Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada

Vicenç Font Moll
Universitat de Barcelona

Resumen

En este trabajo se presenta un resumen del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática y se comentan diferentes investigaciones, sobre la didáctica de la derivada, en las que se ha utilizado esta teoría. Dichos trabajos han permitido detectar determinados fenómenos didácticos y sugerir su explicación.

INTRODUCCIÓN

En diferentes trabajos Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, en prensa; Godino, Batanero y Roa, en prensa; Godino, Contreras y Font en prensa) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática. Para referirnos a esa manera de enfocar la investigación en didáctica de las matemáticas utilizaremos la expresión "enfoque ontosemiótico" (EOS)[1]. Se trata de un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta línea de trabajo recientemente se ha aplicado a la didáctica del análisis matemático (Font, 2000a, 2000b y 2005; Contreras y Font, 2002; Inglada y Font, 2003; Ordóñez y Contreras, 2003; Contreras, Luque y Ordóñez, 2004, Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

A continuación se presenta un resumen del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática y se comentan diferentes investigaciones, sobre la didáctica de la derivada, en las que se ha utilizado esta teoría

EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

A continuación se exponen, de manera breve, algunos de los constructos del enfoque ontosemiótico

a) Los objetos institucionales y personales

Un objeto matemático institucional se considera en el enfoque ontosemiótico como un ente que emerge progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas

[1] En algunas publicaciones el EOS se designa como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la "función semiótica" es un constructo clave de dicho enfoque.

a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Puesto que las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, se ha de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado, es reconocido como tal objeto por la institución, pero, incluso después de esta etapa, sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado.

Figura 1

Los objetos personales (Godino y Batanero 1994) se consideran como emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas. Estos objetos personales van cobrando forma —van emergiendo— en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

b) Significado y sentido de un objeto

La emergencia progresiva de los objetos matemáticos institucionales se concreta en diferentes definiciones (según el programa de investigación en el que se enmarquen). Este hecho hace que tenga sentido utilizar, de entrada, la diferencia entre sentido y referencia de un término introducida por Frege (1998). La referencia será el objeto matemático nombrado, mientras que el sentido es la manera de presentación.

El ejemplo de la mediatriz puede ilustrar la diferencia entre sentido y referencia. Podemos definir la mediatriz de un segmento como la perpendicular que pasa por el punto medio o como el lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes de los extremos. En cada definición relacionamos el concepto de mediatriz con conceptos diferentes, pero nos estamos refiriendo a la misma referencia. Las dos definiciones tienen sentidos distintos porque la manera de presentación (la conexión con otros conceptos) es diferente. Entender que las dos definiciones son equivalentes informa que dos definiciones, que se podrían considerar definiciones de objetos diferentes, se refieren al mismo objeto.

Cada definición hay que entenderla como una definición-regla que, de entrada, no parece que indique que haya algo que sea preciso hacer. A partir de las definiciones-reglas podemos atribuir valores veritativos (verdadero y falso) a ciertas proposiciones (por ejemplo, ante la afirmación “esta recta es la mediatriz del segmento AB” podemos decir si es verdadera o falsa). Ahora bien, de una definición-regla también se puede deducir una regla práctica que nos da instrucciones para construir la mediatriz. Esta práctica se puede dar en diferentes situaciones, por lo que se puede afirmar que una definición genera un conjunto de prácticas. A su vez, otra definición equivalente generará otro subconjunto de prácticas. Por tanto, en cada definición de mediatriz relacionamos el objeto definido con objetos diferentes y con procedimientos de construcción diferentes (se generan prácticas diferentes).

En el EOS se entiende el objeto matemático institucional como un emergente y su significado de la siguiente manera:

$S(O)$ = {Conjunto de prácticas P_i tal que en cada práctica $P_{i,}$ la institución utiliza el objeto O}

Cuando se adopta una perspectiva pragmatista y se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir en el EOS dos términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos *sentido* y *significado*. En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas, en el EOS se entiende el sentido como un subconjunto del sistema de prácticas que constituyen el significado del objeto.

El significado de un objeto matemático, entendido como sistema de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevas técnicas, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos sistemas de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

El significado de un objeto personal se entiende como el sistema de prácticas matemáticas personales que una persona realiza para resolver el campo de problemas del cual ha emergido el objeto.

Esta manera de entender los objetos y su significado supone que la institución o la persona disponen de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca.

c) Práctica matemática

En el EOS no se considera que el objeto personal sea la causa eficiente (dicho en términos aristotélicos) de la realización de la práctica. Contrariamente a este punto de vista, se considera más conveniente interpretar la relación entre el objeto personal y la práctica en términos de brecha, puesto que para la realización de una práctica primero hay que valorar y decidir lo que uno va a hacer, después se tiene que decidir qué secuencia de acciones es la más indicada para conseguir lo que se ha decidido y, por último, se ha de seguir un curso temporal, desde el inicio hasta el final. Reflexionar sobre cómo se supera esta brecha lleva a reflexionar sobre: a) qué es una *práctica matemática* y b) qué hay que entender por *realización de una práctica matemática*.

En el EOS se considera *práctica matemática* (Godino y Batanero 1994) a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Una vez asumida la centralidad del constructo "práctica" se distingue la práctica de la conducta. En el EOS se considera que no podemos interpretar las conductas observables de los alumnos si no les atribuimos una finalidad. Por tanto, se distingue entre conducta humana, entendida como comportamiento aparente y observable de las personas, y práctica, que, en tanto que acción humana orientada a una finalidad, tiene una razón de ser, tanto para quien la realiza como para quien la interpreta.

Si entendemos la práctica como "acción orientada a un fin", se observa que en la definición de práctica que se ha dado anteriormente se pueden considerar tres intenciones diferentes, las cuales permiten considerar tres tipologías de prácticas que llamaremos: a) *operativas o actuativas* -toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, b) *discursivas* o *comunicativas* - comunicar a otros la solución, validar la solución- y c) *regulativas o normativas* - generalizarla a otros contextos y problemas-. Aunque es más conveniente pensar en una práctica como una acción compuesta en la que puede primar el componente operatorio, el discursivo o bien el regulativo.

Las prácticas en las que prima el componente operatorio o actuativo nos permiten realizar “acciones” y “argumentaciones” cuya finalidad es la resolución de “situaciones problemas”. Las prácticas discursivas (comunicativas) están relacionadas con el dominio y la creación del “lenguaje” así como en su uso para la realización de “argumentaciones” que permitan dar una justificación de la validez de las acciones realizadas. Las prácticas regulativas (normativas) están orientadas básicamente a conseguir establecer “propiedades” (proposiciones) y definiciones de “conceptos”.

La reflexión anterior sobre las prácticas hace necesario ampliar lo que se entiende por objeto matemático y no limitarnos a los conceptos. En el EOS, se entiende por objeto alguno de los siguientes elementos: *lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación problema*. Cada uno de estos elementos (excepto las situaciones problemas) se puede entender como un emergente de las prácticas cuya finalidad es la resolución de situaciones problemas. A su vez, las situaciones problemas se pueden entender como emergentes de otros tipos de prácticas (necesidad de contextualizar y aplicar las matemáticas, necesidad de generalizar, necesidad de resolver problemas, etc.)

En lo dicho anteriormente se ha considerado los objetos que emergen de las prácticas. Ahora bien, a su vez, para la realización de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones. Para realizar una práctica matemática (por ejemplo la representación gráfica de una función) el sujeto necesita una serie de conocimientos sobre la representación gráfica de funciones que son fundamentales para: 1) la realización de la práctica que consiste en representar una función determinada y 2) para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Es decir, que hay que tener en cuenta que el sujeto tiene un *conocimiento* sobre la “representación gráfica”, (por ejemplo, como resultado del proceso de instrucción). También podemos considerar que tiene unas *capacidades y habilidades* de tipo general.

Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el sujeto tenga adquirido para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una determinada situación problema (por ejemplo, representar una función determinada) vemos que, de entrada, el sujeto ha de utilizar un determinado *lenguaje* verbal (dominio, puntos de corte, asíntotas, etc.), simbólico (por ejemplo la fórmula de la función) y gráfico (sistema de ejes de coordenadas, gráfica, etc.). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de *conceptos* (función, gráfica, dominio, etc.) y *propiedades* (por ejemplo, si la derivada es positiva la función es creciente) que son necesarios para justificar las *acciones* que realizará el alumno (por ejemplo calcular la derivada primera o las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, etc.), las cuales también se utilizarán en la *argumentación* (implícita o explícita) que realizará el alumno para decidir que las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias.

Las consideraciones anteriores nos llevan a considerar que cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama *configuración.* Estas configuraciones pueden ser *cognitivas* (conglomerado de objetos personales) o *epistémicas* (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

En el EOS se considera que para superar la brecha entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto personal es determinante hay que considerar la activación, entre otros aspectos, de una configuración cognitiva de la que forma parte el objeto personal.

d) Dualidades cognitivas

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan (Wittgenstein 1983) pueden ser considerados desde las siguientes dimensiones duales: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002)**.** Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos, dando lugar a distintas "versiones" o “miradas” de dichos objetos.

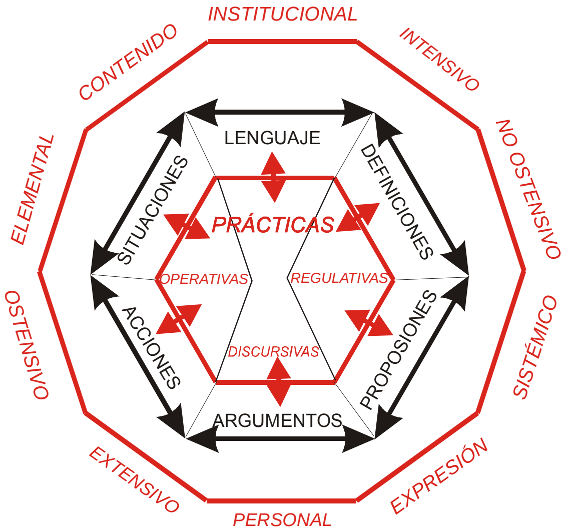

Figura 2

En la figura anterior se representan los diferentes constructos teóricos que se han comentado anteriormente. En el interior tenemos las prácticas. Para la realización de las prácticas es necesario activar una configuración (hexágono) y a su vez, los objetos que forman las configuraciones son emergentes de las prácticas. Por último, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono).

e) Tipos de significado

Para explicar la dialéctica institucional-personal, en el EOS se consideran diferentes tipos de significados institucionales y personales: 1) *significado institucional de referencia* — cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas". Acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo ello constituye un sistema de prácticas que designamos como significado institucional de referencia del objeto.—, 2) *significado institucional pretendido* — sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional—, 3) *significado institucional implementado* — sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes— y 4) *significado institucional evaluado* —colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes—.

Desde el punto de vista del estudiante cabe hacer la distinción entre el *significado personal global* —corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático—; *el declarado* —da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional—; y *el logrado* —corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

EJEMPLO DE CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA COMO CONTEXTO DE REFLEXIÓN

A continuación sigue un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (17 años) como parte de un proceso de instrucción sobre la derivada. Este episodio de clase se va a utilizar como contexto de reflexión (Font 2005).

Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes.

Cuestionario

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f\,'(0)$, $f\,'(1)$ y $f\,'(2)$

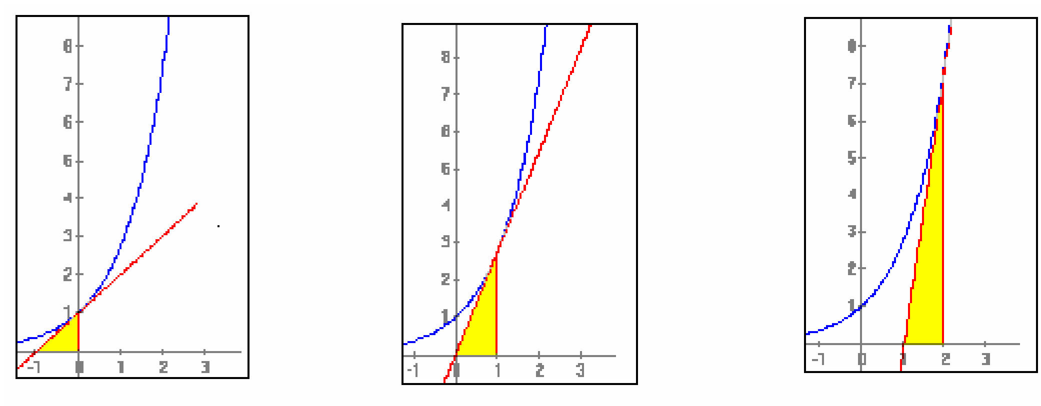

Figura 3

b) Calcula $f\,'(a)$

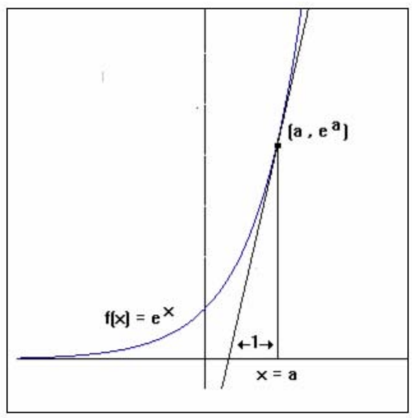

Figura 4

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f\,'(x) = e^x$.

Para realizar la práctica que permite calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$ hay que poner en funcionamiento una configuración (epistémica / cognitiva) cuyos componentes se pueden describir brevemente mediante el esquema de la figura 5.

Si nos fijamos en el cuadro de las acciones de la figura 5, resulta que para calcular la derivada de la función $f\,(x) = e^x$ los alumnos han de aplicar una serie de acciones (una técnica) que consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla primero una condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1). Esta condición después se simboliza, aplicando la interpretación geométrica de la derivada, lo que permite calcular la derivada en $x = a$. Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera. De esta manera se obtiene la expresión simbólica de la función derivada.

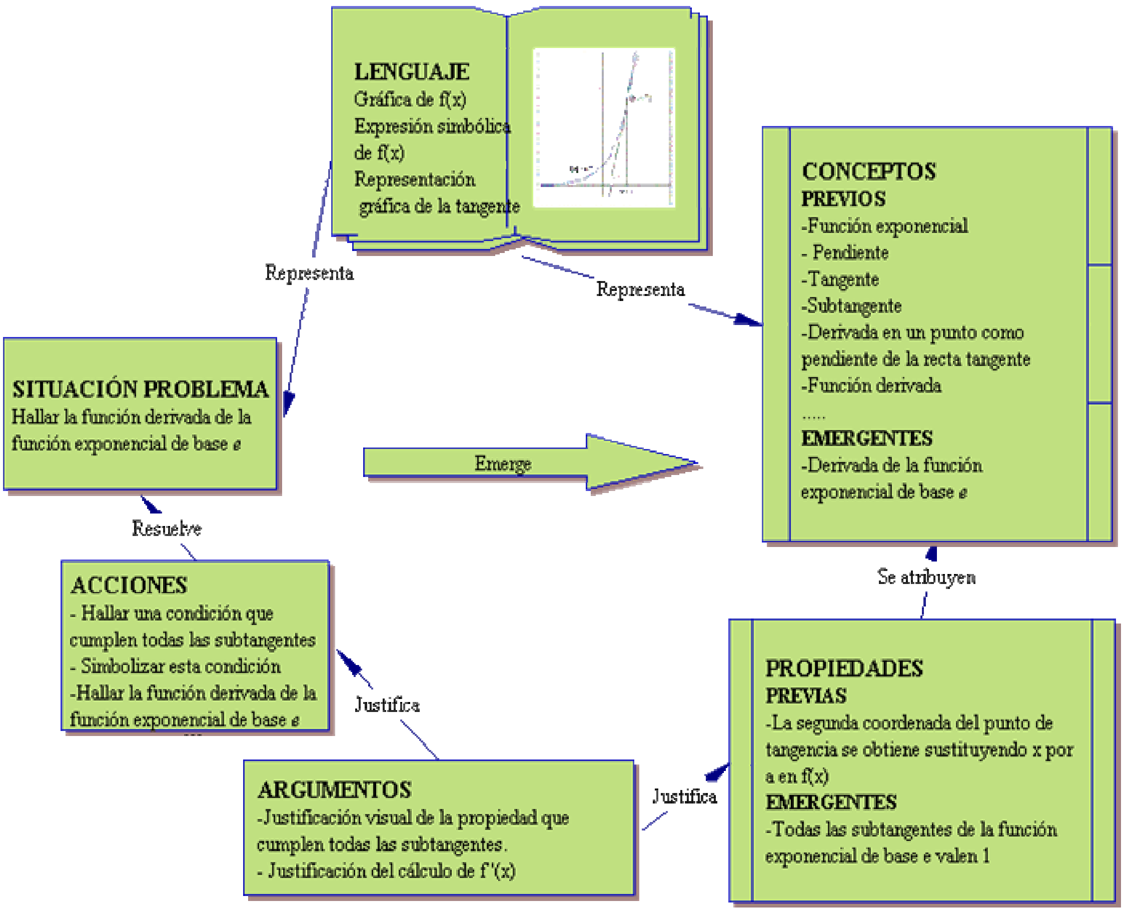

Figura 5

Para que las acciones que constituyen esta técnica se puedan aplicar son necesarios los demás objetos de la configuración (figura 5), es decir se tiene que realizar una argumentación, se ha de utilizar, entre otros, el concepto de derivada entendido como pendiente de la recta tangente, se tienen que utilizar gráficas y fórmulas, etc.

REPRESENTACIONES OSTENSIVAS ACTIVADAS EN EL CÁLCULO DE *F ´(X)*

1) Representaciones ostensivas activadas en el cálculo de la derivada de $f(x) = e^x$

A continuación vamos a centrarnos en el cuadro del lenguaje de esta configuración (figura 5). Para contestar el cuestionario, además de utilizar la gráfica de la función, se ha de utilizar que la expresión simbólica de la gráfica es $f(x) = e^x$. Esta técnica relaciona los siguientes ostensivos:

Gráfica de $f(x)$ y Expresión simbólica de $f(x) \Rightarrow$ Expresión simbólica de $f'(x)$

Con este esquema, simbolizamos que el punto de partida de las acciones de los alumnos para hallar una condición que cumplen todas las tangentes es la gráfica de la función. La expresión simbólica de $f(x)$ es necesaria para simbolizar la condición que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, la cual nos permite deducir la expresión simbólica de $f'(x)$. Si los alumnos conocen el cálculo de la pendiente y el significado geométrico de la derivada en un punto, pueden llegar a obtener la expresión simbólica de $f'(x)$ sin mucha dificultad.

En este cuestionario, el uso de la representación gráfica en un software dinámico es necesario para hallar una condición que cumplen todas las tangentes (el punto de partida del cuestionario). Para contestar de manera aproximada el apartado *a* es necesaria sólo la representación gráfica, pero para contestar de manera exacta es necesario utilizar también la expresión simbólica de la función exponencial. Para contestar al apartado *b* es necesario el uso conjunto de la representación gráfica y de la simbólica.

Dicho de otra manera, la técnica que la institución escolar pretende que apliquen los alumnos en este cuestionario sólo es posible si se introduce una configuración epistémica en la que el componente "lenguaje" contemple la representación gráfica y la simbólica conjuntamente. Si no se contempla la representación gráfica, la técnica no es viable. Por tanto, contemplar la representación gráfica, además de la simbólica, permite realizar determinadas prácticas que con sólo la representación simbólica no serían posible. Ahora bien, es importante resaltar que no conviene focalizar la atención sólo en la relación de dos de los componentes de la configuración epistémica (lenguaje y técnica) y olvidar los demás componentes puesto que estos también son esenciales (es necesario que la derivada se haya definido como pendiente de la recta tangente, que se acepte una argumentación basada en la observación visual de que las subtangentes miden 1, etc.).

El objetivo de este cuestionario es proponer a los alumnos una secuencia de actividades que está a mitad de camino entre lo que se conoce históricamente como el problema de la tangente y su inverso —no es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el problema inverso, ya que se conoce la expresión simbólica de la función— Este método fue sugerido por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow y permite que los alumnos calculen determinadas funciones derivadas sin necesidad de utilizar límites, siempre que se haya trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto.

Este método tiene un campo de aplicación limitado ya que, previamente, el alumno ha de descubrir una propiedad que cumplen todas las rectas tangentes. Ahora bien, se puede aplicar, entre otras, a la familia de las funciones que tienen por gráfica una recta, y también a las funciones exponenciales y logarítmicas. El hecho de que se pueda aplicar este método para calcular la derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas permite una organización de la unidad didáctica sobre derivadas que tiene importantes consecuencias curriculares (por ejemplo, permite prescindir del estudio previo de la indeterminación 1^{∞}).

2) Representaciones ostensivas activadas en el cálculo de $f'(x)$

En Font (2000a), se considera que el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ se puede interpretar como una práctica, en la que a su vez se han de considerar tres subprocesos:

1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$

2) El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$.

3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

Para considerar los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos, en Font (2000a) se propone la tabla 1 con el objetivo de considerar simultáneamente una función y su función derivada.

En esta tabla tenemos, en las casillas con rayas verticales, las traducciones entre las diferentes formas de representar una función y, en las casillas con rayas horizontales, las traducciones entre las diferentes formas de representar la función derivada. Las casillas blancas nos conducen de una forma de representar la función a una forma de representar la función derivada, mientras que las grises nos permiten hallar la primitiva de una función a partir de la función derivada.

a de	Expresión simbólica $f\,'(x)$	Gráfica $f\,'(x)$	Tabla $f\,'(x)$	Descripción verbal de la situación (en términos de $f\,'(x)$)	Expresión simbólica $f(x)$	Gráfica $f(x)$	Tabla $f(x)$	Descripción verbal de la situación (en términos de $f(x)$)
Expresión simbólica $f(x)$								
Gráfica $f(x)$								
Tabla $f(x)$								
Descripción verbal de la situación (en términos de $f(x)$)								
Expresión simbólica $f\,'(x)$								
Gráfica $f\,'(x)$								
Tabla $f\,'(x)$								

Descripción verbal de la situación (en términos de $f´(x)$)								

Tabla 1

En la siguiente explicación de un libro de texto podemos observar conjuntamente los tres subprocesos, ya que primero se hace una traducción en la forma de presentar la función, después se obtiene la función derivada aplicando las reglas de derivación y, por último, se buscan distintas maneras de representar la función derivada. Es decir, se sigue el esquema siguiente:

Expresión analítica de $f(x)$ Ψ Expresión analítica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Expresión analítica de $f´(x)$ Ψ Expresión analítica de $f´(x)$

Derivada de la función $f(x) = log_a x$

Al estudiar la familia de las funciones logarítmicas, hemos constatado que todas son el resultado de una dilatación en la función $f(x) = \ln x$. Es decir, que cualquier función logarítmica cumple $\log_a x = k{\cdot}\ln x$. Por consiguiente, la función derivada de la función $f(x) = \log_a x$ será:

$$f´(x) = k\cdot (\ln x)´= k\,\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

Ahora bien, al estudiar el cambio de base, se observa que k es igual a $\log_a e$ o bien a $\frac{1}{\ln a}$.

Por lo tanto:

$$(\log_a x)´ = \frac{\log_a e}{x} \quad \text{o bien} \quad (\log_a x)´ = \frac{1}{x\ln a}$$

Ambas expresiones de la función derivada se emplean indistintamente

4) Técnicas alternativas de cálculo de $f´(x)$

Entender el cálculo de la función derivada como una práctica en la que intervienen tres subprocesos, cada uno de los cuales puede utilizar representaciones diferentes, permite ampliar el abanico de técnicas de cálculo de la función derivada que no se restrinja al cálculo por límites o bien al uso de reglas de derivación (Font 2000a).

El cuestionario anterior es un ejemplo de una de estas técnicas alternativas. En Font (2000b) se pueden hallar varias técnicas alternativas para cálculo de la derivada de la función seno.

COMPLEJIDAD SEMIÓTICA RELACIONADA CON EL CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DERIVADA.

1) Complejidad semiótica

Si observamos los tres apartados del cuestionario anterior (cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e*) podemos intuir que en su redacción se ha tenido muy presente el paso de lo particular a lo general. En el apartado *a* se pide calcular la derivada para tres valores concretos (0, 1 y 2). En el apartado *b* se pide calcular la derivada para un valor concreto "a" y en el apartado *c* para un valor cualquiera. Es decir, el tránsito de lo particular a lo general ha estado muy presente en el diseño del cuestionario.

Sin entrar en análisis detallados utilizando funciones semióticas como los que se realizan en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa), podemos decir que para calcular la función derivada a partir de una condición que cumplen todas las tangentes, el alumno ha de:

1) Tratar separadamente las variables relacionadas por la fórmula y la gráfica de la función exponencial de base *e*. Para ello, ha de entender el objeto función exponencial de base *e* como un proceso en el que intervienen otros objetos, uno de los cuales es x y el otro es $f(x)$. Es decir, ha de relacionar el objeto $f(x)$ con el objeto x.

2) Asociar a x la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x.

3) Asociar la expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x con $f'(x)$. En este caso se tiene que relacionar una notación con otra diferente pero equivalente.

4) Considerar x como una variable. En este caso se tiene que relacionar un objeto con una clase a la cual pertenece.

5) Entender la función que ha obtenido como un caso particular de la clase "función derivada". En este caso se tiene que relacionar un objeto con la clase a la cual pertenece.

Si nos fijamos en el cuestionario que se ha presentado a los alumnos podemos observar que la secuencia de apartados tiene por objetivo facilitar el establecimiento de los pasos anteriores. El uso de la letra *a* y de la igualdad $x = a$ en el apartado *b* del cuestionario tienen la función de introducir un elemento concreto en el razonamiento del alumno y facilitar el paso 1. La opción de utilizar conjuntamente la gráfica y la fórmula y el uso de la notación simbólica para el punto de coordenadas (a, e^a) tienen por objetivo que el alumno realice los pasos 2 y 3. Los pasos 4 y 5 se pretenden conseguir a partir de la pregunta del apartado *c*.

Este ejemplo permite ilustrar un fenómeno que en el enfoque EOS se considera muy relevante: *la realización de la mayoría de prácticas matemáticas conlleva una complejidad semiótica importante y las representaciones utilizadas son determinantes, tanto para reducir o aumentar esta complejidad, como para la realización efectiva de la práctica*. Por ejemplo, si en el cuestionario que estamos considerando se hubiera eliminado el apartado *b*, seguiríamos pretendiendo que el alumno aplicara la técnica de cálculo de la función derivada que se ha comentado anteriormente y continuaríamos utilizando gráficas (las de la actividad previa con el ordenador y las del apartado *a*) y expresiones simbólicas (apartado *c*), pero la complejidad semiótica que tendría que afrontar el alumno aumentaría notablemente y, con ello, las posibilidades efectivas de resolver la tarea.

2) Conflictos semióticos

Según como se gestione en el proceso de instrucción la complejidad semiótica asociada a las prácticas matemáticas, se puede facilitar (o no) la aparición de *conflictos semióticos*, entendidos como: *"(...) disparidad o desajuste entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la* *institución.*" (Godino, 2002, p. 258). Dos ejemplos de conflictos semióticos potenciales son los siguientes: a) Cuando se considera ingenuamente que es bueno introducir diferentes representaciones del mismo objeto matemático y se introducen el mayor número posible de representaciones y de traducciones entre ellas, sin tener en cuenta la complejidad semiótica asociada, b) En algunos libros de texto se puede observar un *conflicto semiótico potencial causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto al usar la notación incremental* $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en \quad x=a)}$ como primera notación para definir la derivada en un punto (Badillo, 2003; Inglada y Font, 2003; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

La regularidad con la que se manifiestan en los alumnos conflictos semióticos relacionados con la función derivada se considera en el EOS un aspecto de un fenómeno relevante. En el EOS (Wilhelmi, Godino y Font, 2005) se utiliza una metáfora vectorial para describir los fenómenos. Se considera que todo fenómeno queda descrito como una *n*-tupla, donde cada componente representa una característica del mismo. Las *características* o *variables* pueden considerarse en la investigación desde dos puntos de vista diferentes: uno, como *variables explicadas* ($v_1, \ldots, v_r$), que son problematizadas por la perspectiva teórica utilizada para analizar el proceso de instrucción; otro, como *variables explicativas* ($w_1, \ldots, w_s$), que se usan para describir las explicadas en dicha perspectiva y predecir su comportamiento en situaciones "controladas" (generalmente de forma parcial). De esta manera un fenómeno es:

$$\text{Fenómeno} \equiv (w_1, \ldots, w_s; \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}); \text{ donde} \boldsymbol{v_i} \equiv (w_1, \ldots, w_s),\ i = 1, \ldots, r$$

Dos enfoques teóricos diferentes pueden coincidir en que determinadas características o variables están presentes en el fenómeno considerado (por ejemplo, dos enfoques por muy diferentes que sean llegarán a un consenso sobre la edad de los alumnos, el nivel escolar, etc.) pero pueden diferir en su consideración de dichas variables como explicadas o explicativas.

En el caso de la función derivada, el fenómeno observado en el EOS se puede describir de la manera siguiente:

> Fenómeno EOS = (alumnos de bachillerato, institución de educación secundaria, función derivada, complejidad semiótica asociada a la función derivada; dificultad de comprensión de la noción "función derivada" manifestada en conflictos semióticos)

La característica explicada y que por lo tanto ha de ser problematizada es "la dificultad observada en la comprensión que tienen los alumnos de este objeto "función derivada" manifestada en conflictos semióticos". Las variables explicativas son "edad", "tipo de institución", "objeto matemático" y "complejidad semiótica asociada".

El análisis ontosemiótico, al resaltar el papel que podían tener determinados usos de la notación incremental en dicho fenómeno, puso de manifiesto la magnitud que podía llegar a tener este fenómeno en los países en los que este tipo de notación tuviese un papel predominante y, de esta manera, dirigir investigaciones posteriores como la de Badillo (2003). Dicha investigación, realizada con profesores colombianos, documenta que dicho fenómeno en Colombia no se limita a los alumnos sino que es de mayor magnitud ya que en muchos casos son los propios profesores los que confunden la derivada en un punto y la función derivada.

3) La dualidad extensivo/intensivo en el uso de los elementos genéricos

En Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa) la "complejidad semiótica" se concreta en una trama de funciones semióticas. En concreto, se analiza la trama de funciones asociadas a la definición de la función derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Para ello, se tienen en cuenta ocho funciones semióticas y una sola de las cinco dualidades propuestas en el enfoque ontosemiótico, nos referimos a la dualidad extensivo-intensivo.

La introducción de la dualidad extensivo-intensivo y de las 8 funciones semióticas utilizadas son el resultado de la reflexión sobre uno de los elementos cruciales de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos y de la observación de episodios de aula en los que se fijan sus reglas de uso. Como resultado de estas reflexiones, en el EOS se destaca otro factor, tanto o más importante que el tipo de representación utilizado, que interviene de manera determinante en la complejidad semiótica asociada al uso de ostensivos que son considerados elementos genéricos: las reglas del juego de lenguaje en el que nos situamos.

Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos una representación ostensiva como un elemento genérico estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje” en el que se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares. Para conocer los detalles sobre las características de este juego del lenguaje, y de las dificultades que tienen los alumnos para participar en él, es necesario el análisis de diálogos entre profesores y alumnos relacionados con el uso de elementos genéricos. La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para que los alumnos puedan convivir con la complejidad semiótica asociada a las prácticas en las que interviene el elemento genérico.

A continuación siguen dos diálogos en los que el profesor explica a los alumnos las reglas que rigen el uso del ejemplo genérico (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

Diálogo 1

En este diálogo la profesora propone a los alumnos que resuelvan la siguiente actividad de su libro de texto:

Ejercicio 14: Dada la función $f(x)=ax+b$, demuestra que $f'(x_0)=a$, independientemente del valor x_0 considerado.

Esta actividad se propone justo después de que la profesora haya explicado en clase un párrafo del libro de texto en el que se justifica que la derivada de la función constante $f(x)=k$ *es* $f'(x)=0$ primero gráficamente, razonando sobre la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de la recta, y después calculando el límite de las tasas de variación media:

> *Profesora*: Lo vais a hacer de dos formas diferentes: gráficamente y utilizando límites. ¿De acuerdo? Venga, y después sale alguien a la pizarra a corregirlo. Mientras os voy repartiendo más material que después haremos servir, eh!, y así ya lo tenéis.
>
> *Alumno(Iván)*: Pero gráficamente, podemos... Eso es un ejemplo, si lo representamos gráficamente es un ejemplo...
>
> *Profesora*: (mientras hace gestos con la cabeza de que lo que dice el alumno es correcto y se acerca hacia él). Sí, Correcto!
>
> *Iván:* Y dice que x cero se considera...
>
> *Profesora:* Sí, pero Iván, para poderlo justificar coges un punto cualquiera de esta recta, cualquiera, y lo haces, y como esto lo podrías hacer con cualquier punto y con cualquier recta, sirve par justificarlo. ¿De acuerdo? Pero tienes razón, claro, para poderlo dibujar has de escoger un punto concreto y una recta concreta (mientras habla la profesora va repartiendo hojas a los alumnos).

Diálogo 2

Después de que el profesor haya introducido en clases anteriores la derivada en un punto como $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ y justo después de haber introducido la función derivada como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se produjo el siguiente diálogo:

> *Alumna(Laura)*: ¿Qué diferencia hay entre la definición de función derivada y la definición de derivada en un punto?.
>
> *Profesor*: La derivada en un punto es $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, en esta expresión la a es fija, no varia, lo que varia es la h. En cambio, en el caso de la función derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, primero has de suponer que la x no varia y que sólo varia la h para obtener $f'(x)$, y después has de suponer que la x varia. Por tanto, cuando calculas la derivada en un punto el resultado es un número, mientras que cuando calculas la función derivada, el resultado es una fórmula de una función.

EXPERIMENTACIÓN DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN

A partir de las consideraciones anteriores, entre otras, en Font (2000a)[2] se describe un proceso de instrucción para el objeto "derivada" que toma en consideración la complejidad semiótica que implica el paso de la derivada en un punto a la función derivada. La descripción de este proceso de estudio se desarrolla teniendo en cuenta los constructos elaborados por el EOS. En concreto se describe con detalle el proceso que va del significado de referencia al significado pretendido. También se describen el significado implementado y el evaluado. La institución es, en este caso, una clase de 1º de bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria de la Comunidad Autónoma de Catalunya.

El significado pretendido se concretó en una unidad didáctica que tenía por objetivo que, después del proceso de instrucción, el alumno dominase las técnicas de cálculo de la función derivada que se deducen de la parte inferior de la figura 6. Para que estas prácticas resulten comprensibles a los alumnos, es necesario relacionarlas con otro sistema de prácticas que permita calcular la derivada de una función en un punto, así como con otro sistema de objetos institucionales que las justifiquen. De todo esto, se desprende la necesidad de seleccionar previamente un sistema de prácticas para calcular la derivada en un punto, que son las que se deducen de la parte superior de la figura 6.

[2] En Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa) se puede encontrar un resumen del proceso de instrucción descrito en Font (2000a)

¿Cómo se calcula $f'(a)$?

- **Directamente**
  - **1) Utilizando límites**
    - **Calculando** $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
  - **2) Gráficamente**
    - **Calculando la pendiente de la recta tangente**
  - **3) Aproximadamente**
    - **3.1) Calculando** $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **para un valor de h muy pequeño**
    - **3.2) Considerar que** $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
- **Indirectamente 4) Utilizando la función derivada**
  - **1) Calcular $f'(x)$**
  - **2) Substituir x por a**

¿Cómo se calcula $f'(x)$?

- **Directamente**
  - **1) Utilizando límites**
    - **Calculando** $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
  - **2) Gráficamente**
    - **2.1) Hallar una condición que cumplan todas las rectas tangentes**
    - **2.2) Hallar $f'(x)$ a partir de la condición anterior**
  - **3) Aproximadamente**
    - **3.1) Dibujar la gráfica de** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **para un valor de h muy pequeño**
    - **3.2) Considerar que** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \simeq \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$
    - **3.3) Hallar la expresión de $f'(x)$ a partir de la gráfica de** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- **Indirectamente 4) Utilizando las reglas de derivación**

Figura 6

Con relación a las unidades didácticas habituales en la comunidad autónoma de Catalunya este significado pretendido incorpora procedimientos correspondientes a las formas 2 y 3 (ver esquema inferior de la figura 6) de introducción de la función derivada. Puesto que cualquier recta tangente en un punto de la gráfica de la función $f(x) = e^x$ cumple que la subtangente vale 1, se puede aplicar el procedimiento 2 a $f(x) = e^x$, lo cual permite prescindir, en la unidad de límites, del estudio previo de la indeterminación 1^∞, mientras que la aplicación del procedimiento 3 a la función seno (Tall (1992) permite prescindir, en la unidad de trigonometría, del estudio de las fórmulas trigonométricas que convierten una diferencia de senos en un producto. Por tanto, la incorporación de estas dos técnicas alternativas, además de permitir una emergencia diferenciada de los objetos derivada en un punto y función derivada, permite una organización de la unidad didáctica de derivadas que reduce considerablemente los contenidos de dos unidades (límites y trigonometría) que se han impartido previamente.

En la experimentación del proceso de instrucción descrito en Font (2000a) la trayectoria que va del significado de referencia al significado pretendido tuvo en cuenta los conocimientos previos de los alumnos, la complejidad semiótica y los conflictos semióticos potenciales; pero también la elección de actividades adaptadas a los alumnos que fuesen a la vez motivadoras para ellos, con el objetivo de conseguir una buena implicación en las tareas propuestas. Por otra parte, fue determinante la consideración de las restricciones que imponen los documentos curriculares y, sobre todo, la disponibilidad de recursos materiales y temporales puesto que se diseñó una propuesta de organización del significado pretendido que fuese viable en una institución escolar de secundaria cualquiera.

La descripción del proceso de instrucción, realizada en forma de crónica y de manera exhaustiva, muestra por una parte la complejidad del proceso de instrucción cuando se trata de estudiar y enseñar el objeto "derivada" y, por otra parte, permite llegar a conclusiones importantes, entre las que destacamos algunas:

- La consideración conjunta de la complejidad semiótica, los conflictos semióticos potenciales y la necesidad de actividades que partan de los conocimientos previos de los alumnos, lleva a proponer significados pretendidos que se concretan en unidades didácticas cuya implementación necesita muchos recursos temporales. Por este motivo, resulta difícil compaginarlas con las restricciones materiales y temporales reales.

- El significado personal de objetos que se suponía que los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad, etc.) era insuficiente. De aquí se deduce que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieren un buen significado personal del objeto derivada consiste en conseguir un buen significado personal de dichos objetos previos.

- La definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.

- El hecho de diseñar un significado pretendido que incorporaba prácticas que permitían calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas (de $f(x)$ o de $f'(x)$), modificó los significados de los objetos personales "funciones elementales" de los alumnos. Al finalizar el proceso de estudio, el significado personal de la mayoría de alumnos incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de sus gráficas. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales "funciones elementales" antes del proceso de instrucción, ni habían sido explícitamente contempladas en el diseño previo del significado pretendido.

CONSIDERACIONES FINALES

Los análisis ontosemióticos, como por ejemplo el que se realiza en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa) sobre la dualidad extensivo-intensivo en el uso de elementos genéricos en la derivada, son análisis "finos" que permiten complementar otro tipo de análisis más "gruesos" (por ejemplo, un estudio sobre las técnicas de derivación, su campo de aplicación, sus modificaciones, etc.). El análisis ontosemiótico permite "ver" nuevos fenómenos didácticos relevantes y sugerir su explicación.

Uno de estos fenómenos es, por una parte, la regularidad con la que se manifiestan conflictos semióticos en las prácticas de los alumnos de bachillerato cuando han de distinguir la derivada en un punto de la función derivada, y, por otra parte, la poca importancia que se da a la complejidad semiótica que implica el paso de la derivada en un punto a la función derivada en las unidades didácticas que se proponen en el nivel de bachillerato español y que, evidentemente, tiene una influencia importante en lo anterior.

REFERENCIAS

Badillo, E. (2003), *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas en ejercicio en Colombia*. Universitat Autònoma de Barcelona: Barcelona. [URL:http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/ VAILABLE/ TDX-0611104-144929/]

Contreras, A. y Font, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?, *XVIII Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Castellón (Boletín nº 14), pp. 1-21. [URL: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin14.htm]

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (en prensa), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 25(2).

Contreras, A. Luque, L. y Ordóñez, L. (2004), Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo, *Educación Matemática*, pp. 59-87.

Font, V. (2000a), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona.

Font, V. (2000b), Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno. *Uno,* 25, pp. 21-40.

Font, V. (2005) Funciones y derivadas. Actas del *XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*, tomo II, pp. 5-54. Bogotá. Colombia

Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia, en L.M. Valdés (ed.): *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*, pp. 84-111. Tecnos, Madrid.

Godino, J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22(2/3), pp. 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14(3), pp. 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (en prensa). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 25(3).

Inglada, N y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental, *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Córdoba (Boletín nº 15), pp. 1-18. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/ siidm/boletin15.htm]

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2003), El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida en E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (ed): *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 277-287. Granada: Universidad de Granada.

Tall, D. (1992), L'enseignement de l'analyse a l'age de l'informatique. en B. Cornu (ed.) *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (pp. 161-182). Paris, Presses Universitaires de France.

Wilhelmi, M. R., Godino, J.D. y Font, V. (2005). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. *Actas del Colloque International «Didactiques : quelles references epistemologiques ?»*, Bordeaux, France.

Wittgenstein, L. (1983), *Investigacions Filosòfiques,* Barcelona: Laia.