51
EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **12**, Núm. 51, 47 – ~~100~~ (1997)

Estimation L^p de la Solution de l'Equation des Ondes sur le Demi–Plan de Poincaré

A. Elkohen et H. Sadiky

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Fes, Maroc
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Semlalia, Marrakech, Maroc

(Research paper presented by Luis Vega)

AMS *Subject Class.* (1991): 43A85 *Received December* 10, 1993

Introduction

Dans ce travail on considère le problème de Cauchy

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta - \frac{1}{4})\, u(t,z) = 0 \\ u(0,z) = 0, \quad u_t(0,z) = f(z) \\ t \in \mathbb{R}^+, \quad z \in H \end{cases}$$

où $\Delta = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur le demi-plan de Poincaré $H = \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ dont la structure riemanniènne est donneé par $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$.

On établit une estimation L^p, $1 < p \leq \infty$, de la solution de (P), en introduisant une certaine famille analytique de fonctions maximales (c.f. §. 2). Par suite on en déduit un résultat de type Fatou pour le problème de Cauchy (P). On note que le résultat analogue dans $\mathbb{R}^n$, a été initié dans [10](1976). On cite également le papier [3](1980), dans lequel, on considère le problème de Cauchy de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$ en prenant les données initiales sur l'hyperboloíde $t^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 = 1$.

1. Eléments d'analyse harmonique

Dans ce paraghraphe, on donne quelques éléments d'analyse harmonique dans le demi-plan de Poincaré.

Soit G la composante connexe de l'identité dans le groupe des isometries de H, et soit K le sous groupe de G, laissant invariant l'origine $i = (0,1)$ de H.

On a:

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}); \quad ad - bc = 1 \right\} = SL(2, \mathbb{R})$$

et

$$K = \left\{ K_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \quad \theta \in [0, 2\pi] \right\} = SO(2)$$

G agit sur H par l'action transitive

$$g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \quad z \in H.$$

La décomposition de Cartan de G est donneé par $G = KAK$ où

$$A = \left\{ \alpha_A = \begin{pmatrix} e^{1/2} & 0 \\ 0 & e^{-1/2} \end{pmatrix}; \quad A \in \mathbb{R} \right\}.$$

La formule d'integration correspondante, après normalisation des mesures de Haar, est donneé par

$$\int_G f(g) dg = \int_K \int_{\mathbb{R}} \int_K f(k_1 \alpha_A k_2) A h(A) dk_1 dA dk_2.$$

Une fonction f définie sur G, invariante à droite par rotations peut-être considéreé comme fonction définie sur H en écrivant $f(g) = f(g \cdot i)$, $g \in G$.

Aisi, on peut définir le produit de convolutions de deux fonctions

$$f_1 * f_2(z) = \int_G f_1(g^{-1} \cdot z) f_2(g \cdot i) dg.$$

Pour les fonctions bi-invariantes sur G, la transformation de Fourier est donneé (c.f. [6] et [11]) par:

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_G f(g) \varphi_\lambda(g) dg, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La formule d'inversion est

$$f(g) = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) \varphi_\lambda(g) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda, \quad g \in G,$$

où $|c(\lambda)|^{-2} = \lambda \tanh(\pi\lambda)$, les fonctions φ_λ sont les fonctions spheriques de G, elles sont exprimées à l'aide des fonctions de Legendre par:

$$\varphi_\lambda(g) = P_{-1/2+i\lambda}(\cosh A),$$

où $A = d(g \cdot i, i)$ (c.f. [6] et [7])

La distance géodésique sur H (c.f. [5] et [6]), est donneé par:

$$d(z_1, z_2) = \mathrm{Log}\left(\frac{|\bar{z}_1 - z_2| + |z_1 - z_2|}{|\bar{z}_1 - z_2| - |z_1 - z_2|}\right), \quad (z_1, z_2) \in H^2.$$

2. Estimation L^p

On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta - \frac{1}{4}\right) u(t,z) = 0 \\ u(0,z) = 0, \quad u_t(0,z) = f(z) \\ t \in \mathbb{R}^+, \quad z \in H \end{cases}$$

où f est supposée invariantes par rotation dans $C_o^\infty(H)$.

Par applications de la transformation de Fourier sphérique à (P) par rapport à z et en utilisant la formule de Green on obtient:

$$\tilde{u}(t,\lambda) = \tilde{f}(\lambda)\frac{\sin \lambda t}{\lambda}.$$

On peut donc écrire

$$u(t, g \cdot i) = \int_o^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \varphi_\lambda * f(g \cdot i)|c(\lambda)|^{-2} d\lambda,$$

La démonstration de ce résultat est analogue à celle du Théorème 10-9.,[2]; montré pour $SL(2, \mathbb{C})$.

Pour $t > 0$, on désigne par A_t l'opérateur solution de (P) construit ci dessus.

Remarque 2.1. D'après (13) p. 150 [4] on a:

$$\lambda^{-1} \sin \lambda t = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} (\sinh t)^{1/2} P^{-1/2}_{-1/2+i\lambda}(\cosh t).$$

A l'aide de (7) p. 156 [4] on a:

$$\lambda^{-1} \sin \lambda t = \pi^{1/2}(e^t - 1)e^{t/2} m_t^{1/2}(\lambda),$$

où

$$m_t^\alpha(\lambda) = \frac{(\sinh t)^{2\alpha} e^{t(\alpha-1)}}{2\pi^{1/2}(e^t-1)^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^\pi (\cosh t + \sinh t \cos\theta)^\sigma (\sin\theta)^{2\alpha} d\theta,$$

avec $\sigma = -1/2 + i\lambda - \alpha$.

L'integrale ci dessus est absolument convergente et uniformément bornée par rapport á λ pour $\mathrm{Re}(\alpha) > -1/2$ (c.f. [3]). Par application de la formule de Plancherel, on obtient:

THÉORÈME 2.2. *Pour $t > 0$ et $\mathrm{Re}(\alpha) > -1/2$, l'opérateur*

$$T_t^\alpha f(u) = \int_0^\infty m_t^\alpha(\lambda)\varphi_\lambda * f(u)|c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

est borné dans $L^2(G/K)$.

Dans ce qui suit, on désigne par m^α la fonction maximale

$$m^\alpha f(u) = \sup_{t>0} |T_t^\alpha f(u)|, \quad u \in G/K.$$

Une conséquence immédiate du Théorème 3 [3], et du fait que $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ est isomorphe à $SO_0(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ (c.f. [5, p. 518]) lorsque $n = 2$, $p = 2$ et $q = 1$; est le résultat suivant:

LEMME 2.3. *m^α est borneé dans $L^p(G/K)$ dans les deux cas suivants:*

(1) *$1 < p \leq 2$ et $Re(\alpha) > 2/p - 1$;*

(2) *$2 \leq p \leq +\infty$ et $Re(\alpha) > 0$.*

Le résultat principal de ce papier est le suivant:

THÉORÈME 2.4. *Pour $t > 0$ et $4/3 < p \leq +\infty$ on a:*

(1) $A_t = \pi^{1/2}(e^t - 1)e^{t/2} T_t^{1/2}$;

(2) $\|A_t(f)\|_p \leq c(e^t - 1)e^{t/2}\|f\|_p$, *où c est une constante indépendante de t;*

(3) $\lim_{t\to 0^+} A_t f(z)/t = f(z)$ *p.p. La convergence a en lieu aussi dans L^p sì en plus $p < \infty$.*

Preuve: Pour (1) on utilise la Remarque 2.1 et le Théorème 2.2. (2) et (3) découlent immédiatement du Lemme 2.3 et du Théorème 3.12, p. 60 [9].

RÉFÉRENCES

[1] CLARK, J.L., STEIN, E., L^p-multipliers for non-compact symmetric spaces, *Proc. Acad. Sci. U.S.A.,* **71** (1971), 3911–3912.

[2] COIFMAN, R.R., WEISS, G., "Transference Methods in Analysis", CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 31. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.

[3] EL KOHEN, A., Maximal operators on hyperboloids, *J. Operator Theory,* **3** (1980), 41–56.

[4] ERDELYI, A., "Higer Transcendeltal Functions. Vol. I", Mc. Graw-Hill, New-York, 1953.

[5] HELGASON, S., "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces", Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, New York-London, 1978.

[6] HELGASON, S., "Groups and Geometric Analysis, Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions", Pure and Applied Mathematics, 113. Academic Press, Inc., Orlando, Fla., 1984.

[7] LANG, S., "$SL_2(\mathbb{R})$", Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts-London-Amsterdam, 1975.

[8] SADIKY, H., "Equations des Ondes sur le Demi-Plan de Poincaré", Thèse, Univ. de Fes, Maroc, 1990.

[9] STEIN, E.M., WEISS, G., "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton Mathematical Series, 32. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.

[10] STEIN, E.M., Maximal functions: Spherical means, Part I, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,* **73** (1976), 2174–2177.

[11] TERRAS, A., Non-euclidean harmonic analysis, *SIAM Rev.,* **24** (1982), 159–193.

[12] VILENKIN, N., "Special Functions and the Theory of Group Representation", Transl. Math. Monogr., 22. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.