°
	•	•• ••	••• ••• •••	•••• •••• •••• ••••
Número	$1^2$	$2^2$	$3^2$	$4^2$
Expresión				

En otras tareas, de la 10 a la 20, proponen la obtención del término general en términos similares.

Destaco este hecho porque me parece un rasgo característico de un parte de la investigación en DM. Elegido el tema, fundamentada su importancia, delimitado el problema, y planificada la secuencia de actuación, es la investigación en marcha la que hace saltar chispas que arrojan luz sobre una dificultad más o menos inesperada.

¿Por qué el desconcierto de los estudiantes?

En el análisis de la tarea 12

A partir de la secuencia siguiente

1.°	2.°	3.°	4.°
•	• ••	•• •••	••• ••••

Dibuja el término 5.º

Dibuja el término que ocupa el lugar n.

Debajo de cada figura indica el número que representa.

Escribe debajo de cada número su desarrollo de forma que esté de acuerdo con la representación. Escribe como se llaman estos números.

Se dice en relación con el siguiente-tipo de respuestas

1.°	2.°	3.°	4.°		n.º
•	• ••	•• •••	••• ••••		
1	3	5	7		n
1	1+2	2+3	3+4		n+(n+1)

"hay 23 alumnos que escriben n, aún cuando ya se había discutido la inadecuación de este símbolo para expresar el término enésimo. Se detecta un error básico: término



enésimo en una secuencia de números se interpreta o identifica con posición que ocupa dicho término. Pero cuando se propone realizar los desarrollos aritméticos de los términos todos los alumnos hacen desarrollos adecuados. La expresión general del desarrollo aritmético no se identifica con  $n$  en ningún caso.

Se detecta igualmente, que la expresión general del término de una secuencia tiene un significado distinto cuando se pide partir de los números que cuando se pide a partir de los desarrollos" (p. 268 y 269).

En efecto, la noción de término general está en el meollo de la problemática en el estudio inicial de las sucesiones, es una cuestión clave. ¿Qué es el término general?

El trabajo con los estudiantes muestra que éste se constituye a partir de diferentes acercamientos, todos ellos presentes en las tareas planificadas:

- aritméticos: expresión numérica de la propiedad aritmética que comparten todos los términos.
- algebraicos: expresión algebraica en función de una variable, que al darle valores permite obtener todos los términos.
- ordinales: expresión del término que ocupa el lugar cualquiera  $n$ .
- geométricos: expresión con puntos suspensivos de la forma o figura compartida.

El término general es cada una de esas nociones y todas a la vez: propiedad común, término genérico o generador, término enésimo, y figura compartida.

A partir de la tarea 20 se trabajan como actividades las nociones de término general "propiedad común y expresión generadora: "Tenemos una expresión de término general  $S_n = n+(n+1)+(n+2)$ . Indica una propiedad común de los términos de esta sucesión. Representa los tres primeros términos de esta sucesión de forma puntual" (p. 176)

Por lo tanto, como cada acercamiento pone el énfasis en una manera de entender el término general es lógico que surjan dificultades de traducción. Así, si al estudiante se le solicita el término enésimo desde el acercamiento numérico 1, 3, 5, 7, difícilmente puede contestar, porque la respuesta que se le va a considerar como correcta es la del acercamiento aritmético  $n+(n+1)$ , o algebraico  $2n-1$ . Es más, puesto que se les ha señalado que el término general en el acercamiento geométrico se obtiene poniendo puntos suspensivos, el estudiante podría estar pensando por analogía que la respuesta es 1,3,5,7,..., ¿? y a falta de otra cosa mejor para cubrir ese ¿? pone

n. Para confirmar o rechazar esta hipótesis, disponemos de un recurso: la entrevista, clínica o con enseñanza. Lo reivindicó desde aquí como una componente importantísima de nuestro trabajo.

#### *Los escolares de la muestra*

Los sujetos de la muestra han sido alumnos del sistema escolar vigente que cursaban tercer ciclo de EGB. Fueron considerados durante un período de 2 años, 91-92 y 92-93, mientras cursaban 7º y 8º. En el documento no se explican las razones por las que ubica el trabajo en estos cursos. ¿Me pregunto por qué 7º y 8º, siendo que tradicionalmente las sucesiones se estudian en 1º y 2º de BUP? Cabe pensar que se buscan alumnos no contaminados en relación con el material de enseñanza, pero esto se hubiera podido lograr centrandó el trabajo en el inicio de curso. Por otra parte estos estudiantes ya han sido introducidos en el álgebra por lo que cabe esperar una problemática diferente en relación con las dificultades que plantea el término enésimo?

#### *Las pruebas test*

Tampoco se explica suficientemente en el documento cómo ha sido el proceso de "pilotaje" de las pruebas test para medir la competencia aritmética. Entiendo que además de la validación externa que se ha hecho, estas pruebas han sido sometidas a alumnos elegidos aleatoriamente para ver su viabilidad y validez de contenido antes de hacerlas definitivas.

#### **Aportaciones**

Para terminar con estas reflexiones sobre la tesis quiero resaltar lo que son para mí sus tres aportaciones más importantes:

- Un material curricular para la iniciación a las (su enseñanza-aprendizaje) sucesiones de números naturales a partir del estudio de números que comparte patrón.
- La explicitación de las dificultades de los distintos acercamientos de la noción de término general, y estos acercamientos.
- Un estilo de descripción minuciosa y sincera de los fundamentos que encuadran la investigación y de la experiencia llevada a cabo.
- Un esquema local clasificatorio por categorías para articular la información.

Esta tres aportaciones entiendo que puede servir perfectamente como modelo orientativo a seguir por otros investigadores que se preguntan como se abordan estos capítulos en las memorias de investigación.

## Anexo

En el documento encontramos explícitamente estas nociones:

la estructura o patrón de desarrollo numérico común que tienen los diferentes términos de dicha sucesión, en función de la posición que ocupa cada término de la secuencia (p. 186-187).

Veis que vamos siguiendo un orden creciente, cada término ocupa un lugar que está dado por un número de orden y que el cuadrado que hacemos está relacionado con ese número de orden. Pues bien, pretendemos dibujar un término que ocupe un lugar que vamos a designar por  $n$ , esta letra  $n$  va a representar a uno cualquiera de los otros términos uno general, uno cualquier por lo que ha de ser semejante a ellos.

...

Repasad lo que hemos hecho para los primeros términos, como son los dibujos en cada uno de ellos y de acuerdo con eso dibujad el término que ocupa el lugar y que se llama enésimo.

...

Luego podéis pensar que el término enésimo tiene una forma y un tamaño concreto

...

Esto se representa haciendo una interrupción en la representación y poniendo unos puntos suspensivos, pero dado que la representación que estamos utilizando es de puntos puede llevarnos a confusión por lo que podemos utilizar unas rayitas en lugar de puntos (p. 192).

Se comienza repasando la noción de expresión del término general de una sucesión; sigue presentándose la confusión entre la posición del término  $n$ -ésimo;  $n$ , y su expresión algebraica, que es la generalización del desarrollo aritmético que comparten los términos de la secuencia (p. 195).

La aplicación del término general para obtener términos particulares, o para expresar la propiedad común de los términos de una secuencia (p. 182)

Las expresiones algebraicas que se pueden considerar términos generales de una sucesión ... (p. 260)

Son muy pocos los alumnos que identifican dicho término general con la estructura operatoria común que comparten los términos de una secuencia (P. 312).

**BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA**

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Luis Rico y otros (Eds.). *La educación matemática en la enseñanza Secundaria*. Barcelona, ICE/Horsori.

Castro, Enc. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Mathema. Granada: Comares.

Castro, E.; Rico, L. y Castro E (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: «Una empresa docente». G. E. Iberoamericana. Imp. México.