EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **12**, Núm. 1, 1 – 13 (1997)

Caractérisation de la Dérivabilité des Fonctions à partir de la Dérivée Directionnelle

K. Allali et A. Taa

Département de Mathématiques, Fac. des Sciences et Techniques de Settat, B.P. 577, Settat, Maroc

Département de Mathématiques, Fac. des Sciences et Techniques de Marrakech, B.P. 618, Marrakech, Maroc

(Research paper presented by P.L. Pappini)

AMS *Subject Class.* (1991): 49J52, 49K27, 90C30 *Received January* 18, 1996

Introduction.

Soit f une fonction localement lipshitzienne d'un espace vectoriel normé X dans $\mathbb{R}$ et soient $\bar{x}, \bar{y} \in X$.

J.M. Borwein, S.P. Fitzpatrick et J.R. Giles [1] ont montré que si la norme $\|\cdot\|$ de l'espace X est Gâteaux différentiable en $\bar{y}$ avec $\|\bar{y}\| = 1$ et si la dérivée directionnelle usuelle de f en $\bar{x}$ suivant la direction $\bar{y}$ existe et est égale à la constante $p(\bar{x}) := \sup_{\|y\|=1} f^{\square}(\bar{x}; y)$ avec

$$f^{\square}(\bar{x}; y) = \sup_{z \in X} \limsup_{t \to 0+} \frac{f(\bar{x} + tz + ty) - f(\bar{x} + tz)}{t},$$

alors f est Gâteaux différentiable en $\bar{x}$. Un résultat similaire assurant la Fréchet-différentiabilité de f avait été prouvé antérieurement par S.P. Fitzpatrick [6].

Dans ce travail nous allons étendre le résultat précédent au cas de la e-dérivée directionnelle généralisée introduite dans la section 1. Ceci fournira en même temps une approche unifiée des résultats précédents et également des conditions (en termes du sous-différentiel de Clarke) assurant la stricte différentiabilité de f. Nous allons montrer que si la norme $\|\cdot\|$ est Gâteau différentiable en $\bar{y}$ avec $\|\bar{y}\| = 1$ et si

$$\lim_{(t,x) \overset{e}{\to} (0+, \bar{x})} \frac{f(x + t\bar{y}) - f(x)}{t}$$

existe et est égale à $e_f(\bar{x})$ où $e_f(\bar{x}) := \sup_{\|y\|=1} f^e(\bar{x};\cdot)$ (voir section 3), alors la e-dérivée directionnelle généralisée $f^e(\bar{x};\cdot)$ est linéaire continue et donc $\partial^e f(\bar{x})$ est un singleton.

Dans la section 1 nous rappelons la notion de la e-convergence [11], la dérivée directionnelle usuelle $f'(\bar{x};\cdot)$ (respectivement la dérivée directionnelle généralisée $f^0(\bar{x};\cdot)$ de Clarke) et le sous-différentiel d'une fonction convexe (respectivement le sous-différentiel généralisée de Clarke).

En suivant J.P. Penot [11] nous définissons la e-dérivée directionnelle généralisée $f^e(\bar{x};\cdot)$ de f qui est une extension de la dérivée directionnelle généralisée de Clarke [2] et la e-sous-différentiel $\partial^e f(\bar{x})$ en $\bar{x}$. Dans la section 2 nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que $\partial^e f(\bar{x})$ soit un singleton. Dans la section 3, nous établissons que si f est une - fonction lipschitziennne autour de $\bar{x}$ et si la norme $\|\cdot\|$ de X est Gâteaux différentiable en $\bar{y}$ avec $\|\bar{y}\| = 1$ et si de plus

$$\lim_{(t,x)\xrightarrow{e}(0+,\bar{x})} \frac{f(x+t\bar{y}) - f(x)}{t}$$

existe et est égale à $e_f(\bar{x})$ alors $\partial^e f(\bar{x})$ est un singleton c'est-à-dire f est e-différentiable en $\bar{x}$. Il découle alors de ce résultat que si la norme est Gâteaux différentiable en $\bar{y}$ avec $\|\bar{y}\| = 1$ et si $\partial^e f(\bar{x})\bar{y} = e_f(\bar{x})$ alors $\partial^e f(\bar{x})$ est un singleton.

1. Notations et Preliminaires

Dans toute la suite on désignera par X un espace vectoriel normé et par X^* son dual topologique. Suivant J.P. Penot, pour $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,+\infty[\times X$ et $\bar{x} \in X$ on considère une notion de convergence notée e où $(t_n, x_n) \xrightarrow{e} (0,\bar{x})$ satisfait les propriétés suivantes:

i) $(t_n, x_n) \longrightarrow (0,\bar{x})$ au sens usuel.

ii) Pour tout réel r on a:

$$(rt_n, x_n) \xrightarrow{e} (0,\bar{x}).$$

iii) $(t_n, x_n) \xrightarrow{e} (0,\bar{x})$ implique que

$$(t_n, x_n + t_n y) \xrightarrow{e} (0,\bar{x})$$

pour tout $y \in X$.

iv) $(s_n, \bar{x}) \xrightarrow{e} (0, \bar{x})$ pour toute suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $]0, +\infty[$ qui converge vers zéro.

EXEMPLES. 1) $(t_n, x_n) \xrightarrow{c} (0, \bar{x})$ ssi $(t_n, \bar{x}) \longrightarrow (0^+, \bar{x})$ au sens usuel.

2) $(t_n, x_n) \xrightarrow{b} (0, \bar{x})$ ssi $(t_n, \bar{x}) \longrightarrow (0^+, \bar{x})$ et la suite $(t_n^{-1}(x_n - \bar{x}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3) $(t_n, x_n) \xrightarrow{p} (0, \bar{x})$ ssi $(t_n, \bar{x}) \longrightarrow (0^+, \bar{x})$ et $(t_n^{-1}(x_n - \bar{x}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de la norme dans X.

Il est facile de voir que c, b et p vérifient les propriétés i), ii), iii) et iv).

Pour toute application $(t, x) \longrightarrow f(t, x)$ nous poserons

$$\lim_{(t,x)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})} f(t, x) = \lambda$$

si pour toute suite $(t_n, x_n) \xrightarrow{e} (0, \bar{x})$ la suite image $(f(t_n, x_n))_n$ converge vers λ.

Nous commençons par rappeler quelques définitions. Soient f une fonction de X dans $\mathbb{R}$ et $\bar{x} \in X$. Si f est convexe on définit la dérivée directionnelle de f en $\bar{x}$ dans la direction de y, par la limite suivante notée $f'(\bar{x}; y)$:

$$f'(\bar{x}; y) = \lim_{t\to 0^+} t^{-1}[f(\bar{x} + ty) - f(\bar{x})].$$

On peut ainsi définir le sous-différentiel de f en $\bar{x}$ par

$$\partial f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \colon f'(\bar{x}; y) \geq \langle x^*, y\rangle, \text{ pour tout } y \in X\}.$$

Si f est localement lipschitzienne en $\bar{x}$, la dérivée directionnelle généralisée de Clarke est définie par

$$\limsup_{x\to\bar{x},\, t\to 0^+} t^{-1}[f(x + tv) - f(x)].$$

On la note $f^0(\bar{x}; v)$, et le sous-différentiel associé est défini par

$$\partial^0 f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \colon f^0(\bar{x}; y) \geq \langle x^*, y\rangle \text{ pour tout } y \in X\}.$$

Si $\lim_{t\to 0^+} t^{-1}[f(\bar{x} + ty) - f(\bar{x})]$ existe et est linéaire continue en y, on dit que f est Gateaux différentiable en $\bar{x}$.

Reprenant J.P. Penot [11] nous définissons la e-dérivée directionnelle généralisée comme suit:

DÉFINITION 1.1. (J.P. Penot [11]) Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$ lipschitzienne autour de $\bar{x} \in X$ (c'est-à-dire il existe un ouvert Ω contenant $\bar{x}$ et un réel $k > 0$ tels que

$$|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega).$$

On appelle e-dérivée directionnelle généralisée la fonction notée $f^e(\bar{x}; \cdot)$ définie par

$$f^e(\bar{x}; y) = \sup\{\limsup t_n^{-1}[f(x_n + t_n y) - f(x_n)] \colon (t_n, x_n) \xrightarrow{e} (0, \bar{x})\}$$

pour tout $y \in X$.

Evidemment la e-dérivée directionnelle généralisée est une extension de la dérivée directionnelle généralisée de F.H. Clarke [2].

Rappelons les propriétés suivantes de la e-dérivée directionnelle généralisée.

PROPOSITION 1.2. ([3],[11]) *Soit f une fonction lipschitzienne autour d'un point $\bar{x}$ de X. Alors*

i) $f^e(\bar{x}; y) \in \mathbb{R}$ *pour tout* $x \in X$.

ii) $f^e(\bar{x}; \cdot)$ *est sous-linéaire.*

iii) $f^e(\bar{x}; \cdot)$ *est lipschitzienne sur* X.

Remarques 1.3. Soit f une application localement lipschitzienne en $\bar{x} \in X$. Les propriétés suivantes sont vérifiées:

i) Si $e = c$, alors $f^e(\bar{x}; \cdot)$ coincide avec la dérivée directionnelle de F.H Clarke [2].

ii) Si $e = b$, alors (voir [3])

$$f^e(\bar{x}; y) = \sup_{r>0} \limsup_{(t,x)\to(0^+,\bar{x}),\, t^{-1}\|x-\bar{x}\|\leq r} t^{-1}[f(x + ty) - f(x)].$$

iii) Si $e = p$, alors (voir [3])

$$f^e(\bar{x}; y) = \sup_{h\in X} \limsup_{t\to 0^+} t^{-1}[f(\bar{x} + th + ty) - f(\bar{x} + th)].$$

Examinons le cas où f est convexe.

PROPOSITION 1.4. *Soit f une fonction convexe et continue en un point $\bar{x} \in X$. Alors f est lipschitzienne autour de $\bar{x}$ et*

$$f'(\bar{x}; y) = f^e(\bar{x}; y) = f^0(\bar{x}; y)$$

pour tout $y \in X$.

Preuve. Comme f est convexe et continue en $\bar{x}$, f est localement lipschitziennne et la dérivée directionnelle $f'(x; \cdot)$ existe. Par définition de $f^e(\bar{x}; \cdot)$ et $f^0(\bar{x}; \cdot)$ nous avons pour tout $y \in X$

$$f'(\bar{x}; y) \leq f^e(\bar{x}; y) \leq f^0(x; y). \tag{1}$$

Or nous avons par Clarke [2] que, puisque f est convexe et continue en $\bar{x}$, $f'(\bar{x}; \cdot) = f^0(\bar{x}; \cdot)$. Ainsi la double inégalité (1) devient une double égalité. ∎

Nous allons maintenant toujours, en suivant J.P. Penot [11], définir le e-sous-différentiel d'une fonction localement lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$ comme suit

DÉFINITION 1.5. Soit f une fonction localement lipschitzienne autour d'un point $\bar{x}$ de X. On appelle e-sous-différentiel de f en $\bar{x}$ le sous ensemble noté $\partial^e f(\bar{x})$ de X^* et défini par

$$\partial^e f(\bar{x}) = \{x^* \in X \colon \langle x^*, y\rangle \leq f^e(\bar{x}; y),\ \forall y \in X\}.$$

On remarque que $\partial^e f(\bar{x})$ au sens ci-dessus coincide avec le sous-différentiel de f en $\bar{x}$ au sens de l'analyse convexe quand f est convexe et continue en $\bar{x}$ et que l'on a toujours $\partial^e f(\bar{x}) \subset \partial^0 f(\bar{x})$ pour toute fonction lipschitzienne autour de $\bar{x}$.

Remarque 1.6. En utilisant la sous-linéarité de la fonction $f^e(\bar{x}; \cdot)$ nous pouvons écrire le e-sous-différentiel de f en $\bar{x}$ sous la forme suivante:

$$\partial^e f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \colon\ -f^e(\bar{x}; -y) \leq \langle x^*, y\rangle \leq f^e(\bar{x}, y),\ \forall y \in X\}.$$

Remarque 1.7. Pour tout $y \in X$ et pour tout α vérifiant

$$-f^e(\bar{x}; -y) \leq \alpha \leq f^e(\bar{x}; y)$$

il existe $x^* \in \partial^e f(\bar{x})$ tel que

$$\langle x^*, y\rangle = \alpha.$$

Rappelons également les très importantes propriétés suivantes de la e-dérivée directionelle généralisée.

PROPOSITION 1.8. ([11]) *Soit f une fonction k-lipschitzienne autour d'un point $\bar{x}$ de X. Alors:*

i) *$\partial^e f(\bar{x})$ est non vide, *-faiblement compact et*

$$\partial^e f(\bar{x}) \subset \bar{B}(0,k).$$

ii) *$f^e(\bar{x};y) = \max\{\langle x^*, y\rangle : x^* \in \partial^e f(\bar{x})\}$ pour tout $y \in X$.*

Nous allons maintenant donner quelques règles de calcul pour le e-sous-différentiel généralisé.

PROPOSITION 1.9. ([11]) *Soit f est une fonction lipschitzienne autour d'un point $\bar{x}$ de X. Alors pour tout réel λ la fonction λf est lipschitzienne autour de $\bar{x}$ et les propriétés suivantes sont vérifiées*

i) *$(\lambda f)^e(\bar{x};y) = f^e(\bar{x};\lambda y)$ pour tout $y \in X$.*

ii) *$\partial^e(\lambda f)(\bar{x}) = \lambda \partial^e f(\bar{x})$ où $\lambda\partial^e f(\bar{x}) = \{\lambda x^* : x^* \in \partial^e f(\bar{x})\}$.*

2. CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE $\partial^e f(\bar{x})$ SOIT UNIVOQUE

Nous allons maintenant donner quelques conditions nécessaires et (ou) suffisantes pour que $\partial^e f(\bar{x})$ soit un singleton.

THÉORÈME 2.1. *Soient $\bar{x}, \bar{y} \in X$, et f est une fonction lipschitzienne autour de $\bar{x}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *$\partial^e f(\bar{x})(\bar{y})$ est un singleton.*

ii) *$f^e(\bar{x};-\bar{y}) = -f^e(\bar{x};\bar{y})$.*

iii) *$\lim_{(t,x)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})} t^{-1}[f(x+t\bar{y}) - f(x)]$ existe (dans ce cas elle est égale au singleton $\partial^e f(\bar{x})(\bar{y})$).*

Preuve. D'après les Remarques 1.6 et 1.7, les relations (i) et (ii) sont équivalentes. Montrons que (i) et (iii) sont équivalentes.

i) implique ii): Ecrivons

$$\begin{aligned}
&\inf\{\liminf t_n^{-1}[f(x_n+t_n\bar{y})-f(x_n)];\ (t_n,x_n)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})\}\\
&\quad=-\sup\{\limsup t_n^{-1}[f(x_n)-f(x_n+t_n\bar{y})];\ (t_n,x_n)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})\}\\
&\quad\geq-\sup\{\limsup t_n^{-1}[f(x_n)-f(x_n-t_n\bar{y})];\ (t_n,x_n)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})\}\\
&\quad=-f^e(\bar{x};-\bar{y})\\
&\quad=\partial^e f(\bar{x})(\bar{y})\quad\text{(d'après i) et la Remarque 1.7)}\\
&\quad=f^e(\bar{x};\bar{y}),
\end{aligned}$$

ce qui entraine que i) implique iii).

iii) implique i):

Supposons que

$$\lambda := \lim_{(t,x)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})} t^{-1}[f(x+t\bar{y})-f(x)] \tag{3}$$

existe. Soit $x^* \in \partial^e f(\bar{x})$; alors d'après la Remarque 1.6

$$-f^e(\bar{x};-\bar{y}) \leq \langle x^*,\bar{y}\rangle \leq f^e(\bar{x};\bar{y}). \tag{4}$$

Or d'après l'existence de la limite définissant le nombre λ, on a

$$f^e(\bar{x};\bar{y})=\sup\{\limsup t_n^{-1}[f(x_n+t_n\bar{y})-f(x_n)]\colon (t_n,x_n)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})\}=\lambda$$

et

$$-f^e(\bar{x};-\bar{y})=-\sup\{\limsup t_n^{-1}[f(x_n-t_n\bar{y})-f(x_n)]\colon (t_n,x_n)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})\}.$$

Mais d'après la condition iii) de la définition de la e-convergence et d'après l'hypothèse iii) du Théorème, pour toute suite $(t_n,x_n)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})$ on a,

$$t_n^{-1}[f(x_n-t_n\bar{y})-f(x_n)]=-(t_n^{-1}[f((x_n-t_n\bar{y})+t_n\bar{y})-f(x_n-t_n\bar{y})]$$

et cette dérnière suite converge vers $-\lambda$. Ainsi $-f^e(\bar{x};-\bar{y})=\lambda=f^e(\bar{x};\bar{y})$ et donc, d'après la relation (4), $\partial^e f(\bar{x})(\bar{y})=\lambda$, ce qui termine la preuve du théorème. ∎

Remarque 2.2. L'argument utilisé à la fin de la preuve fait voir que

$$\lim_{(t,x)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})} t^{-1}[f(x+ty)-f(x)]$$

existe ssi

$$\lim_{(t,x)\xrightarrow{e}(0,\bar{x})} t^{-1}[f(x-ty)-f(x)]$$

existe et dans ce cas ces deux limites sont opposées.

Comme conséquence directe on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.3. *$\partial^e f(\bar{x})$ est un singleton si et seulement si pour tout $y \in X$ on a*

$$\lim_{(t,x)\overset{e}{\to}(0,\bar{x})} t^{-1}[f(x+ty)-f(x)]$$

existe.

3. LA e-DIFFERENTIABILITÉ DES FONCTIONS À L'AIDE DE LA e-CONSTANTE DE LIPSCHITZ MODIFIÉE.

Pour une fonction f de X dans $\mathbb{R}$ localement lipschitzienne autour de $\bar{x} \in X$ on définit la e-constante de Lipschitz de f en $\bar{x}$ de la manière suivante

$$e_f(\bar{x}) := \sup_{\|y\|=1} f^e(\bar{x}; y).$$

LEMME 3.1. *Soit f une fonction lipschitzienne autour de $\bar{x} \in X$. Alors la constante $e_f(\bar{x})$ définie précédemment s'écrit sous la forme suivante*

$$e_f(\bar{x}) = \sup\{\|x^*\| : x^* \in \partial^e f(\bar{x})\}.$$

Donnons une autre expression de la e-constante de Lipschitz qui nous servira par la suite.

LEMME 3.2. *Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$ localement lipschitzienne autour de $\bar{x} \in X$. Alors*

$$e_f(\bar{x}) = \sup_{\|y\|=1} |f^e(\bar{x}; y)|.$$

Nous pouvons maintenant établir le résultat principal dont la preuve est en partie inspirée de J.M. Borwein, S.P. Fitzpatrick et J.P. Giles [1].

THÉORÈME 3.3. *Soit f une fonction lipschitzienne autour de $\bar{x} \in X$. Supposons qu'il existe $\bar{y}$ de norme 1 tel que la norme soit Gâteaux différentiable en $\bar{y}$ et de dérivée $\Phi_{\bar{y}}$. Si de plus*

$$\lim_{(t,x)\overset{e}{\to}(0,\bar{x})} t^{-1}[f(x+t\bar{y})-f(x)] = e_f(\bar{x}),$$

alors

$$f^e(\bar{x}; \cdot) = e_f(\bar{x})\Phi_{\bar{y}}$$

et $\partial^e f(\bar{x})$ est un singleton.

Preuve. Soient $y \in X$ avec $\|y\| = 1$, $\epsilon > 0$ et $(t_n, x_n) \xrightarrow{e} (0, \bar{x})$. Par hypothèse il existe $\gamma \in]0, 1[$ tel que

$$|\lambda^{-1}[\|\bar{y} + \lambda y\| - \|\bar{y}\|] - \langle \Phi_{\bar{y}}, y \rangle| < \epsilon,$$

pour tout λ verifiant $0 < |\lambda| \leq \gamma$ et donc en particulier

$$\|\bar{y} + \gamma y\| - \|\bar{y}\| - \gamma \langle \Phi_{\bar{y}}, y \rangle| < \epsilon\gamma. \tag{1}$$

De plus d'après l'hypothèse et d'après la Remarque 2.2 il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$|t_n^{-1}[f(x_n - t_n\bar{y}) - f(x_n) + e_f(\bar{x})]| \leq \epsilon\gamma. \tag{2}$$

Ecrivons

$$f(x_n + t_n\gamma y) - f(x_n - t_n\bar{y}) = f(x_n + t_n(-\bar{y}) + t_n(\bar{y} + \gamma y)) - f(x_n + t_n(-\bar{y})).$$

Il découle de la définition de $e_f(\bar{x})$ qu'il existe un entier $n_1 > 0$ tel que

$$f(x_n + t_n\gamma y) - f(x_n - t_n\bar{y}) \leq e_f(\bar{x})\|\bar{y} + \gamma y\|t_n + \epsilon\gamma t_n \tag{3}$$

pour tout $n \geq n_1$. On obtient alors d'après (2) et (3)

$$\begin{aligned} f(x_n + t_n\gamma y) - f(x_n) &= f(x_n + t_n\gamma y) - f(x_n - t_n\bar{y}) + f(x_n - t_n\bar{y}) - f(x_n) \\ &\leq e_f(\bar{x})\|\bar{y} + \gamma y\|t_n + 2\epsilon\gamma t_n - e_f(\bar{x})\|\bar{y}\|t_n, \end{aligned}$$

pour tout $n \geq n_2 := \max(n_0, n_1)$. Ainsi pour $n \geq n_2$ on a

$$t_n^{-1}[f(x_n + t_n\gamma y) - f(x_n)] \leq e_f(\bar{x})[\|\bar{y} + \gamma y\| - \|\bar{y}\|] + 2\epsilon\gamma,$$

et donc d'après (1) on a

$$\gamma^{-1}t_n^{-1}[f(x_n + t_n\gamma y) - f(x_n)] \leq e_f(\bar{x})\langle \Phi_{\bar{y}}, y \rangle + (e_f(\bar{x}) + 2)\epsilon.$$

Par suite on a

$$\limsup(\gamma t_n)^{-1}[f(x_n + t_n\gamma y) - f(x_n)] \leq e_f(\bar{x})\langle \Phi_{\bar{y}}, y \rangle + (e_f(\bar{x}) + 2)\epsilon,$$

et donc

$$f^e(\bar{x}, y) \leq e_f(\bar{x})\langle \Phi_{\bar{y}}, y \rangle + (e_f(\bar{x}) + 2)\epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient

$$f^e(\bar{x}; y) \leq e_f(\bar{x})\langle \Phi_{\bar{y}}, y \rangle.$$

Comme $f^e(\bar{x}; \cdot)$ est sous-linéaire il en découle que

$$f^e(\bar{x}; \cdot) = e_f(\bar{x})\Phi_{\bar{y}},$$

et donc

$$\partial^e f(\bar{x}) = \{e_f(\bar{x})\Phi_{\bar{y}}\}.$$

∎

COROLLAIRE 3.4. *Soit f une fonction localement lipschitzienne autour de $\bar{x} \in X$. Supposons qu'il existe $\bar{y} \in X$ de norme 1 tel que la norme soit Gâteaux différentiable en $\bar{y}$ et de dérivée $\Phi_{\bar{y}}$. Si de plus*

$$\partial^e f(\bar{x})(\bar{y}) = \{e_f(\bar{x})\},$$

alors $f^e(\bar{x}; \cdot) = e_f(\bar{x})\Phi_{\bar{y}}$ et $\partial^e f(\bar{x})$ est un singleton.

Preuve. Comme $\partial^e f(\bar{x})(\bar{y}) = \{e(\bar{x})\}$ alors d'après ii) du Théorème 2.1 on a

$$\lim_{(t,x) \xrightarrow{e} (0,\bar{x})} t^{-1}[f(x + t\bar{y}) - f(x)] = e_f(\bar{x})(x).$$

Ainsi par application du Théorème 3.3 on obtient le résultat du corollaire. ∎

Ce Corollaire 3.4 suggère d'étudier aussi le cas où dans l'hypothèse du Corollaire 3.4 on remplace $\partial^e f(\bar{x})(\bar{y})$ par la dérivée directionnelle usuelle (bien que $\partial^e f(\bar{x})$ ne soit pas dans ce cas un singleton).

THÉORÈME 3.5. *Soit f une fonction localement lipschitzienne autour de $\bar{x} \in X$. Supposons qu'il existe $\bar{y}$ de X de norme 1 tel que la norme soit Gâteaux-différentiable en $\bar{y}$ de dérivée $\phi_{\bar{y}}$. Si de plus*

$$\lim_{t \to 0^+} t^{-1}[f(\bar{x} + ty) - f(\bar{x})] = e_f(\bar{x}),$$

alors

$$e_f(\bar{x})\phi_{\bar{y}} \in \partial^e f(\bar{x}).$$

Preuve. Soient $\epsilon > 0$, $y \in X$, $\|y\| = 1$ et $t_n \to 0^+$. Par hypothèse il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\big| \|\bar{y} - \gamma y\| - \|\bar{y}\| + \gamma \langle \phi_{\bar{y}}, y \rangle \big| < \epsilon\gamma. \tag{0}$$

De plus il existe un entier $n_0 > 0$ tel que

$$|f(\bar{x} + t_n \bar{y}) - f(\bar{x}) - t_n e_f(\bar{x})| \leq \epsilon\gamma t_n, \tag{1}$$

pour $n \geq n_0$. Par définition de $f^e(\bar{x}; y)$ il existe un entier $n_0' > 0$ tel que

$$t_n^{-1}[f(\bar{x} + t_n \gamma y) - f(\bar{x})] \leq f^e(\bar{x}; \gamma y) + \epsilon\gamma \tag{2}$$

pour $n \geq n_0'$.

Ecrivons

$$t_n^{-1}[f(\bar{x} + t_n \gamma y) - f(\bar{x})] = t_n^{-1}[f(\bar{x} + t_n \gamma y) - f(\bar{x} + t\bar{y})] + t_n^{-1}[f(\bar{x} + t_n \bar{y}) - f(\bar{x})].$$

D'une part, pour $x_n := \bar{x} + t_n \bar{y}$ on a $(t_n, x_n) \xrightarrow{e} (o, \bar{x})$ (d'après la propriété (iii) sur la e-convergence) et donc il existe un entier n_0'' tel que pour tout entier $n \geq n_0''$

$$\begin{aligned} t_n^{-1}[f(\bar{x} + t_n \gamma y) - f(\bar{x} + t_n \bar{y})] &= t_n^{-1}[f(x_n + t_n(-\bar{y} + \gamma y)) - f(x_n)] \\ &\geq -f^e(\bar{x}; -\bar{y} + \gamma y) - \epsilon\gamma \\ &\geq -e_f(\bar{x}) \|\bar{y} - \gamma y\| - \epsilon\gamma \end{aligned}$$

(d'après la définition de $e_f(\bar{x})$). D'autre part d'après (1) on a

$$t_n^{-1}[f(\bar{x} + t_n \bar{y}) - f(\bar{x})] \geq e_f(\bar{x}) - \epsilon\gamma,$$

pour tout $n \geq n_0$. Si l'on pose $n_3 = \max(n_0, n_0', n_0'')$ alors pour tout $n \geq n_3$ on a

$$\begin{aligned} t_n^{-1}[f(\bar{x} + t_n \gamma y) - f(\bar{x})] &\geq -e_f(\bar{x}) \|\gamma y - \bar{y}\| - 2\epsilon\gamma + e_f(\bar{x}) \\ &= e_f(\bar{x})[\|\bar{y}\| - \|\gamma y - \bar{y}\|] - 2\epsilon\gamma \end{aligned}$$

(car $\|y\| = 1$)

$$\begin{aligned} &\geq e_f(\bar{x})[-\epsilon\gamma + \gamma \langle \phi_{\bar{y}}, y \rangle] - 2\epsilon\gamma \\ &= \gamma e_f(\bar{x}) \langle \phi_{\bar{y}}, y \rangle - (e_f(\bar{x}) + 2)\epsilon\gamma. \end{aligned}$$

Ainsi tenant compte de (2) on obtient

$$f^e(e_f(\bar{x});\gamma y) + e\gamma \geq \gamma e_f(e_f(\bar{x}))\langle \phi_{\bar{y}}, y\rangle - \epsilon\gamma(e_f(\bar{x}) + 2)$$

ce qui implique que

$$f^e(\bar{x};y) + \epsilon \geq e_f(\bar{x})\langle \phi_{\bar{y}}, y\rangle - \epsilon(e_f(\bar{x}) + 2)$$

puisque $f^e(\bar{x};\cdot)$ est positivement homogène. Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ on obtient

$$f^e(\bar{x};y) \geq e_f(\bar{x})\langle \phi_{\bar{y}}, y\rangle$$

et donc, $f^e(\bar{x};\cdot)$ étant positivement homogéne, il suit que

$$e_f(\bar{x})\phi_{\bar{y}} \in \partial^e f(\bar{x}).$$

∎

4. Condition de regularité.

Nous allons terminer en donnant une condition simple assurant que $\partial^e f(\bar{x}) = \partial^0 f(\bar{x})$. Le lecteur peut combiner ce résultat avec les précédents pour donner des conditions à l'aide de ∂^e ou f^e qui impliquent la stricte différentiabilité de f.

Théorème 4.1. *Soit f une fonction localement lipschitzienne autour de $\bar{x} \in X$. Supposons que l' hypothése de regularité suivante est vérifiée: pour tout y dans X on a*

$$\liminf_{(t,x)\xrightarrow{e}(0^+,\bar{x})} t^{-1}[f(x+ty) - f(x)] \leq \liminf_{(t,x)\to(0^+,\bar{x})} t^{-1}[f(x+ty) - f(x)].$$

Alors

$$\partial^e f(\bar{x}) = \partial^0 f(\bar{x}).$$

Preuve. La preuve se déduit directement de la définition de $f^e(\bar{x},\cdot)$ et de celle de $f^0(\bar{x},\cdot)$. ∎

Remarque 4.2. Si l'on suppose qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout y dans X

$$\liminf_{(t,x)\to(0^+,\bar{x}),\, t^{-1}\|x-\bar{x}\|\leq r} t^{-1}[f(x+ty) - f(x)] \leq \liminf_{(t,x)\to(0^+,\bar{x})} t^{-1}[f(x+ty) - f(x)]$$

on obtient

$$(-f)^b(\bar{x}; y) = (-f)^0(\bar{x}; y)$$

et par suite

$$\partial^b f(\bar{x}) = \partial^0 f(\bar{x}).$$

Remerciements

Nous remercions le référé et les professeurs L. Thibault et J.P. Penot de leurs suggestions.

Références

[1] Borwein, J.M., Fitzpatrick, S.P., Giles, J.R., The Differentiability of Real Functions on Normed Space Using Generalized Subgradients, *Journal of Mathematical Analysis,* **128** (1987), 512–534.

[2] Clarke, F.H., "Optimization and Nonsmooth Analysis", Canadian Math. Soc. Series, Wiley, New York, 1983.

[3] El Abdouni, B., Thibault, L., Quasi-interiorly e-tangent cones to multifunctions, *Numer. Fun. Anal. and Optimiz.,* **10** (7& 8) (1989), 619–641.

[4] Ekeland, I., Nonconvex Minimization Problems, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.),* **1** (1979), 443–474.

[5] Fabian, M., Zhikov, N.V., A characterization of Asplund Spaces with the help of local e-supports of Ekeland and Lebourg, *C. R. Acad. Bulgare Sci.,* **38** (1985), 671–674.

[6] Fitzpatrick, S., Metric projections and the differentiability of distance functions, *Bull. Austral. Math. Soc.,* **22** (1980), 291–312.

[7] Fitzpatrick, S., Differentiation of real- valued functions and continuity of metric projections, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **91** (1984), 544–548.

[8] Giles, J.R., "Convex analysis with application in differentiation of convex functions", Res. Notes in Math., 58, Pitman, London, 1982.

[9] Lebourg, G., Valeur moyenne pour gradient généralisé, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **281** (1975), 795–797.

[10] Michel, P., Penot, J.P., A generalised derivative for calm and stable functions, *Differential and Integral Equations,* **2** (5), (1992), 433–454.

[11] Penot, J.P., Variations on the theme of nonsmooth analysis: another subdifferential, in "Nondifferentiable optimization: Motivations and Applications", (V.F. Demyanov and D. Pallaschke, ed.), Lectute Notes in Economics and Math. System, Vol. 225, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 41–54.

[12] Preiss, D., Gâteaux differentiable functions are somewhere Fréchet differentiable, *Rend. Circ. Math. Palermo,* **33** (2), (1984), 122–133.

[13] Zajicek, L., Differentiability of the distance function and points of multivaluedness of the metric projection in Banach space, *Czechoslovak Math. J.,* **33** (1983), 292–308.