

**"ELEMENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS", CINCO AÑOS DESPUÉS**  
*Ponencia basada en el libro de Luis Puig (1996) sobre su tesis doctoral (1993)*

**M<sup>a</sup> Luz Callejo y José Carrillo**

En esta intervención vamos a detenernos en algunos aspectos del libro de Luis Puig, "Elementos de resolución de problemas", haciendo una valoración, y al mismo tiempo vamos a tomarlo como pretexto para señalar algunas líneas de prospectiva de investigación en resolución de problemas.

Por consiguiente, dividiremos la exposición en tres partes: comenzaremos dando una visión general que puede servir de introducción, luego comentaremos más en detalle lo que el autor llama "elementos de la teoría", el modelo de enseñanza, la metodología de la investigación y los resultados, indicando por último, como hemos señalado, algunas líneas de prospectiva.

### **1. VISIÓN GENERAL**

Para quienes estén familiarizados con los trabajos de A. H. Schoenfeld sobre la resolución de problemas, este libro les resultará fácil y agradable de leer pues se sitúa en la línea desarrollada por aquél, que es su principal fuente. El autor pone de manifiesto la validez del marco teórico y de los instrumentos de recogida y análisis de datos de Schoenfeld avanzando en cuanto a la delimitación y precisión de conceptos y terminología y a la metodología de la investigación, como señalaremos más adelante. L. Puig incorpora otro instrumento de recogida de datos, las rejillas de Kelly, para realizar un subestudio de los componentes subjetivos del proceso de resolución de problemas.

En un estilo bastante analítico, Puig hace explícita su pretensión de precisar:

- a) el dominio teórico desde el que se aborda el trabajo:
  - a.1) tipo de teoría con que se estudia el campo
  - a.2) tipo de teoría que se pretende elaborar
- b) en qué sentido se va a estudiar el campo:
  - tipo de relación con otras partes de las matemáticas escolares o del sistema educativo
- c) y el ámbito de observación de los procesos a estudiar.

En cuanto al dominio teórico, asume el programa de investigación de Filloy: *modelos teóricos locales*, que integran los siguientes componentes teóricos:

- modelos de competencia formal
- modelos de los procesos cognitivos
- modelos de enseñanza
- modelos de los procesos de comunicación

Sitúa claramente el estudio cuando dice:

"Nuestro trabajo...[intenta elaborar] algunos elementos de un modelo de competencia y [estudia] aspectos de la cognición derivados de una enseñanza organizada en función de esos elementos." (p. 13).

Sus objetivos son dos: elaborar elementos de un modelo teórico de la resolución de problemas en los sistemas escolares y explorar la actuación al resolver problemas de alumnos instruidos en un curso organizado en función de tal modelo, describiendo su actuación respecto a los elementos del modelo.

Pone así de relieve los focos de atención, entre los que no se hallan los procesos de comunicación y donde, como se verá, hay escasos detalles del modelo de enseñanza.

En cuanto al modo en que va a desarrollar el estudio, cita varias posibilidades o mundos de la resolución de problemas, llamando al suyo "pura resolución de problemas" (PRP). En él se estudia la resolución de problemas desde ella misma, independiente del contenido. Así, para elaborar el modelo de competencia, que asocia al estilo heurístico de resolución de problemas, parte de los trabajos de Polya y Schoenfeld y adopta el punto de vista de una semiótica de las matemáticas. Diez estudios de casos (una pareja por caso) han permitido constatar cómo aparecen o se manifiestan los elementos del modelo de competencia en la actuación de los alumnos que han sido instruidos en heurística.

La lista de los elementos que componen el modelo comprende aspectos relacionados con la *cognición* (destrezas con potencial heurístico (DH), sugerencias heurísticas (SH), herramientas heurísticas (HH), métodos de resolución con contenido heurístico (MH) y patrones plausibles (PP)), la *metacognición* (el gestor instruido (GI)) y las *creencias* (una concepción de la naturaleza de la tarea de resolver problemas según la cual ésta se realiza con fines epistémicos), primando el dominio cognitivo sobre el afectivo y el social.

La nota 5 de la página 14 es aclaratoria del resto del trabajo:

"Lo que puede decirse de la resolución de problemas independientemente del contenido concreto es el objeto de estudio de la heurística, en el sentido que esta disciplina toma en la obra de Polya (...) de modo que nuestro trabajo puede considerarse también como un estudio sobre la heurística matemática."

Aun siendo cierto que la heurística en Polya no se ocupa del contenido, existen muchos otros elementos independientes del contenido ausentes en la obra de Polya. En definitiva, la asociación PRP-Heurística puede ser excesiva. Cabría preguntarse por el papel de los afectos y las creencias, así como los factores metacognitivos.

En cuanto al modelo de enseñanza, en el libro se describen los objetivos pretendidos y los logrados en relación con el modelo de competencia, pero no aporta datos del proceso de enseñanza/aprendizaje concreto llevado a cabo en el aula con los alumnos con los que se ha hecho la experimentación.

El diseño de la investigación se despegaba completamente del paradigma clásico del método experimental y responde a los denominados "experimentos de enseñanza"<sup>8</sup> (pp. 15-16), en los que la pertinencia prima sobre el rigor, si se entiende éste según el concepto

---

<sup>8</sup> Diseño no experimental, a lo largo de un período de instrucción prolongado, se intentan asir los procesos en el momento en que se producen, el profesor no es una variable controlada, los análisis subjetivos de datos cualitativos tienen mayor interés a menudo que los análisis cuantitativos.

tradicional de manipulación experimental de variables controladas. L. Puig califica su trabajo como "naturalista, exploratorio, teórico y empírico".

Describe el ámbito de observación como un curso de resolución de problemas perteneciente al currículum de la Escuela del Profesorado de EGB de Valencia hasta el curso 1993-94, impartido en 2º de la especialidad de Ciencias como asignatura anual de 3 horas semanales (p. 15). En el libro no se describe las características de estos estudiantes.

Aunque asegura que los resultados del estudio influyeron en la programación del curso, no especifica dicha influencia.

El trabajo experimental presenta un diseño cuidadoso, hecho con rigor y precisión, y se expone en un lenguaje claro, conciso y preciso.

La investigación comporta estudio de casos y estudio de un grupo que ha sido instruido durante un curso escolar de acuerdo con el modelo de enseñanza que se expone en el trabajo.

El estudio de casos tiene carácter exploratorio y un doble objetivo: reelaborar el modelo de competencia y el modelo de enseñanza. Los datos se han obtenido planteando problemas a parejas de resolutores para que los resuelvan en voz alta, sin que intervenga en ningún momento el investigador. Las sesiones se graban en vídeo, se elabora un protocolo escrito y se analiza. Este estudio ocupa la mayor parte del trabajo, pues se analizan 10 protocolos (pp. 65-236).

El estudio de grupo tiene como objetivo conocer qué aprenden los alumnos tras un período de instrucción en relación con el modelo de competencia. Para ello se les proponen problemas al principio y al final de la instrucción y se les solicita que, además de dar la solución con las anotaciones del "sucio", describan de forma retrospectiva lo que han hecho para obtenerlo y los juicios sobre los elementos que intervienen en el proceso de resolución de cada problema.

En los resultados del trabajo se contemplan los elementos de la teoría, las adaptaciones realizadas de los procedimientos de obtención y análisis de datos utilizados por A. Schoenfeld y la evolución de los alumnos tras el curso de resolución de problemas, constatándose que no ha habido un incremento de la eficacia pero sí un cambio de estilo.

Finalmente, hemos de decir que en el apartado 1.5. "El estilo del trabajo" enfatiza el alejamiento de su estudio (a pesar de la coincidencia entre investigador y profesor del grupo de alumnos) de la llamada investigación-acción (nota 11, pág. 15), en la que, según sus palabras, la confusión de las funciones de investigador y profesor no puede conducir a la mejora de la actuación del profesor.

Tal afirmación nos parece exagerada, contraria a la corriente de investigación colaborativa (Feldman, 1993) derivada de la investigación-acción. No obstante, puede referirse al investigador-profesor aislado, en cuyo caso se incrementan las dificultades de vinculación de las dos funciones. Precisamente, la investigación colaborativa, con una clara delimitación de funciones, pretende paliar algunas de las dificultades de la investigación-acción original. Lo que sí podemos concluir de esta reflexión es que el objetivo de Puig era la obtención de elementos para su estudio, por encima de su mejora como profesor, la cual puede suponerse que corresponderá a otros momentos de su vida profesional.

## 2. DESARROLLO DEL TRABAJO

### 2.1. ELEMENTOS DE LA TEORÍA

Una aportación de este trabajo es, como hemos dicho, los elementos de la teoría; a lo largo del mismo hay una buena delimitación y acotación de los conceptos y términos empleados que son elementos de la teoría. Esta preocupación se hace explícita en el apartado 2.2.1 "Maneras de preguntar por problema", aunque L. Puig también señala que "lo que pretendemos aquí no es zanjar la discusión sobre lo que es verdaderamente un problema – porque en nuestra opinión tal afirmación carecería de sentido– sino plantear cómo la disciplina, el ámbito y el punto de vista son responsables de la diversidad de los significados que están en uso para ‘problema’ y ‘resolución de problemas’ “.

#### PROBLEMA

Nos ha resultado iluminadora la distinción de los niveles I, II y III de análisis de lo que es un "problema". Distingue, en el tono analítico que impera en el trabajo, tres niveles de análisis, según los personajes que intervienen (o según aquellos en los que se centra la atención, aunque intervengan otros):

III: problema, alumno, profesor

II: problema, alumno

I: problema

Tal distinción le sirve para organizar las definiciones de problema y la articulación de unas con otras. Pero, a nuestro parecer, falta un cuarto elemento, el contexto en el que se propone.

La descripción de la resolución de problemas de matemáticas está condicionada por dos decisiones:

- a) el propósito de elaborar una teoría local, no partir de una teoría general de la resolución de problemas,
- b) la pretensión de examinar la resolución de problemas en el ámbito de los sistemas educativos.

En el nivel I asume la clasificación de problemas de Polya:

- problemas de probar y
- problemas de encontrar.

En el nivel III considera que

"un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se le ha planteado, que éste desea abordar, y para la cual no ha producido sentido" (pp. 30-31).

En la definición de problema escolar de matemáticas echamos de menos la referencia explícita al contexto, dentro del ámbito escolar, en el que se propone el problema, pues

sabemos que una actividad es o no un problema para el alumno al que se le ha planteado dependiendo del momento en el que se le proponga dentro, por ejemplo, de la programación escolar. Polya (1981) distinguió cuatro tipos de problemas haciendo alusión al contexto en que se proponen: a) problemas en que la regla que hay que aplicar salta a la vista porque acaba de ser presentada o estudiada en clase; b) problemas en que hay que elegir la regla que se debe aplicar y que se trabajó en clase recientemente; c) problemas en los que hay que elegir una combinación de reglas previamente estudiadas; d) problemas en que hay que investigar.

En el nivel II adopta la distinción de Butts (1980):

- ejercicios de reconocimiento,
- ejercicios algorítmicos,
- problemas de aplicación,
- problemas de búsqueda,
- situaciones problemáticas,

y aclara que en el trabajo sólo se tratarán los problemas de aplicación y los problemas de búsqueda.

Es interesante asimismo la distinción entre resolución, solución y resultado, para la cual nos podría valer el símil del desplazamiento por carretera hasta cierto lugar, tras múltiples recorridos (*resolución*) por caminos que daban vueltas o desviaban y otros que conducían directamente (*solución*) al lugar referido (*resultado*).

Como cuestión puntual, nos gustaría resaltar un comentario efectuado en la página 38: "Los problemas que estamos considerando son problemas de contenido matemático -no los juegos, pasatiempos y rompecabezas que pueblan las actividades de algunas propuestas de desarrollo curricular que dicen que ponen el énfasis en la resolución de problemas". Pensamos que los juegos, pasatiempos y rompecabezas no se pueden meter todos en el mismo saco y que los hay con un contenido matemático profundo. Por ejemplo, los que están recogidos en la clásica obra de Ball y Coxeter "Mathematical Recreations and Essays" (1984).

#### HERRAMIENTA HEURÍSTICA

Dentro de la heurística, liderada por Polya y Schoenfeld, L. Puig contrapone el modelo de competencia de aquél (4 fases) con el modelo de actuación de éste (que describe el proceso como conjunto de episodios –que son segmentos de conducta de la misma categoría).

Los elementos del modelo de competencia asociado al ya mencionado estilo heurístico de resolución de problemas son:

- DH: destrezas con potencial heurístico,
- SH: sugerencias heurísticas,
- HH: herramientas heurísticas,

- MH: métodos de resolución con contenido heurístico,
- PP: patrones plausibles,
- GI: gestor instruido y
- concepción de la resolución de problemas con fines epistémicos.

Una aportación interesante del trabajo es la definición de herramienta heurística y el desbroce de la diferencia entre éstas, las sugerencias heurísticas y las destrezas con potencial heurístico. En la lista de herramientas aparecen las siguientes:

- consideración de un caso (o una serie de casos)
- división del problema en partes
- reformulación
- variación parcial
- examen de posibilidades
- paso al contrarrecíproco
- introducción de una figura auxiliar
- analogía aclarada.

Como sugerencia heurística aparece "buscar un problema relacionado".

Como destrezas aparecen "hacer una tabla" y "buscar una notación adecuada".

Quizá la separación entre herramienta heurística y destreza heurística no queda suficientemente clara porque algunas denominaciones de la lista son muy genéricas, en concreto la HH "introducción de una figura auxiliar" (cf. Callejo, 1994) y la DH "buscar una notación adecuada". Buscar una notación adecuada que no sea algebraica es a veces una forma de reformular el problema o de transformarlo en otro y entonces es una HH e introducir una figura auxiliar no tiene a veces carácter de transformación del problema y es entonces una DH.

Por ejemplo, el problema siguiente se puede resolver utilizando como notación coordenadas cartesianas y se transforma así en otro problema:

“Se tiene una caja fuerte muy pesada de base cuadrada. El único movimiento posible es hacerla girar  $90^\circ$  sobre cualquiera de sus esquinas. ¿Es posible colocarla justo detrás de donde estaba y mirando en la misma dirección?”

Si las esquinas se representan con coordenadas, el nuevo problema es ver si un punto de coordenadas  $(a,b)$  se puede transformar mediante giros de  $90^\circ$  y centros los puntos  $(a\pm 1,b)$ ,  $(a,b\pm 1)$ ,  $(a\pm 1,b\pm 1)$  en otro de coordenadas  $(a, b+1)$ . Se trata pues de una HH y no de una DH.

En cuanto a "introducir una figura auxiliar" nos preguntamos: ¿qué es una figura?, ¿lo es un diagrama en árbol? Si lo es, cuando se utiliza en un problema de probabilidad para hacer una enumeración de casos no transforma el problema y se trataría pues de una DH. Este

caso es bien distinto del uso de una representación geométrica con líneas auxiliares que transforma un problema geométrico en otro y entonces sería una HH.

### ESPACIO DE PROBLEMAS

La noción de espacio de problemas se ha revelado muy útil para analizar cada problema, así como para representar gráficamente las formas en que se puede abordar y desarrollar un plan o comportarse un resolutor<sup>9</sup>.

La incorporación de esta noción en el análisis de los protocolos, al tiempo que añade información al análisis propuesto por Schoenfeld, lo hace más transparente. El diagrama de flujo lineal de Schoenfeld con la sucesión de episodios se convierte así en bidimensional, mostrando las sucesivas transformaciones del problema que realiza el resolutor.

### 2.2. MODELO DE ENSEÑANZA

El modelo de enseñanza se presenta de forma clara pero breve (pp. 57-63). Como ya hemos señalado, se expone al nivel de "enseñanza pretendida", pero no se dice nada de la enseñanza impartida. Tampoco se dice nada del profesor concreto (sus conocimientos, sus creencias, sus destrezas; aunque sabemos que es el investigador y en este trabajo nos revela lo que piensa de la resolución de problemas), ni del modo real de trabajo de los alumnos en clase, ni de las dificultades encontradas al tratar de aplicar este modelo de enseñanza.

El modelo de enseñanza está caracterizado por el esquema etapas-estados para el alumno:

- 1) resolutor
- 2) resolutor/observador de sí mismo
- 3) resolutor/observador
- 4) resolutor/observador/investigador
- 5) observador/investigador/profesor

Trata de reunir así los enfoques de enseñanza de resolución de problemas enunciados por Kilpatrick (1985):

- ósmosis      - memorización      - imitación      - cooperación      - reflexión

Insiste en la necesidad de constatar el proceso de resolución y no sólo la solución (por ejemplo, para aprender por imitación). Pero sólo conocemos las etapas (no su duración ni su contenido concreto), tareas (no las dificultades ni las posibilidades que plantean, el modo de proponerlas, su articulación,...) y los problemas (no su potencial didáctico con los alumnos concretos o su grado de dificultad o los bloqueos que han encontrado los alumnos durante el proceso de instrucción).

---

<sup>9</sup> "El espacio de problemas teórico no siempre da cuenta de la actuación de los alumnos y es preciso examinar ésta para determinar cuál es el espacio de problemas de la resolución de cada protocolo en particular" (p. 71)

El trabajo pasa casi de puntillas sobre este apartado, quizá porque su propósito se centra en "explorar la actuación al resolver problemas de alumnos instruidos en un curso organizado en función de tal modelo, describiendo su actuación respecto a los elementos del modelo" (p.16). Asimismo, el tratamiento de las concepciones (que al inicio de la instrucción vienen de prácticas anteriores) se hace a través de las prácticas del curso de forma indirecta.

Nos preguntamos por los resultados de la instrucción a medio y largo plazo: ¿de qué manera está incidiendo en la práctica docente de estos estudiantes que actualmente son profesores? En concreto, ¿seleccionan actividades que tienen un potencial heurístico?, ¿presentan la matemática como una ciencia en la que el razonamiento plausible tiene un papel tan importante como el razonamiento demostrativo?, ¿ponen el énfasis en los procesos de pensamiento más que en los resultados? No es objeto de este estudio, pero podría serlo de otros.

### **2.3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN**

Ya hemos señalado que esta investigación se despegaba del paradigma clásico del método experimental basado en un enfoque positivista. En este sentido los criterios de calidad hay que aplicarlos de forma distinta.

El estudio de la resolución de problemas en voz alta, a pesar de la problemática suscitada en torno a la validez de los datos, es decantado por el autor hacia la naturaleza de los mismos. Esto pone de relieve una forma de entender el rigor en las investigaciones cualitativas, donde prima la significatividad de la información sobre la precisión del instrumento empleado (Kilpatrick, 1995). La misma idea aparece en el apartado 5.3.2. "La obtención de los protocolos audiovisuales": gran relajación de condiciones.

La investigación verifica los parámetros de calidad pues el método ha permitido investigar lo que realmente se pretendía y en este sentido podemos decir que la investigación es *válida*; es también una investigación *pertinente* en cuanto que aporta elementos para un modelo teórico de la resolución de problemas, que mejora instrumentos para la obtención y análisis de datos y que la aplicación del modelo de enseñanza en un caso concreto ha producido un cambio de estilo de los estudiantes más acorde con un modelo de competencia; expone con detalle las observaciones realizadas y las conclusiones alcanzadas y muestra sensibilidad para captar el significado que los alumnos dan al proceso de resolución de problemas, por ejemplo, los comentarios subjetivos de los protocolos y de los datos iniciales y finales del grupo-clase son muy jugosos y aportan una información muy valiosa sobre creencias de los alumnos en torno a la actividad matemática antes y después de la instrucción (pp. 282-290); la *objetividad* entendida como intersubjetividad en el análisis de datos se ha planteado en dos ocasiones: en la transcripción de los protocolos (p. 74) y en el examen de la lista de frases que dieron los alumnos de las descripciones de sus resoluciones y sus respuestas acerca de en qué consiste la tarea de resolver problemas (p. 242); sin embargo, no se ha aplicado al análisis de los otros datos obtenidos; el trabajo se presenta con referencias claras y en este sentido es *reproducible*; por último guarda una estrecha relación con *las matemáticas y su enseñanza* pues los problemas tienen un contenido matemático significativo

y las HH y los procesos que estudia están íntimamente relacionados con el pensamiento y la actividad matemática.

#### ESTUDIO DE CASOS

Nos ha resultado muy interesante este trabajo exploratorio con estudio de casos tanto por su aportación metodológica, avanzando en el análisis de protocolos propuesto por Schoenfeld, como por su intencionalidad que incide en la elaboración del modelo de competencia y del modelo de enseñanza. Pero no se dice en concreto en qué ha contribuido este estudio a la reelaboración del modelo de competencia y del modelo de enseñanza.

Por otra parte, en el estudio de casos se ha prescindido del análisis de las interacciones entre los dos alumnos que resuelven conjuntamente cada problema<sup>10</sup>.

#### ESTUDIO DEL GRUPO

Debido a que los alumnos no suelen mostrar habilidad describiendo el proceso de resolución, sino que en su lugar frecuentemente hablan sólo de la solución y emiten juicios de lo que es o les supone resolver problemas, el autor ha decidido observar estos juicios sobre los elementos que intervienen en el proceso de resolución de un problema.

Sólo se han considerado los datos iniciales y finales, tras un curso escolar de instrucción, pero no hay datos del proceso.

En el resumen de datos echamos en falta medidas de dispersión que pueden complementar la media del grupo, haciéndonos una idea de cómo se han distribuido los resultados.

Finalmente, hay que añadir que la técnica de rejilla se ha mostrado útil para conocer las teorías implícitas de los alumnos.

### **2.4. RESULTADOS**

Puesto que ya hemos comentado los elementos de la teoría y la adaptación de los instrumentos para la obtención y análisis de datos que se presentan como resultado de este trabajo, sólo nos detendremos brevemente en los resultados de la instrucción.

#### RESULTADOS DE LA INSTRUCCIÓN

En líneas generales podríamos decir que el objetivo de la instrucción en resolución de problemas es que los alumnos resuelven más problemas y los resuelvan mejor. Como en este caso no ha habido un aumento de la eficacia, sino un cambio de estilo<sup>11</sup>, el objetivo se ha

---

<sup>10</sup> La tesis doctoral de Pedro Cobo (1998) es una aportación precisamente en esta línea.

<sup>11</sup> “En nuestro caso está claro que lo que aprendieron los alumnos no se refleja en las pruebas con que lo estamos midiendo en que encuentren la solución de los problemas en mayor medida, sino en que tienen más maneras de buscar la solución de los problemas y las usan efectivamente. No se trata de un aumento de eficacia, sino de un cambio de estilo” (p. 279).

alcanzado a medias, a no ser que al considerar que la prueba final es más difícil que la inicial, podamos decir que el hecho de que el número de problemas completamente resueltos haya pasado de 35 a 38 se tome como un resultado satisfactorio.

Nos preguntamos ¿cuáles habrían sido las condiciones necesarias para que este grupo de alumnos hubiera llegado a ser más eficaz resolviendo problemas?

### **2.5. BALANCE FINAL**

A lo largo de este apartado hemos ido señalando los aspectos positivos de este trabajo y también aquellos otros que no han quedado claramente resueltos. Aquí los retomamos a modo de resumen:

- Destacamos positivamente la delimitación y acotación de conceptos y términos empleados como elementos de la teoría: problema, elementos del modelo de competencia y espacio de problemas. Nos parece especialmente interesante la distinción, dentro de los elementos del modelo de competencia, entre herramientas heurísticas, sugerencias heurísticas y destrezas con potencial heurístico, aunque creemos que no queda suficientemente clara la diferencia entre herramientas y destrezas, quizá porque algunas denominaciones de la lista son muy genéricas, por ejemplo “introducción de una figura auxiliar”.
- El modelo de enseñanza nos parece que está bien precisado al nivel de la enseñanza pretendida, pero hay una escasa consideración del proceso de enseñanza llevado a cabo y, por tanto, no hay una evaluación del mismo.
- En la investigación ha primado la significatividad sobre el rigor, reuniendo los requisitos necesarios para considerarla de calidad. La incorporación de la noción “espacio de problemas” al análisis de los protocolos propuesto por Schoenfeld ha permitido mostrar las sucesivas transformaciones del problema por parte del resolutor, lo que mejora la información sobre el proceso de resolución.
- En cuanto a los resultados destacamos los elementos que configuran el marco teórico y la mejora del estilo de los alumnos. Nos preguntamos por las condiciones necesarias que hipotéticamente habrían conducido también a una mejora de la eficacia de éstos.

### **3. PROSPECTIVA DE LA INVESTIGACIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

Cinco años después de este trabajo se ha avanzado en la resolución de problemas tanto en España como en otros países y quedan cuestiones pendientes. Se ha investigado, por ejemplo, tratando de integrar la cognición y el afecto, explorando sobre la formación y la evolución de las creencias de los alumnos y de los profesores, analizando el papel y los tipos de interacciones en el trabajo en grupo, etc., pero quedan muchas preguntas por responder y mucho camino por hacer.

A continuación vamos a señalar algunas, sin llegar al grado de concreción de las cuestiones de investigación; unas se relacionan con el marco teórico de Schoenfeld y otras tratan de aspectos que este autor no considera explícitamente; al final señalaremos las que abordó L. Puig en su libro.

### **3.1. INVESTIGACIONES RELACIONADAS CON EL MARCO TEÓRICO DE SCHOENFELD**

A. Schoenfeld señaló en 1992 algunas líneas que entonces y ahora necesitan de más investigaciones, relacionadas con su marco teórico, y a las que vamos a referirnos tomándonos cierta libertad:

#### DOMINIO DE CONOCIMIENTOS

- a) Encontrar adecuadas descripciones y representaciones de las estructuras cognitivas.
- b) Elaborar la interacción dinámica entre recursos y otros aspectos de los comportamientos de resolución de problemas: ¿cómo interactúan los recursos con las estrategias, el control y las creencias?

#### ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS<sup>12</sup>

Necesitamos conocer datos acerca de la naturaleza y la cantidad de entrenamiento necesario para aprender distintos tipos de estrategias de resolución de problemas, sobre qué tipo de problemas, qué resultados en la adquisición de estrategias particulares y hasta qué punto se produce una transferencia de la adquisición de estrategias.

Nunokawa (1997) ha analizado el papel de las conjeturas y cómo se originan en el proceso de resolución de problemas, resaltando cómo éstas no se apoyan exclusivamente en los datos o resultados que se van obteniendo, sino en el conocimiento matemático del sujeto, descartando incluso en ocasiones algunos datos obtenidos.

Analizar el papel que determinadas estrategias heurísticas desempeñan en el proceso de resolución de problemas puede aportar inestimables datos para el diseño de estrategias de enseñanza dentro del campo de la resolución de problemas.

#### CONTROL

Quizás debiéramos hablar de metacognición, pues este concepto incluye el conocimiento de los propios procesos de pensamiento y el control y autorregulación de los mismos.

---

<sup>12</sup> A. Schoenfeld no hace la distinción que L. Puig hace en este trabajo y que es más afinada entre HH, SH y DH.

Se ha insistido mucho en que los estudiantes *hagan*, lo que es muy importante, pero no debe olvidarse la necesidad y la conveniencia de que también *reflexionen sobre lo que hacen*; si pretendemos mejorar la capacidad de un individuo para resolver problemas, hemos de propiciar las ocasiones en las que reflexione sobre su manera de proceder. Al mismo tiempo, a la hora de analizar el modo de resolver problemas es necesario incluir indicadores sobre el empleo de la reflexión en el proceso de resolución.

Sternberg (1980, 1982) ha estado trabajando en el desarrollo de una *subteoría componencial de la inteligencia humana*<sup>13</sup>. Ha identificado cinco tipos de componentes: componentes de ejecución o actuación, componentes de adquisición, componentes de retención, componentes de transferencia y metacomponentes. Las metacomponentes son procesos de control de orden superior usados en la toma de decisiones y planificaciones ejecutivas. Ha especificado asimismo seis metacomponentes: decisión sobre qué es el problema, selección de componentes de orden inferior, selección de una o más representaciones para la información, selección de una estrategia para combinar las componentes de orden inferior, decisión en relación con la rapidez y seguridad y supervisión de la solución.

Es claro que para Sternberg la metacognición es, usando una frase acuñada por Edward A. Silver (1982), la fuerza impulsora de la actividad intelectual.

Para Keiichi Shigematsu (1993) la metacognición es el profesor interior, el controlador que gestiona los recursos con criterio.

Sin menospreciar ninguno de los ingredientes que forman parte del menú de la resolución de problemas, la metacognición es, desde nuestro punto de vista, el que mejor pone de relieve el conocimiento didáctico del contenido del maestro y el que tiene más visos de prevalecer incluso después del período escolar (quizás al lado de las creencias y actitudes). Desarrollar estrategias metacognitivas es desarrollar individuos reflexivos, es avanzar en nivel de calidad en la formación intelectual.

Lester (1985), tras formular las siguientes 3 preguntas claves en el campo de la instrucción en Resolución de Problemas:

- 1.- *¿Qué hace el individuo, correcta e incorrectamente, durante la Resolución de Problemas?*
- 2.- *¿Qué debería ser capaz de hacer el individuo?*
- 3.- *¿Cómo puede mejorarse la habilidad individual en Resolución de Problemas?"* (p. 44),

propone la consideración de los aspectos metacognitivos como elementos de mejora del proceso personal de resolución de problemas.

A pesar de ello, falta una adecuada caracterización de la metacognición y del control. Esto es, no disponemos de modelos teóricos de lo que es el control y de cómo funciona. No

---

<sup>13</sup> "Una componente es un proceso elemental de información que opera sobre representaciones internas de objetos o símbolos" (Sternberg, 1980, p. 6)

sabemos, por ejemplo, si el control es un dominio dependiente o independiente, y cuáles podrían ser los mecanismos que ligan las decisiones de control al dominio del conocimiento.

Sabemos que en algunos dominios los alumnos pueden demostrar conductas de autorregulación, por ejemplo en situaciones sociales. Nos preguntamos: ¿Cómo y cuándo los niños desarrollan tales destrezas en el dominio social? ¿Cómo y cuándo desarrollan (o no) destrezas análogas en el dominio matemático? ¿Las semejanzas son sólo aparentes o tienen algo en común de alguna forma?

#### COGNICIÓN Y AFECTO

(a) Unificar perspectivas que permitan una significativa integración de cognición y afecto<sup>14</sup>.

(b) Comprender, si tal unificación no es posible, por qué no.

#### ENCULTURACIÓN

(a) ¿Cómo se adquieren las tendencias y perspectivas comunes entre los miembros de una subcultura particular, en concreto la subcultura de la comunidad matemática?

#### CREENCIAS

(a) ¿Cómo se forman y cómo pueden evolucionar las creencias del profesor?<sup>15</sup>

(b) ¿Cómo se forman y cómo pueden evolucionar las creencias de los alumnos?<sup>16</sup>

Una visión cada vez más compleja e integrada del fenómeno educativo ha conducido a la consideración, entre otros, de factores asociables a multitud de disciplinas e imposibles de subordinar a la norma de una sola. Tal es el caso de las creencias, terreno, por otro lado, propicio para la transgresión de fronteras, debido a la vasta profusión de términos para expresar conceptos similares y al hecho de la cercanía e incluso solapamiento con lo que entendemos por conocimiento.

Es interesante la discusión conducida por Pehkonen (1996) sobre la terminología empleada para nombrar las creencias y sobre la relación de éstas con el conocimiento, en la

---

<sup>14</sup> La tesis doctoral de I. M. Gómez Chacón (1997) es una aportación en esta línea.

<sup>15</sup> Las tesis de J. Carrillo (1996) y L. C. Contreras (1998) son una aportación en esta línea.

<sup>16</sup> El trabajo de investigación de doctorado de A. Vila (1995) y su tesis doctoral en elaboración son aportaciones en esta línea.

que una de las conclusiones de trabajo es que afectos, creencias y conocimiento son tres conjuntos de los que no se sabe cómo son sus inclusiones o intersecciones; un modelo es el de las creencias como conjunto con parte común en los otros dos, siendo éstos disjuntos.

La magnitud de la importancia de la consideración de las concepciones o las creencias de los profesores, tanto por parte de éstos como por parte de los investigadores en Educación, no se centra sólo en su necesidad, en el hecho de ser "*como espejo inconsciente donde el profesor refleja toda información*" (Jiménez et al., 1994). La explicitación de las concepciones puede significar el punto de partida para el eventual cambio de las mismas<sup>17</sup> y es aquí donde hemos de cifrar su magnitud, ya que dicho cambio puede propiciar posicionamientos epistemológicos completamente diferentes (Carrillo, 1996).

## INSTRUCCIÓN

En relación a los procesos de enseñanza/aprendizaje F. Lester señalaba en 1994 que ésta era una de las líneas en las que se necesitaban más investigaciones y en concreto:

- el papel del profesor;
- descripciones del comportamiento del profesor, de las interacciones profesor-estudiante y estudiante-estudiante y el tipo de atmósfera en una clase;
- procesos de enseñanza/aprendizaje no sólo de individuos sino también de pequeños grupos y clases completas.

De hecho, Lester priorizaba el foco de la investigación en los grupos y las clases.

Respecto de los tres elementos destacados, Lester añade que el papel del profesor debería ser el elemento más importante de cualquier agenda de investigación en resolución de problemas<sup>18</sup>. Una investigación interesante a este respecto es la de Clarke (1997), que muestra el progresivo acercamiento de un profesor a una metodología basada en la resolución de problemas.

---

<sup>17</sup> Deberían formularse y tratar de responder preguntas sobre el cambio de concepciones, preguntas que podrían recogerse bajo la gran cuestión ¿Bajo qué condiciones se produce o se provoca el cambio en las concepciones de un profesor?, es decir, deberíamos ir obteniendo información sobre cómo debe ser el conocimiento que se pretende que los profesores adquieran y cómo debe ser la relación entre dicho conocimiento y las creencias del profesor. En este sentido, Posner, Strike, Hewson y Gertzog (1982) dicen que la información presentada debe ser plausible, inteligible y fructífera, a lo que Tillema (1994) añade que

"las creencias y orientaciones de meta son en realidad parte de la deliberación profesional" (p. 602).

<sup>18</sup> La tesis de L.C. Contreras (1998) aporta un instrumento de análisis de las concepciones del profesor sobre el papel de la resolución de problemas en el aula que incluye una categoría denominada "Papel del profesor".

En cuanto a las interacciones estudiante-estudiante, es preciso resaltar la investigación de Qin et al. (1995), que ponen de relieve las ventajas de la cooperación frente a la competición como espíritu entre los estudiantes a la hora de resolver problemas.

Por otro lado, Lester se queja del descenso de interés de los investigadores en la resolución de problemas. En efecto, parece que la oleada constructivista la ha apartado un poco del centro de atención; sin embargo, artículos como el de Anthony (1996) sirven para hacer caer en la cuenta de que no se trata más que de un cambio de perspectiva: el conocimiento metacognitivo actúa de enlace:

*"Un estudio de caso de dos estudiantes detalla el contraste entre comportamientos de aprendizaje pasivo y activo. Ejemplos de sus comportamientos estratégicos de aprendizaje ilustran que tener involucrados a los estudiantes en actividades tales como discusiones, respuesta a cuestiones, y problemas no garantiza automáticamente una construcción de conocimiento exitosa. La naturaleza del conocimiento metacognitivo de los estudiantes y la calidad de sus estrategias de aprendizaje se consideran factores críticos en los resultados de aprendizaje exitosos." (p. 349)*

Un avance en esta línea queda reflejado en Goods y Galbraith (1996), donde se analiza el papel de las estrategias metacognitivas (individuales e interactivas) en el trabajo en grupo en resolución de problemas en Secundaria.

El desarrollo y evaluación de programas y materiales de apoyo a los profesores se ha convertido en una línea de importancia en el campo de la resolución de problemas. Citaremos, de entre las múltiples investigaciones publicadas, una breve, pero útil (para los profesores), la de Strickland (1995), que muestra una forma de obtener situaciones problemáticas.

### **3.2. CONCIENCIA, EMOCIÓN E INTERACCIÓN SOCIAL**

A los elementos descritos por A. Schoenfeld para explicar el comportamiento de resolutores reales resolviendo problemas habría que añadirle otros como la conciencia, las emociones y las interacciones sociales.

#### **CONCIENCIA**

Tenemos experiencia del papel de la incubación en la resolución de problemas y del papel que en este fenómeno juega el subconsciente.

*"A menudo, cuando se trabaja en una cuestión difícil, al empezar el estudio no se obtiene nada en claro; luego se interrumpe la labor durante un tiempo más o menos largo, para volver a sentarse delante de la mesa de trabajo. Durante la primera media hora continúa sin encontrarse nada, y luego, de repente, la idea decisiva aparece. Podría decirse que el trabajo consciente ha sido más fructífero debido a la interrupción y que el reposo ha devuelto al espíritu su fuerza y capacidad de trabajo. Pero es más probable que este reposo se haya empleado para una labor inconsciente y que su resultado se haya revelado luego al géometra... Sólo que esta revelación... se ha producido en un*

*momento de trabajo consciente, pero independientemente de este trabajo, el cual desempeña como máximo el papel de propulsor."*

Henri Poincaré. *Science et Méthode*

Nos preguntamos: *¿Cómo es el procesamiento consciente y subconsciente de información?*

## EMOCIÓN

Sabemos que la experiencia emocional es importante en la resolución de problemas y en los procesos intelectuales en general.

Nos preguntamos:

*¿Cómo se relaciona la emoción con la memoria y con el control del proceso? ¿Cómo canalizar las emociones para que faciliten y no bloqueen el proceso de resolución?*

## INTERACCIÓN SOCIAL

Según el enfoque del aprendizaje situado (Brown, Collins y Duguid, 1989)<sup>19</sup>, el aprendizaje y la cognición son fundamentalmente situacionales:

*"La actividad en la cual el conocimiento se desarrolla y emplea (...) no es separable de o auxiliar al aprendizaje y la cognición." (p. 32).*

Ahora bien, según Lave y Wenger (1991), esto no sólo quiere significar una localización de pensamientos y acciones en el espacio y el tiempo, ni el hecho de que impliquen otras personas o dependan de un significado social. El enfoque del aprendizaje situado, además de la localización en espacio y tiempo de pensamientos y acciones, y de la implicación de otras personas, supone una nueva dimensión: la noción de participación periférica en comunidades de práctica (Lave y Wenger, 1991). La actividad del aprendizaje situado, así concebido, se mueve

*"en dirección centrípeta, motivada por su emplazamiento en un campo de práctica madura. Está motivada por el uso creciente de la participación, y por los deseos de los principiantes de convertirse en verdaderos practicantes. Las comunidades de práctica poseen historias y ciclos de desarrollo, y se reproducen ellas mismas de tal forma que la transformación de los principiantes en miembros definitivos es una característica propia de la práctica." (p. 121).*

---

<sup>19</sup> Según Reiss y Wellstein (1996), el término situado se convirtió en el término técnico para la habilidad en resolución de problemas en una situación específica, siendo Lawler (1980) uno de los primeros en describirlo con detalle. Por su parte, Greeno (1991) puso de relieve que los estudiantes pueden tener diferentes representaciones de un problema matemático dependiendo de la situación específica.

Esta noción conlleva un cambio de perspectiva: el aprendizaje no está simplemente situado en la práctica, sino que se ve como parte integral de toda actividad:

*"Existe un contraste significativo entre una teoría del aprendizaje en la que la práctica (en un estrecho y replicativo sentido) se sumerge en los procesos de aprendizaje y otra en la que el aprendizaje es entendido como un aspecto integral de la práctica (en un histórico y generativo sentido)." (p. 34).*

Nos preguntamos:

*¿Cuáles son los procesos cognitivos del individuo en situaciones interactivas?*

### **3.3. CUESTIONES ABORDADAS EN EL LIBRO "ELEMENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS"**

Hace cinco años L. Puig ya abordaba en su tesis doctoral algunas de las cuestiones antes esbozadas, en concreto:

- La delimitación de "estrategias de resolución de problemas" que son de diferente naturaleza, como ya hemos señalado.

- La relación del control con el uso de herramientas heurísticas.

- La exploración de creencias de los alumnos acerca de la resolución de problemas antes y después de la instrucción, lo cual se relaciona con la enculturación o adquisición de tendencias y perspectivas comunes en el grupo de alumnos acerca del quehacer matemático.

- La aplicación de un modelo de instrucción que ha mejorado el estilo de los alumnos resolviendo problemas y ha cambiado algunas creencias de los estudiantes por otras más adecuadas que han mejorado su comportamiento.

Otros aspectos como el papel de la conciencia o de las emociones en el proceso de resolución de problemas, o el análisis de las interacciones entre alumnos o de éstos con el profesor resolviendo problemas o en el proceso de instrucción no fueron objeto de este trabajo. Eran entonces y son todavía líneas de trabajo incipientes que necesitan avanzar en el marco teórico y en metodologías de investigación apropiadas. Sin embargo, el trabajo de L. Puig ha contribuido indirectamente en el avance de alguna de ella; como muestra podemos decir que ha sido una referencia importante en la reciente tesis de P. Cobo (1998) sobre procesos cognitivos e interacciones sociales.

### **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ANTHONY, G. (1996). Active learning in a constructivist framework. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 349-369.

BALL, W.W.R. y COXETER, H.S.M. (1984). *Mathematical Recreations and Essays*. (30ª edición). Nueva York: Dover.

BROWN, J.S.; COLLINS, A. y DUGUID, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32-42.

BUTTS, T. (1980). Posing Problems Properly. En Krulik, S. y Reys, R.E. (Eds.) *Problem Solving in School Mathematics*. Reston (Virginia): NCTM.

- CALLEJO, M.L. (1994). Les représentations graphiques dans la résolution de problèmes: Une expérience d'entraînement dans un Club mathématique. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 1 - 33.
- CARRILLO, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de Profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones (1997).
- CLARKE, D.M. (1997). The changing role of the mathematics teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 278-308.
- COBO, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales en la resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Inédita.
- CONTRERAS, L.C. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis doctoral en fase de presentación. Universidad de Huelva.
- FELDMAN, A. (1993). Promoting equitable collaboration between university researchers and school teachers. *Qualitative Studies in Education*, 6(4), 341-357.
- GÓMEZ CHACÓN, I.M. (1997). *Procesos de aprendizaje en Matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las Matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Inédita.
- GOODS, M. y GALBRAITH, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 229-260.
- JIMÉNEZ, R. et Al.. (1994). El diseño curricular y la Formación del Profesor como nexos de investigación en Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Sociales y Matemáticas). *Investigación en la escuela*, 24, 71-78.
- KILPATRICK, J. (1995). Staking claims. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 3(4), 21-42.
- LAVE, J. y WENGER, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- LESTER, F.K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. En Silver, E.A. (Ed.) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, New Jersey: LEA.
- LESTER, F.K. (1994). Musings about Problem-Solving Research. *Journal for Research in Mathematics Education*. 25(6), 660-667.
- MARINA, J.A. (1996). *Entrevista realizada por Nuria Barrios, publicada en EL PAÍS el 8 de diciembre*.
- NUNOKAWA, K. (1997). Data Versus Conjectures in Mathematical Problem Solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(1), 1-19.
- PEHKONEN, E. (1996). Some Considerations on the Beliefs-Terminology Used. En Törner, G. (1996) *Current State of Research on Mathematical Beliefs. Proceedings of the Second MAVI Workshop*. University of Duisburg.
- POINCARÉ, H. (1908). *Science et Méthode*. Paris: Flammarion. [Trad. castellana: *Ciencia y método*. Madrid: Espasa Calpe. 1963]
- PÓLYA, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley and Sons.
- POSNER, G.J. ET AL. (1982). Accomodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education*, 66(2), 211-227.

- QIN, Z.; JOHNSON, D.W. y JOHNSON, R.T. (1995). Cooperative versus competitive efforts and problem solving. *Review of Educational Research*, 65(2), 129-143.
- SCHOENFELD, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics. En: D.A. GROWS (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York: Macmillan. 334-370.
- SHIGEMATSU, K. (1993). Metacognition: the role of the "inner teacher". Contrast between Japan and the United States. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 113-122.
- SILBAR, E.A. (1982). *Thinking about problem solving: Toward an understanding of metacognitive aspects of mathematical problem solving*. Documento no publicado. San Diego. San Diego State University, Department of Mathematical Sciences.
- STERNBERG, R.J. (1980). Sketch of a componential subtheory of human intelligence. *Behavioral and Brain Sciences*, 3, 573-584. [V-154, 155]
- STERNBERG, R.J. (1982). A componential approach to intellectual development. En Sternberg, R.J. (Ed.) *Advances in the psychology of human intelligence, vol. I*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- STRICKLAND, J.F.Jr. (1995). A paradigm for developing problem situations in middle grades mathematics. *Reading Improvement*, 32(2), 118-120.
- TILLEMA, H.H. (1994). Training and professional expertise: bridging the gap between new information and pre-existing beliefs of teachers. *Teaching & Teacher Education*, 10(6), 601-615.
- VILA, A. (1995). *Els problemes estandarditzats a la classe de matemàtiques. Una contribució a l'estudi de les seves causes i conseqüències*. Treball de Recerca del Programa de Doctorat. UAB. Inédita