EL ÁLGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN. ARTICULACIÓN DEL ESTUDIO DE LAS RELACIONES FUNCIONALES EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Francisco Javier García[1]
fjgarcia@ujaen.es
Universidad de Jaén

RESUMEN

El álgebra escolar constituye un tema central de investigación dentro del ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Desde diversas investigaciones se ha estado indagando el papel que el álgebra puede jugar en la Educación Secundaria y las restricciones a las que su estudio está sujeto, partiendo de un modelo epistemológico "alternativo" del álgebra escolar como instrumento de modelización. En primer lugar, en este artículo realizaremos una revisión de los resultados más relevantes obtenidos dentro de este dominio de investigación. En segundo lugar, expondremos parte de nuestra investigación sobre el estudio de la proporcionalidad y las relaciones funcionales en la Educación Secundaria. Por último, esbozaremos las líneas de investigación en las que seguimos trabajando en la actualidad y posibles problemas abiertos.

ABSTRACT

School algebra is a central research topic within the Anthropological Theory of Didactics. The role algebra can play in Secondary Education and the constraints that affect its study have been investigated from several researches, assuming an "alternative" epistemological model of school algebra as a modelling tool. Firstly, in this paper we will carry out a review of some of the main results obtained within this research domain. Secondly, we will explain a part of our research on the study of proportionality and functional relations in Secondary School. Finally, we will outline some research trends which we are developing at this moment and possible new research questions.

1 Co-autores: Bosch, M. (Universidad Ramón Llull), Gascón, J. (Universidad Autónoma de Barcelona) y Ruiz-Higueras, L. (Universidad de Jaén).

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Francisco Javier García (2007). EL ÁLGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN. ARTICULACIÓN DEL ESTUDIO DE LAS RELACIONES FUNCIONALES EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA, pp. 71-90.

INTRODUCCIÓN

La *evolución de la problemática didáctica* propuesta por Gascón (1998) pone de manifiesto la co-existencia de dos programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas: el *programa cognitivo* y el *programa epistemológico*. En ambos se construyen desarrollos teóricos que permiten abordar la "realidad" de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde diferentes perspectivas. En la medida en que las herramientas teóricas que se usan son de naturaleza diferente, también los problemas didácticos que es posible abordar y las soluciones que se proponen difieren en su naturaleza. Esta posibilidad de observar y tratar los *hechos didácticos* desde diferentes perspectivas puede y debe ser interpretada como una oportunidad para enriquecer el dominio de investigación en Didáctica de las Matemáticas. No exenta de dificultades, en particular subyace el problema general de la complementariedad y de la articulación (si es posible) entre diferentes investigaciones desarrolladas en diferentes marcos teóricos y en diferentes *programas de investigación*.

En esta ponencia nos situaremos explícitamente en el *programa epistemológico* y, dentro de éste, en la marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, en adelante). Esto supone que consideraremos como *objeto primario de investigación* la *actividad matemática escolar* desde una perspectiva epistemológica e institucional. De esta forma, los *procesos cognitivos de los alumnos* pasan a ser *objetos secundarios*, lo que no significa que sean de menor importancia. No se trata, ni mucho menos, de "reducir" los *fenómenos cognitivos* a *fenómenos epistemológicos*. Desde el *programa epistemológico* se postula que una posible vía de entrada a los *fenómenos didácticos* es a partir del cuestionamiento y modelización de su componente matemática (frente al cuestionamiento y modelización de su componente cognitiva que caracteriza a las investigaciones dentro del *programa cognitivo*) y es esa vía la que queremos explorar.

EL PROBLEMA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR EN EL ÁMBITO DE LA TAD: ALGUNAS INVESTIGACIONES PREVIAS

El álgebra escolar constituye uno de los temas centrales de trabajo dentro de la TAD. Sucintamente, su origen se remonta a finales de la década de los ochenta en trabajos publicados por Chevallard (1989a, 1989b), continúa con los trabajos publicados en la década de los noventa por Gascón (1993, 1994-95, 1999) y Bolea, Bosch y Gascón (1998a, 1998b) y culmina en la realización de la tesis doctoral de Bolea (2003) y en los trabajos publicados relacionados con ésta, entre otros, Bolea, Bosch y Gascón (2001, 2004). Más allá, la interpretación del álgebra que emana de estas investigaciones ha dado lugar a que, en gran parte de las investigaciones desarrolladas posteriormente en el marco de la TAD, la *problemática del álgebra* ocupe un papel central, como por ejemplo en la tesis de Fonseca (2004) sobre las discontinuidades entre la matemática en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO, en adelante) y en el Bachillerato o en la tesis de García (2005) sobre la modelización matemática y el estudio de las relaciones funcionales.

Esbozaremos a continuación algunos resultados emanados de las investigaciones anteriores. El objetivo es doble: por un lado, introducir al lector en el dominio de investigación del álgebra en el marco de la TAD, por otro lado, introducir y justificar ciertos resultados sobre los que se ha construido la investigación de García (2005), sobre la proporcionalidad y las relaciones funcionales en la ESO.

La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar: el álgebra como *aritmética generalizada*

Gascón (1993, 1999, 2007) pone en evidencia que el modelo implícito dominante del álgebra en la institución ESO se corresponde con una *generalización* de la *aritmética escolar*, en el sentido de que la actividad matemática que se desarrolla en esta institución resulta, al mismo tiempo, de la prolongación y generalización de las prácticas aritméticas junto a la *oposición* de la *actividad algebraica* frente a la *actividad aritmética*.

Brevemente y sin pretender ser exhaustivos, el álgebra como generalización y ampliación de la aritmética se caracteriza por el hecho de que las nociones de álgebra se definen en *contraposición,* pero a la vez en *dependencia absoluta*, de la aritmética escolar. Esto es, las técnicas algebraicas surgen a partir de las técnicas aritméticas de resolución problemas verbales -las cuales generaliza- y, normalmente, se identifica al álgebra con el *lenguaje algebraico,* concibiéndose éste como una generalización del *lenguaje aritmético*. Surge de esta forma el interés por analizar las características del *pensamiento algebraico* entendido como la extensión de un supuesto *pensamiento aritmético*.

Sin embargo, también es posible identificar elementos que *contraponen* la *actividad algebraica* a *la aritmética*, entre los más importantes:

- *La resolución de problemas*: en “aritmética”, está caracterizada por la realización de una cadena finita de problemas simples en los que cada resultado, de naturaleza numérica, es calculable e interpretable en términos del enunciado y está formulado mediante una expresión sencilla del lenguaje natural. En cambio, la resolución de “problemas algebraicos” supone la producción de relaciones algebraicas que representan un “enunciado matemático”, obtenida por una transformación, o por una operación legítima entre una o varias igualdades, o por la aplicación de un teorema.
- *Los resultados obtenidos*: una medida concreta, en el caso de las *prácticas aritméticas*. Sin embargo, en las *prácticas algebraicas,* podría ser una relación entre magnitudes.
- *Los objetos con los que se trabaja*: con medidas concretas en *aritmética* frente a la manipulación de símbolos en *álgebra*, que deben ser interpretados de forma diferente, según el contexto en el que aparezcan (incógnitas, “números generalizados”, parámetros, variables).
- *Significado de los símbolos y de los signos*: en la *aritmética*, los símbolos y signos tienen referentes muy concretos y un sentido muy preciso, frente a la *actividad algebraica,* en la que el significado de los signos se modifica de manera esencial.

En Bolea (2003, pp. 70-72) se demuestra, a partir de una serie de indicadores, cómo el *álgebra escolar* en la ESO es considerada en el sentido de una *aritmética generalizada*.

Esta interpretación del álgebra constituye el *modelo epistemológico de referencia*, a menudo implícito, de gran parte de las investigaciones realizadas desde la didáctica de la matemática[2]. También en la institución de la Educación Secundaria, Bolea (2003) demuestra, a partir del análisis de documentos curriculares, libros de texto y de una encuesta entre profesores, que se asume acríticamente este modelo epistemológico como único e incuestionable, constituyéndose así en un *modelo de referencia dominante* en esta institución.

La interpretación del álgebra escolar como *aritmética generalizada* está en el origen de

2 No entraremos aquí a clasificar las investigaciones realizadas en torno al álgebra. En Bolea (2003) se puede consultar una *reconstrucción racional* del dominio de investigación del álgebra.

muchos de los fenómenos identificados en las instituciones escolares en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Sin embargo, su influencia se extiende aún más lejos puesto que toda actividad matemática, a partir de cierto nivel de complejidad, no puede ser concebida sin la plena operatividad del instrumento algebraico.

El álgebra como instrumento de modelización

La interpretación del álgebra como *aritmética generalizada* presenta importantes limitaciones cuando se usa como referencia para describir, formular, interpretar y abordar problemas didácticos (en especial los relativos a la "ecología" o "condiciones de vida" del álgebra escolar).

Desde diversas investigaciones realizadas en el seno de la TAD (Chevallard, 1989b, Bolea, Bosch y Gascón, 1998b, Gascón, 1999, Bolea, 2003) se ha cuestionado explícitamente el modelo epistemológico del álgebra dominante en las instituciones escolares (y también en gran parte de la investigación en didáctica de las matemáticas) dando lugar a la formulación de un modelo epistemológico de referencia "alternativo" del álgebra desde el que formular y abordar nuevos problemas de investigación didáctica.

> "Para la didáctica de las matemáticas, no es suficiente con describir y caracterizar el modelo del *álgebra escolar* dominante en la institución docente. Es necesario, además, tomarlo como objeto de estudio, como un hecho empírico a explicar y, para ello, es necesario elaborar previamente un modelo del "*álgebra*" propio de la didáctica y utilizarlo como *modelo epistemológico de referencia* para reformular la noción de "estudiar álgebra" en una institución dada." (Bolea, 2003, p. 65)

Chevallard (1989), a partir del análisis de la génesis del álgebra, puso en evidencia que, ante todo, el álgebra surge como un instrumento al servicio del trabajo matemático, dando lugar a un cambio radical al permitir explicitar y manipular la estructura de los problemas matemáticos, ampliándose enormemente la posibilidad de abordar matemáticamente los problemas complejos que, antes del álgebra, se reducían al primer y segundo grado con una o dos incógnitas.

> "Aunque la aparición del álgebra se caracteriza materialmente por la proliferación de *expresiones algebraicas* y por la emergencia de una especie de "lenguaje algebraico", la nueva forma de hacer matemáticas basa su verdadera potencia en las inmensas posibilidades técnicas que surgen del juego del doble uso de las letras: como "*incógnitas*" y como "*parámetros*". Entre dichas posibilidades destacan las siguientes: resolver simultáneamente una amplia clase de problemas, justificar, interpretar y controlar el ámbito de aplicación de las técnicas prealgebraicas (sean "aritméticas", "geométricas" o "combinatorias") y, además de obtener la incógnita cuando el problema tiene solución, explicar cuáles son las condiciones de existencia de dicha solución y describir la estructura del conjunto de las soluciones." (Gascón, 1999, p. 80)

Por otro lado, el modelo epistemológico general de la actividad matemática en el que se fundamenta la TAD (y que debe ser coherente con el modelo epistemológico específico del álgebra que se construya) sitúa la *modelización matemática* en el núcleo de toda actividad matemática. Es por ello que las nociones básicas de la *modelización matemática* se incorporan a la descripción que se realiza de toda actividad matemática, quedando ésta caracterizada como la *producción de conocimientos* matemáticos *relativos a un sistema* (matemático) gracias a la utilización de un *modelo matemático* del mismo. De esta forma, frente a la división clásica entre la matemática "pura" y "aplicada", se postula que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización de sistemas, en ocasiones intra-matemáticos, en ocasiones extra-matemáticos.

Desde esta perspectiva, desde la TAD se propone un *modelo epistemológico de referencia* alternativo. En éste, el álgebra escolar se considera, inicialmente, no como una organización matemática al mismo nivel que el resto, sino como *instrumento de modelización* de todas las organizaciones matemáticas escolares (Bolea, Bosch y Gascón, 1998b). De este modo, el desarrollo del instrumento algebraico provocará la modificación de la naturaleza de las diferentes organizaciones matemáticas que se estudian en la Educación Secundaria. Como una consecuencia de su desarrollo, podrá llegar a convertirse en objeto de estudio en sí mismo, dando lugar a organizaciones matemáticas autónomas en torno al estudio de "estructuras algebraicas".

Dejando a un lado el *álgebra* como *objeto de estudio*, nos centraremos en la herramienta algebraica como instrumento de la actividad matemática. En consecuencia, no nos referiremos a organizaciones matemáticas en torno al álgebra[3] en la ESO, sino a *procesos de algebrización* de las organizaciones matemáticas que viven en ella. Este proceso dará lugar a diferentes *grados* (o *niveles*) *de algebrización* de las mismas (y, en consecuencia, de la actividad matemática y de los procesos de estudio asociados).

Bolea (2003, pp. 86-88) propone cuatro indicadores del *grado de algebrización* de una organización matemática y los utiliza para responder a la cuestión acerca del *grado de algebrización* de la matemática escolar en el ámbito de la ESO. Los resultados no hacen más que confirmar los obtenidos previamente en Gascón (1999) los cuales demuestran que, aunque, en un primer lugar, la matemática escolar presenta ciertos rasgos aparentemente algebrizantes, un análisis más profundo revela que en realidad el uso del álgebra no va más allá de una "aritmética generalizada" puesto que, entre otros fenómenos:

- Nunca se rompe la relación de dependencia unilateral entre lo "numérico" (o aritmético) y lo algebraico.
- Las "letras" juegan el papel de *incógnitas*, pero rara vez de *parámetros*.
- El conjunto de *conocimientos algebraicos* que se estudian aparece fuertemente atomizado y desintegrado.
- La manipulación de las *expresiones algebraicas* casi siempre es formal, sin referencia alguna a sistemas matemáticos o extramatemáticos de los que pudiese emanar un "sentido" de dichas manipulaciones.
- Las "demostraciones algebraicas" de fenómenos aritméticos, geométricos o combinatorios no juegan ningún papel en la actividad matemática que el contrato didáctico asigna a estas organizaciones escolares (y, de hecho, está prácticamente ausentes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y tienden a desaparecer también en el Bachillerato).
- Las fórmulas aparecen restringidas prácticamente al cálculo de áreas y volúmenes (y a algunas otras relaciones métricas en geometría), a algunos problemas estereotipados de cálculo comercial y la determinación de parámetros estadísticos, pero no aparecen como fruto de un trabajo algebraico ni actúan como modelos (por ejemplo, para determinar las condiciones de existencia de la incógnita).
- Las funciones tampoco se usan para construir ni estudiar fórmulas. Su estudio aparece en un ámbito completamente separado e independiente de lo algebraico y obedece a una problemática propia.

3 Como, por ejemplo, organizaciones matemáticas en torno a la "traducción del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico" o a la "resolución de ecuaciones de primer grado", que suelen encontrarse en la *matemática a enseñar* en la Educación Secundaria Obligatoria.

En resumen, es posible afirmar que el currículo escolar de la Educación Secundaria muestra un fuerte grado de *desalgebrización* y, en consecuencia, que la actividad matemática escolar tiene un marcado carácter *prealgebraico*.

Varias cuestiones relevantes surgen a partir de esta constatación. En particular, ¿cuáles son los factores que limitan y condicionan la actividad matemática escolar hasta tal punto que dificultan su progresiva algebrización, así como el origen de los mismos? Así mismo, y en relación clara con lo anterior, ¿cuáles son las condiciones que deberían darse para que la modelización algebraica estuviese presente en los *Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas* y, en particular, para que fuese posible el estudio escolar de organizaciones matemáticas progresivamente algebrizadas[4]? Y, más lejos aún, ¿es posible y didácticamente viable, en el actual *Sistema de Enseñanza de las Matemáticas*, diseñar un currículum de matemáticas en el que tenga cabida el álgebra escolar como instrumento de modelización?

¿Por qué la *modelización algebraica* no "vive" en la ESO?

Son múltiples las restricciones y condiciones que explican el carácter dominante del *álgebra como aritmética generalizada* y la ausencia del *álgebra como herramienta de modelización*. Gascón (2007) compendia y estructura diferentes restricciones, según el ámbito desde el que provienen, usando como herramienta metodológica los *niveles de determinación didáctica* (Chevallard, 2001). Cada nivel corresponde a un nivel de estructuración de la organización matemática y, en cada uno de ellos, se introducen restricciones particulares sobre lo que será didácticamente posible en el aula:

Civilización → Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

(a) Restricciones que provienen desde los niveles ***Civilización → Sociedad***

Por un lado la *sociedad* tiende, de manera general, a exigir del *Sistema de Enseñanza de las Matemáticas* (SEM, en adelante) que, al menos durante la educación obligatoria, todo elemento de saber que se enseña se deje traducir en términos compatibles con la *epistemología cultural corriente*. De esta forma, las únicas modelizaciones aceptables por la *cultura* son aquellas que pueden reducirse a *modelos "concretos"*. Considerados como familiares y naturalizados, acaban apareciendo como los únicos "pensables"[5].

Por otro lado Chevallard (1989b) relaciona la desalgebrización de la matemática escolar con la *peyoración cultural del álgebra*, relacionada con el *logocentrismo* imperante en la cultura occidental. Esta posición metafísica sostiene implícitamente que el "pensamiento reside en la cabeza", se expresa por la "voz" y la "palabra" y se conserva por la "escritura", considerada esta como un "producto secundario" (cuando no degradado) del "pensamiento". Desde este punto de vista, se desprecia el papel que los *formalismos científicos escritos* pueden desempeñar como *instrumentos del pensamiento científico*[6].

---

4 No podemos desarrollar aquí las respuestas (aún parciales) construidas desde la TAD a estas cuestiones, así como otras cuestiones problemáticas que se desprenden de lo anterior. Remitimos al lector a los trabajos ya referenciados y, en particular, a Bolea (2003) y a Bolea, Bosch y Gascón (2004).

5 El uso de *modelos "concretos"* de "ingresos/deudas", "altura/profundidad sobre el nivel del mar", "años antes/después del inicio de nuestra era", etc. para la enseñanza de los números negativos constituyen sin lugar a duda el ejemplo prototípico de esta restricción.

6 Una consecuencia visible de este hecho en los Sistemas de Enseñanza es la actitud "inerte" de la mayoría de los alumnos ante la resolución de un problema. Si se les pregunta, muchos responderán que "lo están pensado", como si la realización y manipulación de escrituras (actividad ostensiva) no formase parte de ese "proceso de pensamiento".

(b) Restricciones que provienen desde los niveles ***Escuela → Pedagogía***

En consonancia con la *interpretación psicopedagógica dominante* (Gascón et al., 2004), se tiende a eliminar algunos de los aspectos más característicos de la *disciplina matemática* (por ejemplo, el trabajo técnico *tranquilo y rutinario*, productor de saber) con el fin de evitar la *desconcertación de los alumnos* y su salida del sistema. Así, se fracciona el proceso de enseñanza de las matemática hasta hacerlo desaparecer como tal proceso, convirtiendo la matemática escolar en un conjunto *atomizado* de actividades aisladas, de "anécdotas matemáticas", aderezadas con elementos motivantes (juegos, cercanía a los intereses vitales del alumno, herramientas tecnológicas, etc.). De esta forma, se tiende a convertir la enseñanza en un mecanismo mágico del que se esperan frutos casi instantáneos, eliminándose los objetivos a largo plazo[7].

Paradójicamente, intentando proteger a los alumnos de toda *desconcertación* y de la dureza de la *disciplina matemática* se lleva a muchos de ellos a un estado de *desconcertación permanente*: la atomización excesiva de la actividad matemática escolar provoca la necesidad de un cambio constante de actividad y a la realización rutinaria de múltiples micro-tareas, siendo la mayoría de ellos incapaces de dominar técnicas amplias y flexibles que les lleven a ser realmente *competentes* desde el punto de vista matemático. En estas condiciones, es prácticamente imposible que el álgebra como herramienta de modelización pueda "vivir" y "desarrollarse" en la actual Educación Secundaria.

(c) Restricciones que provienen de los niveles específicos: ***Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión***

La Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985) puso en evidencia el conjunto de adaptaciones que sufre todo saber para poder ser enseñado en una institución didáctica. Nos referiremos aquí a cuatro *restricciones genéricas* a los efectos que tienen sobre la consideración del álgebra en el SEM:

- Restricciones que provienen de la necesidad de adecuar las actividades matemáticas escolares a la *representación institucional* del saber objeto de enseñanza (adecuación de las actividades escolares al *modelo epistemológico* del álgebra como *aritmética generalizada*).
- Restricciones provocadas por la *necesidad de evaluar* la actividad matemática que los alumnos tienen que aprender a realizar y los conocimientos correspondientes. Frente al tipo de actividad matemática asociada con al álgebra como *aritmética generalizada*, las *técnicas de modelización* están entre aquellas técnicas menos visibles, menos "algoritmizables", menos "atomizables" y, en definitiva, más difícilmente evaluables.
- Restricciones que provienen de la necesidad de que todo *saber enseñado aparezca como definitivo e incuestionable*. El álgebra como instrumento de modelización choca frontalmente contra esta exigencia general puesto que surge y se desarrolla a partir del cuestionamiento de las técnicas y hasta de las tecnologías habituales.
- Restricciones impuestas por el *tiempo didáctico*, entre otras, la *exigencia de un aprendizaje rápido* que puede llegar a la ilusión del *aprendizaje instantáneo* y que impide plantear objetivos a largo plazo.

7 Por más que la última reforma establezca un objetivo holístico como es el del desarrollo de la *competencia matemática*, a desarrollar durante toda la escolaridad obligatoria, éste al final queda dividido en múltiples micro-objetivos cuya consecución se espera casi inmediata, fruto del trabajo en el aula.

EL FENÓMENO DE LA DESARTICULACIÓN DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Tradicionalmente, los currículos de las instituciones escolares suelen estar estructurados en tres grandes secciones de contenidos: *conceptuales, procedimentales* y *actitudinales*. Cada una de estas secciones se concreta en una lista, generalmente poco estructurada, de los diferentes tipos de contenidos:

- Los contenidos *conceptuales* surgen como respuesta a la cuestión: ¿qué obras matemáticas considera la *sociedad* que hay que estudiar en la escuela?
- Los *procedimentales* intentan responder a las cuestiones del tipo: ¿hasta qué punto hay que "entrar" en estas obras? ¿qué es lo que se debe poder hacer con ellas?
- Los *actitudinales*, por su parte, recogen cómo se deben considerar las matemáticas dentro del conjunto de obras de la sociedad, así como ciertos aspectos de la actividad matemática que no pueden ser descritos como tareas o procedimientos.

Además, los currículos de matemáticas están estructurados en un conjunto de *áreas* y de *sectores*. En el caso de las disposiciones legales de Andalucía (CECJA, 2002) son cinco las *áreas* (*números y medidas, álgebra, geometría, funciones y su representación gráfica, tratamiento de la información estadística y del azar*) las cuales, a su vez, se estructuran en un conjunto de *sectores*. Por ejemplo, para el *área* denominada *geometría*, se establecen como sectores, entre otros: *elementos y organización del plano, elementos y organización del espacio* o *traslaciones, giros y simetrías en el plano*.

Si bien es cierto que el currículo asume desde sus inicios que todos estos contenidos forman parte de una organización mayor (las *matemáticas*) no establece cuál es la forma de articular estos contenidos para proceder a su estudio en las instituciones escolares, más allá de algunas consideraciones generales y un tanto vagas. De manera general, se atribuye a la *resolución de problemas* y a la *aplicación de las matemáticas en contextos "reales"* un presunto papel articulador de los diferentes contenidos y de las diferentes *áreas* y *sectores*.

Desde el *programa epistemológico de investigación en Didáctica de las Matemáticas*, se considera que para abordar el *problema de la articulación* es necesario problematizar el modelo epistemológico de las matemáticas que se pretenden articular, en vez de considerar que éste es transparente y está establecido de una vez por todas.

En el ámbito de la TAD, y utilizando las nociones que este marco teórico proporciona, proponemos formular el problema de la articulación como un problema de investigación didáctica en los siguientes términos:

> **Problema de la articulación de la matemática escolar:** ¿Cómo diseñar organizaciones didácticas que permitan articular el currículum de matemáticas tanto entre los temas y áreas de una misma etapa como entre las diferentes etapas educativas? Y, en particular, ¿qué características específicas debería poseer una organización didáctica escolar para poder retomar los contenidos antiguos, incluso los estudiados en etapas educativas anteriores, cuestionarlos, desarrollarlos e integrarlos en organizaciones matemáticas más amplias y complejas?

Como cualquier problema de investigación didáctica, presenta dos caras que, de hecho, son inseparables:

(a) Se trata de un *problema de ingeniería matemática*, relativo al *análisis* de las organizaciones matemáticas presentes en el currículo y a la *construcción* de organizaciones matemáticas. Respecto al *análisis*, se preguntará sobre la naturaleza de las limitaciones e insuficiencias de estas organizaciones matemáticas para generar y dar sentido a organizaciones matemáticas más *amplias y complejas*, que superen el *nivel temático*. Respecto a la *construcción*, su objeto será analizar la manera de completar las organizaciones matemáticas escolares existentes y proponer formas de articularlas entre sí.

(b) Se trata de un *problema de ingeniería didáctica*, relativo a la construcción de organizaciones didácticas que den lugar a la reconstrucción de organizaciones matemáticas *amplias y complejas* y que permitan superar el "encierro en los temas", con el fin de articular los contenidos matemáticos de cada etapa educativa y entre diferentes etapas.

La ausencia del álgebra como herramienta de modelización tiene múltiples efectos sobre los Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas pero, entre ellas, destacaremos la influencia que tiene sobre el *fenómeno de la desarticulación de la matemática escolar*. Formulado en términos contrarios, la presencia de la herramienta algebraica en la matemática escolar daría lugar a una *algebrización hipotética* de la misma. Gascón (1999) adelanta algunos efectos que esta algebrización produciría:

- Los objetivos a corto plazo (instantáneos) tendrían que ser modificados por objetivos a medio-largo plazo.
- Las actividades matemáticas aisladas y desarticuladas tendrían que dar lugar a una actividad matemática sostenida y prolongada. Para ello, sería necesario un proceso de estudio estructurado y disciplinado junto con la recuperación en la escuela de un trabajo de la técnica tranquilo, prolongado y sistemático.
- La interpretación, justificación y demostración son aspectos de la actividad matemática prácticamente ausentes en la matemática escolar, pero vitales desde la perspectiva de una actividad matemática algebrizada. En particular, las técnica algebraicas deberían emerger como instrumentos para demostrar fenómenos (aritméticos, geométricos, de medida o combinatorios) y para justificar e interpretar las correspondientes técnicas prealgebraicas.

En la investigación de García (2005) nos hemos centrado en el estudio de la *relación de proporcionalidad* y de las *relaciones funcionales* en la ESO. Estamos interesados en ahondar, por un lado, en el fenómeno de la desarticulación de la matemática escolar y, por otro lado, en el papel que la *modelización algebraica* puede desempeñar como herramienta de articulación. Además, nos interesa contrastar empíricamente los efectos que una algebrización (local) provoca sobre el SEM así como identificar fenómenos y restricciones ligadas con esta posible algebrización.

LA "PROPORCIONALIDAD" Y LAS "RELACIONES FUNCIONALES" EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

En esta sección mostraremos cómo "vive" la proporcionalidad en la ESO y cómo se vincula su estudio con el del resto de relaciones funcionales. Para ello, nos basaremos en el análisis de algunos documentos curriculares y de manuales escolares. Veremos cómo el carácter prealgebraico de la actividad matemática escolar provoca la existencia amalgamada de diferentes organizaciones matemáticas (puntuales, a lo sumo locales), atomizadas y deficientemente articuladas entre sí.

Un *modelo epistemológico de referencia* de la "proporcionalidad" y de las "relaciones funcionales"

Desde el punto de vista metodológico en toda investigación en el marco del programa epistemológico es necesario que el investigador haga explícito un *modelo epistemológico* que le sirva como *referencia* (MER, en adelante) para observar los hechos empíricos. En el caso de la TAD, este modelo epistemológico estará descrito en términos de praxeologías y vínculos entre praxeologías. Todo MER debe ser considerado como provisional y modificable en función de los resultados de investigación obtenidos.

En García (2005) hemos reconstruido un posible MER en torno las relaciones funcionales, partiendo de la reconstrucción de un modelo epistemológico de referencia de la proporcionalidad entre magnitudes propuesto por Bosch (1994).

Un *modelo epistemológico de referencia* de la "proporcionalidad"

La relación de proporcionalidad entre magnitudes constituye un *tema* "clásico" en el sistema de enseñanza. Sin embargo, la importancia de la relación de proporcionalidad en la *matemática sabia* decayó considerable cuando el desarrollo del cálculo diferencial y de la herramienta algebraica hizo posible modelizar todo tipo de relaciones funcionales y, en particular, la relación de proporcionalidad (directa, inversa y compuesta).

Bosch (1994) analiza cómo los complejos de ostensivos usados para modelizar la relación de proporcionalidad han ido evolucionando a lo largo de la historia y, con ellos, cómo la actividad matemática en torno a la proporcionalidad ha ido también evolucionando, dando lugar a diferentes organizaciones matemáticas.

Brevemente, y tomando la terminología introducida por Bosch (1994), se distingue entre tres tipos de organizaciones matemáticas. Dejando de un lado el problema de cómo determinar si una relación entre magnitudes puede ser considerada o no como proporcional, distinguiremos entre:

- *Modelización clásica*[8]: en la que la relación de proporcionalidad se concibe como una relación estática entre medidas de cantidades de dos magnitudes *M y M'* y se expresa mediante la *ecuación proporcional*:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\; ; \; a, b \in M; \; c, d \in M'$$

  El tipo de tareas asociado corresponde a los problemas clásicos de cálculo del cuarto proporcional y los de aritmética mercantil, contextualizados en situaciones estereotipadas en las que el carácter proporcional de la relación se asume casi siempre por la naturaleza cultural del sistema modelizado. La teoría que sustenta la práctica matemática es la teoría "clásica"de las razones y de las proporciones.
- *Modelización ecuacional*: surgida como una modernización "ostensiva" de la anterior, mantiene, sin embargo, la consideración estática de la relación. La existencia de osten-

8 Bosch (1994) distingue entre la modelizaciones "clásica" y "algebroide", según la relación entre cuatro medidas concretas proporcionales esté expresada en términos de una *ecuación proporcional "clásica"* (a:b=c:d) o "*fraccionaria"* (a/b = c/d). En ambos casos, el marco teórico y la consideración de la relación es bastante similar. Bosch (1994) muestra cómo el sistema de ostensivos empleado determina y condiciona el tipo de actividad matemática que es posible llevar a cabo. Por comodidad, hablaremos de modelización clásica cuando ésta se expresa mediante una *ecuación proporcional* en la que las razones están representadas mediante ostensivos *fraccionarios*.

sivos algebraicos permite expresar esta relación sólo entre dos medidas de cantidades de las magnitudes *M* y *M'* mediante la *ecuación*: $y = k \cdot x$ (tanto *y* como *x* son consideradas más como *incógnitas* que como *variables*). En esencia, se aborda el mismo tipo de problemas que en la modelización anterior. La aparición de la *constante de proporcionalidad* provoca una pequeña ampliación del campo de problemas y caracteriza la evolución del marco tecnológico-teórico.

— *Modelización funcional*: frente al cambio ostensivo que caracteriza preferentemente la evolución entre las dos anteriores, esta última organización matemática surge de una evolución en el nivel teórico. La relación de proporcionalidad se considera ahora como una relación funcional (dinámica) entre medidas de cantidades de las magnitudes *M* y *M'* relacionadas y, en último término, entre conjuntos numéricos. Ostensivamente, el uso de la notación funcional $f(x) = k \cdot x$ permite la emergencia de nuevas técnicas (véase Bosch, 1994, García, 2005, para una descripción más detallada).

Bolea, Bosch y Gascón (2001) analizan estas organizaciones matemáticas desde el punto de vista de su *grado de algebrización*, mostrando un proceso de algebrización creciente. En consecuencia, la unificación e integración que caracteriza a todo proceso de algebrización plantea la posibilidad de superar el aislamiento de la relación de proporcionalidad y su integración en el estudio de un conjunto de relaciones funcionales entre magnitudes.

Un *modelo epistemológico de referencia* de las "relaciones funcionales"

En García (2005) hemos construido un posible MER que parte del cuestionamiento y la caracterización de la variación de magnitudes. En esencia, partimos del hecho de que lo caracteriza a las funciones es el papel que juegan como *modelos de la variación* y no sólo como representación de un tipo particular de relación. En tal caso, las funciones pueden ser consideradas como las *primitivas* que modelizan diferentes tipos de variación entre magnitudes.

Para ello, y teniendo en cuenta las restricciones institucionales que provienen de la ESO, hemos optado por restringirnos a relaciones entre dos magnitudes *M* y *M'*, ambas discretizadas $\{a_1, a_2, ..., a_i, ...\}$ (representa el conjunto de cantidades de la magnitud *M* y $\{a'_1, a'_2, ..., a'_i, ...\}$ las cantidades correspondientes en *M'*).

Consideramos, además, que el punto de partida es un conjunto de cantidades de la primera magnitud en progresión aritmética (de diferencia) y cuestionamos el tipo de variación de las cantidades correspondientes de la segunda magnitud. De esta forma hemos introducido diferentes *tipos de variación* (o *condiciones de variación*). Esbozamos algunos a continuación (una descripción más detallada puede consultarse en García, 2005):

— *Condición de equidad*: toda progresión aritmética $\{a_i\}$ de elementos de *M* de diferencia *k* se transforma en una progresión aritmética de elementos de *M'* de diferencia *k'*.

$$\forall k \in M \ , \ \exists \ k' \in M' \ / \text{ si } \Delta a_i = a_{i+1} - a_i = k \Rightarrow \Delta a'_i = a'_{i+1} - a'_i = k'$$

— *Condición de linealidad*: más restrictiva que la anterior, implica que no sólo toda progresión aritmética de cantidades de *M* se transforma en una progresión aritmética de cantidades de *M'* sino que, también, toda progresión geométrica de cantidades de *M* se transforma en una progresión geométrica de cantidades de *M'* de la misma razón.

$$\forall k \in \mathbb{R} \ , \text{ si } \nabla a_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} = k \ \Rightarrow \ \nabla a'_i = \frac{a'_{i+1}}{a'_i} = k$$

O bien, formulada en términos continuos: si es un *estado* del sistema (par de cantidades relacionadas entre sí), entonces también (*ka, ka'*) y ($k^{-1}a$, $k^{-1}a'$) son estados del sistema ($\forall k \in \mathbb{R}$-{0}).

– *Condición de diferencias constantes de orden n:* toda progresión aritmética de diferencia *k* se transforma en una progresión con diferencias constantes de orden *n* iguales a *k'*.

$$\forall k \in M \text{ , } \exists\, k' \in M' \text{ / si } \Delta a_i = a_{i+1} - a_i = k \quad \Rightarrow \quad \Delta^n a'_i = \Delta^{n-1} a'_{i+1} - \Delta^{n-1} a'_i = k'$$

De esta forma, la *relación de proporcionalidad directa* queda reformulada como una relación entre dos magnitudes caracterizada por una variación bajo la *condición de linealidad* y aparecen otros tipos de relaciones (afines, cuadráticas, exponenciales, de proporcionalidad inversa) según sea el tipo de variación que caracteriza a la relación.

En el MER construido se propone el estudio integrado de *sistemas de variación* en los que las cantidades de magnitud son susceptibles de variar según diferentes *condiciones* (como las enunciadas anteriormente u otras posibles) y para los que se construyen, amplían e integran diferentes praxeologías (*modelos*) en torno a los distintos tipos de variación, conformando una organización matemática regional articulada en torno a la *teoría de las funciones reales de variable real*.

La "proporcionalidad" en los documentos curriculares y en los libros de texto

En García (2005) hemos usado este MER como una herramienta de análisis didáctico para caracterizar las *organizaciones matemáticas a enseñar* en la actual ESO española propuestas por algunos textos escolares en torno al estudio de la relación de proporcionalidad y su conexión con el estudio de las relaciones funcionales.

Los documentos curriculares

Centrándonos en el Decreto 148/2002 que estable el currículo de matemáticas para la ESO en Andalucía, observamos que la "proporcionalidad" (aritmética) aparece, salvo en el primer curso y en la opción B del cuarto curso, en el *sector* denominado "magnitudes" y dentro del área llamado "Números[9]" (en coherencia con el RD 3473/2000 por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la ESO en el ámbito nacional, donde la "proporcionalidad" se sitúa también en un (hipotético) sector en torno a las "magnitudes", pero sólo en el primer y en el segundo curso).

Paralelamente, en el área de "Funciones y su Representación Gráfica" se inicia el estudio "cualitativo" de dependencias funcionales a partir de enunciados, gráficas y tablas (1^er^ ciclo de la ESO). En el 2º ciclo, se introducen las expresiones algebraicas de relaciones funcionales y la actividad matemática asociada evoluciona hacia el estudio de las propiedades de las "funciones elementales", determinadas según el criterio "tipo de expresión algebraica" (polinómicas –de 1er grado, de 2º grado-, exponenciales, hiperbólicas, etc.).

El decreto curricular establece elementos praxeológicos de la *modelización clásica* (al ubicar la proporcionalidad en el área de "Números") y a su vez de la *modelización funcional* (estudio de las funciones lineales y de *proporcionalidad inversa*). Explícitamente no nos

9 Subyace una concepción "estática" de la proporcionalidad como relación "estática" entre cuatro cantidades (o medidas de cantidades) de magnitud.

es posible identificar elementos de la *modelización ecuacional*. A priori, la ubicación en sectores “alejados” induce ya cierta desarticulación y una posible atomización entre ambas modelizaciones de la relación de proporcionalidad. Sin embargo, será necesario ahondar en el siguiente *nivel de concreción curricular* para observar el desarrollo que se hace de esta organización de la matemática escolar.

La emergencia de otros tipos de dependencias, explícita en el segundo ciclo, debería provocar el cuestionamiento de la relación de proporcionalidad y su integración en una organización matemática más amplia junto a otros tipos de variación entre magnitudes.

Los libros de texto

A partir del análisis detallado de libros publicados por dos editoriales y de la revisión de numerosos textos escolares, en García (2005) se pone de manifiesto la relativa uniformidad que existe en el tratamiento de la “proporcionalidad” y de las “relaciones funcionales”.

En resumen, observamos que la *organización matemática a enseñar* separa, por un lado, el ámbito del *estudio clásico de la proporcionalidad* (que sitúa en el marco “clásico” de la proporcionalidad aritmética) y, por otro, el ámbito del estudio de las *relaciones funcionales*. En la medida en que el *estudio clásico* suele incluir *modelizaciones ecuacionales*, la “constante de proporcionalidad” aparece como único elemento de articulación entre dichos ámbitos.

En ambos ámbitos aparecen componentes praxeológicos de diferentes modelizaciones de los sistemas “lineales” y “lineales inversos” pero, en ningún caso, dichos componentes se articulan para integrar una organización matemática *local* relativamente completa (por ejemplo, cuestionando las técnicas, mostrando su limitación y por tanto la necesidad de construir nuevas modelizaciones, etc.), por lo que podemos afirmar que la organización matemática *a enseñar* propone una *amalgama de organizaciones matemáticas puntuales y relativamente aisladas* en la que se entremezclan *razones* y *proporciones* con *modelos ecuacionales* del tipo $y= kx$ (o $y=k/x$) y con el estudio de las *funciones lineales e hiperbólicas*.

Esta situación es perfectamente compatible con la ausencia del *álgebra* como instrumento de modelización y nos permite avanzar en nuestra hipótesis del carácter pre-algebraico que la actividad matemática escolar.

Paralelamente a este fenómeno de *desarticulación*, se observa que el papel de la *modelización matemática* que se propone en la organización matemática *a enseñar* es accesorio y casi superfluo. Obedece a un uso oportunista de *sistemas proporcionales* para la introducción de las funciones lineales pero, realmente, no existe cuestionamiento alguno sobre el *sistema* puesto que siempre se parte de situaciones en las que la *transparencia cultural del sistema* lleva implícito el carácter proporcional del mismo. Lo mismo ocurre cuando se introducen las *funciones exponenciales*, mediante un uso interesado de uno o dos sistemas que rápidamente desaparecen. Cuando no es fácil encontrar *sistemas culturalmente aceptables*, se observa entonces una desaparición progresiva de la modelización matemática y, consiguientemente, del estudio de sistemas (tanto intramatemáticos como extramatemáticos). La actividad matemática se desplaza entonces completamente al estudio de las propiedades “formales” (expresión algebraica, representación gráfica, cortes con los ejes, crecimiento, etc.) de diferentes tipos de funciones “numéricas”.

Otra muestra clara del *papel oportunista de la modelización matemática* en la *organización matemática a enseñar* lo pone de manifiesto la ausencia casi absoluta de cuestionamiento en torno al tipo de relación funcional más pertinente para modelizar un sistema determinado, en función de las cuestiones problemáticas que se planteen en dicho sistema. En particular, nunca aparece la necesidad de hacer “evolucionar” la relación funcional que modeliza un sistema para construir conocimientos cada vez más amplios (o simplemente, más conocimientos) de un mismo sistema (que también debería ser sucesivamente “reconstruido”).

En lo que sigue, mostraremos, partiendo de un sistema concreto, el poder articulador de la modelización matemática cuando se pone en funcionamiento de forma explícita y sistemática, dando lugar a una actividad matemática más algebrizada, articulada, integrada y menos atomizada.

PROPUESTA DE ARTICULACIÓN DEL ESTUDIO DE LAS RELACIONES FUNCIONALES MEDIANTE UN PROCESO DE MODELIZACIÓN ALGEBRAICA

Toda *actividad de estudio e investigación* (AEI) parte de una cuestión generatriz *Q*, que permite hacer emerger un tipo de problemas y una técnica de resolución de dichos problemas, así como una tecnología apropiada para explicar y justificar la actividad matemática que se ha llevado a cabo (Chevallard, 1999).

Si esta cuestión generatriz *Q* es lo suficientemente fecunda, dará lugar a nuevas cuestiones problemáticas que generarán nuevos tipos de tareas cuya respuesta producirá una sucesión de organizaciones matemáticas articuladas entre sí, en un período de tiempo relativamente largo, esto es, un *recorrido de estudio e investigación*[10] (REI).

En el comienzo de la actividad en cualquier campo de las matemáticas, la cuestión fundamental que conviene plantearse es la de las *razones de ser* que han motivado la creación y desarrollo de este campo, y que motivan también su presencia en los programas de estudios. En el caso de las “funciones”, si bien no es posible formular con demasiada precisión una cuestión generatriz única, es evidente que el origen de las posibles formulaciones se encuentra en el *estudio de la variación*, esto es, en el estudio de *situaciones* en las que dos o más magnitudes varían, dependiendo unas de las otras, y en torno a las que nos preguntamos cómo podemos describir y caracterizar esta variación.

Entendemos el término *sistema* en el sentido de una praxeología o al menos de un conjunto de componentes praxeológicos que englobe, como mínimo, a dos magnitudes y a algún componente tecnológico susceptible de dotar de sentido a una posible relación entre ellas. El carácter intra-matemático o extra-matemático de este componente tecnológico será el que determine el entorno en el que el sistema su ubique. Para su elección debemos tener en cuenta la restricciones que, desde los diferentes *niveles de determinación,* condicionan todo proceso de estudio a desarrollar en una institución escolar, así como el tipo de actividad matemática que pretendemos que el sistema genere.

En el REI que hemos diseñado, proponemos ubicar los sistemas en un entorno de tipo *económico-comercial* (construcción de “programas” o “planes de ahorro”), puesto que:

– Constituye un medio familiar para el alumno de la institución Enseñanza Secundaria que nos permitirá desarrollar una actividad matemática suficientemente amplia, que será descrita más adelante.

– Se trata de un ámbito de la sociedad actual que la *escuela* debería tomar más en serio si realmente asume su función de servir de instrumento para “mejorar la vida de los ciudadanos[11]”.

---

10 Véase Chevallard (2006) para una descripción más detallada de los *Recorridos de Estudio e Investigación*.

11 Chevallard (2006) considera que la *epistemología escolar* dominante en la actualidad está caracterizada por

— Además, en coherencia con el *modelo epistemológico de referencia* esbozado anteriormente, este entorno permite dotar de sentido a la discretización de las variables.

En esta construcción del sistema, emergen dos variables fundamentales:

— V_1 → la duración del "plan de ahorro" (*PA* en adelante) y la distribución temporal de los diferentes plazos.

— V_2 → las cuotas (cantidades de dinero) que se entregarán en cada plazo (y, relacionadas con estas, la cantidad total que se tiene ahorrada en cada plazo).

Suponemos, además, que la relación entre la variable V_1 y V_2 es unívoca, es decir, que para cada "plan de ahorro" y para cada medida de una cantidad de la primera magnitud, existe sólo una cantidad de la segunda magnitud relacionada con ella. Obviamente, otras condiciones sobre la *construcción* del sistema harían que las propiedades de éste variasen de manera significativa.

Esta primera delimitación del sistema es suficiente para plantear una cuestión generatriz capaz de generar el REI y, en especial, para suscitar la necesidad de un *segundo grado* de construcción del sistema, que formará parte de la actividad matemática que debe desarrollar el alumno.

Proponemos como *cuestión generatriz* del REI la siguiente:

Q_A : ¿Qué criterios utilizar para planificar un "plan de ahorro" concreto (PA_i)?

Esta cuestión es una *cuestión crucial*, en varios sentidos:

— Su generalidad lleva implícita la necesidad de un *segundo grado de estructuración*, que ahora forma parte de la tarea en sí, y será responsabilidad de la comunidad de estudio.

— Es capaz de generar una actividad matemática a partir de un *medio matemático* relativamente limitado (*técnicas aritméticas elementales*), y que forma parte del *medio matemático* de un alumno de la institución en la que el REI se ubicará (segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria).

— La construcción y simulación de diferentes planes de ahorro, que en principio surgirán como praxeologías puntuales, permitirá la emergencia de nuevas cuestiones problemáticas en torno a ellas, que serán el verdadero motor del REI.

De esta forma, la comunidad de estudio tendrá la responsabilidad de:

1. **Elegir un primer estado**: comenzar en un instante determinado y con una cierta cantidad de dinero. Este estado inicial adquiere un carácter provisional y será revisable en cada momento y susceptible de ser modificado. De esta forma, este primer estado comienza a desempeñar el rol de un parámetro de la situación.
2. **Decidir cómo se van a ir generando los próximos estados**, esto es, el **tipo de variación** que caracterizará al sistema. No existe una única forma de realizar esta tarea, y supone la toma de decisiones sobre las variables del *sistema*.

eliminar las "razones de ser" de las praxeologías propuestas para ser estudiadas en la escuela. De esta forma, se produce un *fenómeno de monumentalización* de estas praxeologías, que son llevadas a la escuela como objetos ya creados, valiosos por sí mismos, a los que se *invita* al alumno a *visitar*.

3. Simular el sistema, esto es, construir un conjunto de estados lo suficientemente amplio como para permitir que se desarrolle el trabajo experimental necesario para el estudio.

Aunque la libertad aún es grande, es de esperar que emerjan planes de ahorro con distribuciones temporales uniformemente espaciadas y entrega de cuotas según una *ley recurrente de orden uno*, que darán lugar a diferentes "planes de ahorro[12]".

En una descripción general, el REI parte de la simulación de planes de ahorro, según diferentes tipos de variación (tarea $T_{\text{simulación}}$), es decir, elegir el número de cuotas y la cuantía de los parámetros iniciales y calcular las cantidades acumuladas en cada plazo hasta obtener la cantidad final ahorrada . La realización de esta primera tarea conduce a la construcción de un conjunto de técnicas aritméticas sencillas ($\tau_{\text{aritmética}}$) que, si se desea, pueden ser programadas usando una herramienta informática como Excel. De esta forma, para cada tipo de variación se construye una primera praxeología puntual:

$$PA(Eq),\ PA(Var_{Ac}^{1}),\ PA(Var_{Ac}^{2}),\ PA(Var_{Ac}^{3}) \text{ y } PA(Var_{Ac}^{4}).$$

La actividad matemática que es posible realizar con cada una de estas praxeologías puntuales es limitada. Esta limitación se hace más evidente cuando se desea, no sólo construir estados del sistema, sino controlar el sistema (en el sentido de tomar decisiones sobre sus parámetros), esto es, tomar decisiones que nos permitan prever y anticipar su comportamiento y construir sistemas "a medida", según distintas necesidades de ahorro. También muestran limitaciones para la realización de tareas relativas a la comparación entre sistemas (para una descripción más detallada de las diferentes tareas, remitimos al lector a García, 2005).

A partir de estas limitaciones se plantea la necesidad de ampliar estas OM puntuales a otras locales en las que disponer de instrumentos que permitan controlar y anticipar el comportamiento del sistema, así como comparar diferentes sistemas:

$$OM_L(Eq),\ OM_L(Var_{Ac}^{1}),\ OM_L(Var_{Ac}^{2}),\ OM_L(Var_{Ac}^{3}) \text{ y } OM_L(Var_{Ac}^{4})$$

Para ello, la comunidad de estudio tendrá que trabajar sobre cada tipo de ahorro con el fin de construir *modelos algebraicos* que permitan caracterizar los estados del sistema y relacionarlos con los parámetros iniciales. Este "juego" entre variables, incógnitas y parámetros es el que caracteriza la emergencia de una actividad matemática algebrizada. El álgebra no surge como una mera traducción de cierta *realidad aritmética,* sino como una herramienta necesaria para ampliar el conocimiento y el control que se tiene de los diferentes "planes de ahorro". De esta forma, la *razón de ser* de la herramienta algebraica surge de la propia situación y obedece a necesidades intrínsecas y no meras razones didácticas externas.

El hecho de que los diferentes tipos de variación estén formulados como recurrencias de orden 1 permite la construcción de una técnica común (τ_{rec}), cuya realización concreta depende de cada tipo de variación, pero que, de manera general, consiste en construir diferentes estados para luego relacionarlos a través de la ley de recurrencia hasta llegar a las cantidades iniciales que actúan como parámetros.

De igual forma que con los *modelos* aritméticos, tiene que ser puesto a prueba el alcance y la validez del este *modelo algebraico* para generar técnicas que permitan controlar y anticipar

12 En García (2005) hemos trabajado sobre cinco tipos de variación, definiendo cinco tipos de "planes de ahorro": equitativos (*Eq*), acumulativos de cuota creciente ($Var_{Ac}^{1}, Var_{Ac}^{2}$) y acumulativos de cuota decreciente ($Var_{Ac}^{3}, Var_{Ac}^{4}$).

el funcionamiento de cada plan de ahorro, así como comparar planes de ahorro entre sí, tanto entre aquellos sujetos al mismo tipo de variación como entre planes que evolucionan bajo condiciones diferentes.

CONCLUSIONES Y NUEVOS PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN

Hasta aquí hemos mostrado cómo el *problema del álgebra escolar* ha sido reformulado como problema de investigación en el marco de la TAD y algunas de las respuestas construidas desde diferentes investigaciones. Hemos caracterizado el *modelo epistemológico dominante del álgebra escolar* y analizado algunos de los efectos que provoca sobre el SEM (carácter pre-algebraico de la matemática escolar), hemos introducido un modelo alternativo del álgebra escolar como herramienta de modelización y hemos analizado los efectos que la *algebrización* de la actividad matemática podrían tener sobre la matemática escolar y las restricciones que dificultan su plena integración en los actuales *Sistemas de Enseñaza de las Matemáticas*.

Entre los fenómenos identificables en el *SEM*, relacionados con la ausencia de la modelización algebraica, nos hemos centrado en el de la *desarticulación y atomización de la matemática escolar*, estudiándolo en profundidad en el caso de la relación de proporcionalidad (en la ESO) y mostrando la necesidad de cuestionar los *sectores* y las *áreas* en las que tradicionalmente se "compartimenta" la matemática escolar. Hemos diseñado un proceso de estudio como propuesta de articulación de saberes previamente construidos durante la ESO (proporcionalidad y relaciones funcionales) a través del uso explícito de la modelización algebraica.

Sin embargo, la implementación experimental de este *proceso de estudio* durante los cursos escolares 2003-2004 y 2004-2005 (con alumnos de 4º de eso y de 1º de bachillerato) muestra notables dificultades: ligadas a las restricciones transpositivas generales, a las restricciones "pedagógicas" y "escolares", al contrato didáctico *generalizado* en las instituciones docentes, entre otras. En la medida en que el *proceso de estudio* diseñado supone la plena operatividad de la herramienta algebraica, su implementación supone una irrupción brusca de la *modelización algebraica* que, como no podía ser de otra forma, choca con el carácter pre-algebraico dominante en las actuales instituciones escolares.

Es por ello que surge la necesidad de investigar en qué niveles y cómo introducir y hacer evolucionar la *modelización algebraica* para que ésta llegue a alcanzar un determinado grado de desarrollo a la finalización de la Educación Secundaria (y más allá, permitiendo la articulación con la Universidad). Retomando las cuestiones formuladas en el apartado *El álgebra como instrumento de modelización*:

- ¿Cuáles son las condiciones que deberían darse para que la modelización algebraica estuviese presente en los *Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas* y, en particular, para que fuese posible el estudio escolar de organizaciones matemáticas progresivamente algebrizadas?

- ¿Es posible y didácticamente viable, en el actual *SEM*, diseñar un currículum de matemáticas en el que tenga cabida el álgebra escolar como instrumento de modelización?

En el marco del grupo Bahujama se están llevando en la actualidad diferentes investigaciones que, partiendo de los trabajos previos aquí revisados, intentan avanzar en este problema general y en las ramificaciones que surgen a partir del mismo. Entre otras:

- En Ruiz, Bosch y Gascón (2007a, 2007b), proponen tres niveles de desarrollo de la *modelización algebraica-funcional* y se analiza el papel que puede desempeñar como *herramienta de algebrización*, permitiendo la emergencia de una actividad matemática en la que tome pleno sentido el juego entre *variables* y *parámetros* en la ESO. Se propone y experimenta un *recorrido de estudio e investigación* en el que se integra el uso de una calculadora simbólica (WIRIS). De esta forma, se pretende investigar el papel que las calculadoras simbólicas pueden desempeñar en el desarrollo del *álgebra como herramienta de modelización*.

- En Barquero, Bosch y Gascón (2007a, 2007b) se analiza cómo integrar contenidos de diferentes *áreas* en el primer curso de enseñanzas universitarias de ciencias. Se construye y experimenta un *recorrido de estudio e investigación* como proceso de modelización que, partiendo del estudio de un problema extra-matemático (dinámica de poblaciones) pretende la construcción articulada de contenidos algebraicos, de cálculo diferencial e integral de una variable y ecuaciones diferenciales.

- En Serrano, Bosch, Gascón (2007) se parte de la atomización identificada en el conjunto de *prácticas matemáticas* que se llevan a cabo en la Educación Secundaria (Fonseca 2004) y se aborda el problema de diseñar un proceso didáctico capaz de situar las cuestiones problemáticas del mundo de la economía y la empresa en el punto de partida del estudio, haciendo que estas cuestiones sean la fuerza generadora de los contenidos matemáticos que se enseñan, tomando la modelización matemática como instrumento de articulación.

En todas ellas, y de manera transversal, subyacen cuestiones generales relativas a la determinación de las restricciones transpositivas que operan sobre los *procesos de modelización matemática* en las instituciones escolares y se intenta avanzar en la determinación de las condiciones *ecológicas* que permitirían el pleno desarrollo de dichos procesos en los Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2007a). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. Estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.) *Sociedad, escuela y matemáticas*. *Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (en prensa). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2007b). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. Comunicación presentada en el 5º Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática. Lárnaca (Chipre).

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano", número 23.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998a). Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proporcionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire, *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM, 153-159.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998b). The role of algebraization in the study of a mathematical organization. Comunicación presentada en el 1er Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática. Osnabrueck (Alemania).

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 21/3, 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 125-133.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

CECJA (2002). Decreto 148/2002 por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 75 de 27/06/2002.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989a). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989b). *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire*, Nota de síntesis disponible en el IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, nº 11. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.) *Proceedings of the IV Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 21-30. Barcelona: FundEmi IQS - Universitat Ramon Llull.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13/3, 295-332.

Gascón, J. (1994-95). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée", *Petit x*, 37, 43-63.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación matemática*, 11/1, 77 - 88.

Gascón, J. (2007). *El proceso de algebrización de las matemáticas escolares*. Escuela de Invierno de Didáctica de las Matemáticas, Buenos Aires (Argentina), pendiente de publicación.

Gascón, J., Muñoz-Lecanda, M., Sales, J. y Segura, R. (2004). Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro, Comunicación invitada en las *Xornadas sobre Educación Matemática* (Santiago de Compostela, 16-18/09/2004).

[Recuperado el 05/05/05 en http://www.agapema.com/activ/act_formacion/SANTIAGO-PONENCIA.doc]

Ruiz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2007a). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.) *Sociedad, escuela y matemáticas*. *Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (en prensa). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ruiz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2007b). The functional algebraic modelling at secondary level. Comunicación presentada en el 5º Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática. Lárnaca (Chipre), 22-26 de febrero de 2007.

Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2007): "Cómo hacer una previsión de ventas": propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas". Comunicación aceptada en el Segundo Congreso Internacional sobre la TAD. Ùzes (Francia), pendiente de publicación.