LLULL, *vol. 29, 2006, 357-375*

LAS REFLEXIONES DE FRAY MARTÍN SARMIENTO SOBRE LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

UXÍO PÉREZ RODRÍGUEZ, MARÍA ÁLVAREZ LIRES
Universidade de Vigo
PAULO PORTA MARTÍNEZ
IES Arcebispo Xelmírez I – Santiago de Compostela

RESUMEN

En este artículo se sacan a la luz los estudios que el ilustrado español Fray Martín Sarmiento (1695-1772) realizó sobre un problema clásico de la Geometría, el de la Cuadratura del Círculo. Se detallan los conocimientos que poseía sobre el tema y se describen dos soluciones muy precisas que propuso para el problema.

ABSTRACT

This essay brings to light the studies carried out by the Spanish enlightened Fray Martín Sarmiento (1695-1772) on the classical geometrical problem known as the Squaring of the Circle. Thus, his knowledge of the topic is first described and then two very precise solutions he gave to the problem are offered.

Palabras clave: Ilustración Española, Geometría, Historia de las Matemáticas, Pi, Cuadratura del Círculo.

Key words: Spanish Enlightenment, Geometry, History of Mathematics, Pi, Squaring of the Circle.

Si une manie, j´ai presque dit si une fureur, qui se manifeste surtout au printemps, comme l´expérience l´a prouvé, pouvait jamais être justiciable de la logique, il faudrait, pour la combattre avec succès, distinguer plus soigneusement qu´on ne l´a fait jusqu´ici, les aspects divers sous lesquels le problème de la quadrature du cercle doit être envisagé.

FRANÇOIS ARAGO

Recibido el 19 de marzo de 2007
Aceptado el 29 de noviembre de 2007

ISSN 0210-8615

Introducción

El benedictino Fray Martín Sarmiento (1695, Villafranca del Bierzo – 1772, Madrid), figura paradigmática de la Ilustración española[1], fue un hombre de vasta erudición que escribió sobre multitud de temas diferentes: historia natural, pedagogía, matemáticas, lingüística, astronomía, medicina, numismática y un largo etcétera. Entre la miríada de asuntos que ocuparon su tiempo se halló también uno de los problemas matemáticos más famosos de todos los tiempos, el de la cuadratura del círculo.

El enunciado de este problema es breve: dado un círculo, se pide construir un cuadrado de igual área utilizando exclusivamente regla no graduada y compás, empleando para ello un número finito de pasos. Esta cuestión en apariencia inofensiva fue objeto de estudio y debate por parte de matemáticos y no matemáticos desde la Antigua Grecia hasta finales del siglo XIX, cuando se demostró que era irresoluble. Mientras, destacados pensadores como Arquímedes, Wallis o Huygens dedicaron sus esfuerzos a intentar solucionarlo. Sarmiento abordó este problema antes de que se comprobase que no podía resolverse, estudiando muchos de los mejores tratados sobre el tema de que se disponía en su época y proponiendo soluciones aproximadas para él. A diferencia de pensadores más conocidos como Thomas Hobbes o Grégoire de Saint-Vincent, que creyeron haber resuelto el problema, el ilustrado benedictino siempre fue perfectamente consciente de que con las construcciones que él ideó no se obtenía una cuadratura exacta —un cuadrado que tuviese justamente la misma área que el círculo dado—.

Las soluciones que propuso Sarmiento para el problema son, como se mostrará, precisas y elegantes, y merecerían aparecer en cualquier tratado sobre los diferentes acercamientos que se hicieron a lo largo de la historia al problema de la cuadratura. Sin embargo, éste no es el caso. Sólo en unos pocos lugares[2] se hace referencia a que el benedictino se interesó por la cuadratura del círculo, pero sin detallar sus contribuciones al respecto. Por otra parte, el acceso a algunos de los textos necesarios para averiguar los conocimientos que Sarmiento poseía sobre el tema es dificultoso, dado que una gran parte de estas obras no está publicada.

Por lo tanto, se intenta aquí comenzar a enmendar esta situación estudiando los conocimientos de Sarmiento sobre el problema de la Cuadratura del Círculo y las soluciones aproximadas que halló para éste. A lo largo de este artículo se encontrarán varias constantes de la obra sarmentiana que son propias de un ilustrado paradigmático. En este sentido, y como ya se ha señalado, la erudición de Sarmiento es inmensa[3]. En lo que respecta al tema que aquí nos ocupa, sus conocimientos sobre geometría eran notables[4], y ello en una época en la que el gran avance que las matemáticas estaban experimentando en Europa pasaba casi totalmente desapercibido en España[5]. Por otra parte, Sarmiento hizo suyas dos de las concepciones más representativas del movimiento ilustrado, concretamente la preocupación por las aplicaciones prácticas de los conocimientos científico-técnicos y la reflexión acerca de la importancia de transmitir los saberes a la población.

En lo que sigue, en primer lugar se explicarán las matemáticas que hay detrás del problema de la cuadratura, para después pasar a exponer las motivaciones que impulsaron a Sarmiento a abordarlo. Más tarde se analizarán los conocimientos que el benedictino poseía sobre el tema, se detallarán las soluciones aproximadas que propuso y se hará una valoración de éstas.

El problema de la cuadratura

Como ya se ha comentado, el enunciado del problema de la cuadratura del círculo es muy sencillo y por tanto fácilmente comprensible para matemáticos y no matemáticos. Precisamente éste fue un factor decisivo para convertirlo en un tema de estudio tremendamente popular, e infinidad de personas sin suficiente formación matemática lo abordaron y propusieron soluciones —ninguna de ellas definitiva— para él. Por poner algún ejemplo de la situación a la que se había llegado en el siglo XVIII, cabe señalar que la Academia de Ciencias de París, que ofrecía un premio por resolver el problema, optó por retirarlo en 1775 ante la avalancha de cuadraturas que recibía. La Royal Society haría lo mismo unos años después.

Véase, a continuación, una de las descripciones de Sarmiento del problema de la cuadratura[6]:

> «Lo que se busca en este *Misterio*, ès, que se señale una larga *Linea Recta*, que sea igual á toda la circunferencia del *Circulo*, supuesto el Diametro de 2´00000... De ese modo, se sabrà la proporcion que ay entre la *circunferencia*, y el *Diametro* del Circulo. Sabida esa proporcion, ès facil señalar una *Linea Recta*, que sea *Lado*, ó *Raiz quadrada*, de un *Quadrado*, que tenga tanta *Área*, Capacidad y superficie, como contiene en si todo el *Circulo*»[7].

En resumen, para Martín Sarmiento el «Misterio» consiste en que se pide, a partir de un círculo de radio unidad, construir un cuadrado de igual área utilizando sólo regla no graduada y compás. El área de un círculo de diámetro 2, y por tanto radio $r = 1$, es $\pi \cdot 1^2 = \pi$. El cuadrado que se pretende construir tendría también, pues, un área π. Por tanto, el lado del cuadrado con área igual a la del círculo dado sería la raíz cuadrada de este número, $\sqrt{\pi}$. En caso de partir de círculos con radio no unitario R un razonamiento análogo conduciría a que el lado del cuadrado buscado sería $R\sqrt{\pi}$.[8] Así, el método para llevar a cabo la cuadratura que en la cita anterior describe el benedictino consiste en encontrar gráficamente la proporción —aproximada— entre el diámetro y la longitud de la circunferencia, que evidentemente es π, y hallar con ella el lado del cuadrado equivalente[9], $\sqrt{\pi}$.

El problema de la cuadratura del círculo se demostró irresoluble en 1882 al probar el matemático alemán Ferdinand von Lindemann que π es un número trascendente. Los números trascendentes no se pueden construir utilizando sólo regla no graduada y compás en un número finito de pasos.

Las motivaciones de Sarmiento

Cuando Sarmiento decidió abordar el problema de la cuadratura no lo hizo por creer que fuera a ser capaz de solucionarlo. Era consciente de que grandes matemáticos se habían enfrentado a él y habían fracasado en el intento, y en su *Obra de los 660 Pliegos* denominaba a la cuadratura «la Chimera [Quimera] de la Geometría»[10]. En este mismo lugar sostenía que todas las ciencias tenían sus *quimeras*, sus problemas que nadie había sido capaz de resolver y que todo el que quisiera profundizar en esos saberes debería abordar, no tanto para solucionarlos como para aprender en el intento y, si acaso, descubrir nuevos «primores», nuevos teoremas en el caso de la Geometría. «Algo se adelantarà» —decía— «tentando vencer, como *Belerofonte*[11], la Chimera respectiva».

En este caso, el ilustrado gallego-berciano explicaba que el jesuita Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) había descubierto multitud de esos primores al intentar cuadrar el círculo. Creyó haberlo logrado, pero pronto se demostró que no era así. Sin embargo, al hablar sobre el libro en el que Saint-Vincent había realizado sus propuestas, Sarmiento afirmaba lo siguiente[12]:

> «Que importa, que no la huviese hallado [la cuadratura]? Concuerdan todos en que descubrio mil primores Geometricos en este tomo, y que en èl se hallan los fundamentos de la Geometria sublime de los Modernos»[13].

Por lo tanto, una de las motivaciones fundamentales que empujaron a Fray Martín a enfrentarse al misterio de la cuadratura no fue hallar su solución, sino aprender más matemáticas al intentarlo:

> «Yo entré a comvinar lineas mui desengañado, de que havia de hallar la quadratura deseada. Solo tiraba á aproximaciones por linea [geométricas], y si he de hablar claro, mi principal fin era familiarizarme la Trigonometria, y Cyclometria [la ciencia de la medición del círculo], con la inteligencia, y aplicacion de algunos theoremas»[14].

En la cita anterior se observa que Sarmiento decía buscar «aproximaciones» a la solución. Como buen ilustrado, el benedictino se preocupaba por la utilidad de las ciencias, y si no era posible hallar una cuadratura exacta era necesario buscar construcciones aproximadas que fuesen útiles para la práctica. Sabía que se conocían muchas aproximaciones numéricas del valor de π, incluyendo la de Lagny con 127 decimales[15], pero no eran de utilidad para trazar cuadraturas con regla y compás:

> «*Aproximaciones por numeros*, ay infinitas en los *Libros*. Travajo *improvo*; pero de poca, ó ninguna utilidad para la *Practica*»[16].

Sobre los 127 decimales de Lagny, Sarmiento escribía:

> «Cosa de ninguna utilidad, ni expeculativa, ni practica. Si todo el Mundo, hasta el Concavo del Firmamento, se llenase de *Arenitas*; para contarlas todas, todas, sobraria el numero *1, con 50 zeros* [...]. Conque, què se ha de contar con 128 notas [cifras], si con 51, ay para todo lo contable?»[17].

Para él era bastante con unos pocos decimales correctos. El valor de $\frac{\sqrt{0'08} + 6}{2} \approx 3'1414$ le parecía «vastante para la practica». También Metius[18] (1571-1635), «que escrivia para la practica» se contentaba con un valor de $\frac{355}{113} \approx 3'1415929$ (el valor de π es ≈ 3´1415926535…). Para Sarmiento, pues, no era necesario que los matemáticos se esforzaran por buscar más decimales de π, pero sí deberían dedicar su tiempo a hallar construcciones geométricas que permitiesen hacer buenas cuadraturas aproximadas, ya que él no tenía noticia de ninguna demasiado precisa:

> «Pero por *Lineas*, se ha gastado poco [esfuerzo], ó sin fruto. Quiero decir, que hasta ahora, no he leido modo Geometrico, sin salir del *Compas, y Regla*, de tirar una *Linea*, en un Circulo dado, que sea su *Raiz Quadrada* [...], en numeros, que pasen de cinco notas [cuatro decimales correctos]»[19].

Tampoco pedía Sarmiento demasiada precisión, y decía que «Linea que en sus cinco, ó seis *Zifras* primeras no *falsea*, debe pasar por *justisima*, en la *Practica*»[20]. Sin embargo, la mejor construcción geométrica que conocía era la de François Viète (1540-1603), que conducía a un valor de π con sólo tres decimales correctos[21]. Por lo que decía el fraile benedictino, parece que lo que definitivamente le decidió a buscar cuadraturas geométricas más precisas que las existentes en su época fueron los halagos que Ludolph van Ceulen (1540-1610), matemático alemán que ocupó buena parte de su vida en calcular decimales de π, había dedicado al trabajo de Viète:

> «Despues de haver visto, ponderado por Ceulen el imvento, ó apoximacion, practica de Vieta [Viète], me vino el capricho de tentar, promover, y adelantar la dicha aproximacion de Vieta, en algunas notas [cifras]»[22].

Para terminar con este apartado, conviene recalcar que Sarmiento buscaba la utilidad de los conocimientos para todo el género humano, y ello implicaba la necesidad de divulgar la información de manera accesible[23]. Por ello, tras la explicación más técnica, expuso también el problema de la cuadratura con palabras sencillas. Un labrador sólo tendría que rodear una rueda con un hilo y sabría la línea igual a toda la circunferencia de ésta, «qual no la señalarà mas exacta, ni *Vieta*, ni *Ceulen*, ni Monsieur de *Lagny*»[24]. Cortando el hilo a la mitad se conocería la longitud de la semicircunferencia. Después explicaba cómo hallar el lado del cuadrado equivalente a la rueda hallando la media geométrica de la semicircunferencia y el radio.

Una vez detalladas las causas que empujaron a Sarmiento a enfrentarse al problema, es preciso pasar a describir el bagaje de conocimientos de que disponía para abordarlo.

Los conocimientos de Sarmiento

En muchos textos el benedictino demostraba dominar la geometría euclidiana y la trigonometría plana —dos áreas de las matemáticas que es importante conocer para intentar cuadrar el círculo— como se puede apreciar leyendo, entre otros textos, el Volumen 5º de su *Obra de los 660 Pliegos*[25]. Sólo consultando esta obra queda claro que también conocía, por ejemplo, los estudios de Apolonio sobre las cónicas, el método de exhaución, los indivisibles de Cavalieri y muchas otras áreas de las matemáticas. Por el contrario, en su obra no hay casi referencias a muchas de las cuestiones más candentes en su época, como el cálculo diferencial e integral o la combinatoria. Aunque poseía diversos tratados sobre estos últimos temas, como se puede ver en el *Catálogo*[26] de libros que conformaban su biblioteca, no parece ni que tuviese demasiado interés por ellos ni que fueran aspectos que dominara demasiado.

Por lo que respecta a sus conocimientos sobre los intentos que se habían realizado a lo largo de la historia para cuadrar el círculo con regla y compás («aproximaciones por línea») y para hallar aproximaciones numéricas del valor de π («aproximaciones por número»), Sarmiento demuestra conocer bien los trabajos que se realizaron sobre esos temas, tanto los realizados por pensadores bienintencionados como los de charlatanes y gentes sin suficiente dominio de las matemáticas.

Las aproximaciones numéricas

Entre las aproximaciones «por número» que el benedictino conocía se cuentan los trabajos de los ya mencionados Metius, Ceulen y Lagny, pero Fray Martín también mencionaba los de Arquímedes (aprox. 287-212 a.n.e.), Grienberger (1561-1636), Snellius (1580-1626), Wallis (1616-1703), Huygens (1629-1695), Leibnitz (1646-1716), Gregory (1659-1708) y Wolf (1679-1754), autores que se dedicaron a calcular aproximaciones para el valor de π.

En repetidas ocasiones, Sarmiento expresaba su admiración por el método empleado por Arquímedes en *Medida del círculo*[27] para aproximar el valor de π, que consistía en inscribir y circunscribir polígonos regulares en una circunferencia, cuya longitud real estaría comprendida entre la longitud de los dos polígonos. Cuantos más lados tuviesen los polígonos, mejor sería la aproximación obtenida. Siguiendo este procedimiento, y utilizando polígonos de 96 lados, Arquímedes llegó a que el valor de π estaba comprendido entre 3´1408 y 3´1428. Como explicaba Sarmiento, Ceulen, «Laborioso *Aleman*»[28], utilizó el método de Arquímedes, emprendiendo la trabajosa tarea de hacer un cálculo similar pero utilizando polígonos de 60×2^{33} lados[29] para obtener una aproximación del valor de π con 20 decimales correctos[30]. Sarmiento tenía gran confianza en el trabajo de Ceulen, y sostenía que sus números eran un perfecto método para comprobar la bondad de las cuadraturas que se propusiesen:

> «Estos numeros se llaman *Ludolphinos* [por Ludolph van Ceulen]; y estos son el *Lapis Lydius*, ó piedra de toque, para hacer recto juicio de todo genero de *Quadraturas* de *Circulo*, preteritas, presentes, y futuras. Digo en breve, que si la circunferencia, que se deduce, no tiene los numeros Ludolphinos, no ay tal *Quadratura*. Pero podrà haver *aproximacion* mayor, ó menor, segun que la circunferencia deducida se iguala en sus notas a mayor, ó menor numero de las *Ludolphinas*»[31].

Fray Martín utilizó por ejemplo los números de Ceulen para examinar la precisión de la cuadratura de Viète[32]. Con saber las primeras cifras de la aproximación de Ceulen «qualquiera podrà andar por el Mundo desgarrando *quadraturas imaginadas*»[33].

Las aproximaciones geométricas

Como ya se ha anunciado, Sarmiento, como buen ilustrado, tenía especial interés en las aproximaciones que realmente pudiesen utilizarse para la práctica, pero no conocía ninguna que fuese lo suficientemente precisa para su gusto:

> «La aproximacion, por lineas segun lo que hé visto, està mui à los principios. [...] He leido vastantes aproximaciones, practicas, pero ninguna que iguale las *6* notas de *Ceulen*»[34].

La mejor cuadratura que el fraile benedictino conocía era la ya mencionada de Viète, que conducía a un valor de π de 3´14164, con tres decimales correctos. En vida de Sarmiento se había propuesto alguna solución al problema que mejoraba ligeramente la precisión de esta construcción[35], pero quienes escribimos este artículo no tenemos noticia de cuadraturas que la superasen por mucho.

En otro orden de cosas, Sarmiento también conocía otro tipo de trabajos sobre el tema en los que se dejaba de lado la restricción de utilizar sólo regla no graduada y compás. De esta manera era posible cuadrar el círculo, y Sarmiento mencionaba los trabajos al respecto de Dinostrato (aprox. 390-320 a.n.e.), Arquímedes, Ismael Boulliau (1605-1694) y Huygens utilizando líneas no construibles con regla y compás como la cuadratriz y la cicloide.

Solubilidad del problema

Desde el siglo XIX se sabe que el problema de la cuadratura no tiene solución. Sin embargo, a lo largo de la Historia muchos pensadores creyeron que lo habían resuelto. El más popular de todos ellos es el filósofo inglés Thomas Hobbes (1588-1679), quien propuso varias soluciones para el enigma. En un momento en el que ya se disponía de excelentes valores de π como el de Ceulen, Hobbes defendía cuadraturas que conducían a un valor de π de 3´2 o de $\sqrt{10}$ (3´16227…), peores, por ejemplo, que el deducido por Arquímedes dos milenios antes.

En tiempos de Fray Martín se desconocía si existía alguna solución posible, aunque en vista de la cantidad de abordajes previos infructuosos el problema se antojaba realmente complicado. El benedictino lo expresaba así:

> «La Quadratura exacta, y verdadera à no ser imposible, como dixeron algunos, aun està mui escondida entre los posibles»[36].

En cualquier caso, y a pesar de que «aun, no està demonstrado, si es *Posible*, ò *Imposible*»[37], Fray Martín expresaba la posibilidad de que el número π tuviese infinitos decimales, preguntándose por qué «la Linea Circular, ha de ser Comensurable con su Diámetro»[38]. En suma, Sarmiento sostenía que pi podía ser un número irracional:

> «A la verdad, siendo *inconmensurable una Linea recta, con otra recta*; què Misterio abrà, en que una *Linea curva*, sea *inconmensurable, con una Recta?*»[39].

La intuición del benedictino era acertada. En la misma época en que escribía las anteriores líneas, Lambert proporcionaba la primera prueba de que π era irracional.

Las cuadraturas de Sarmiento

Fray Martín se interesó ya por la geometría siendo mozo, como explicaba en la *Obra de los 660 Pliegos*[40]. Fue así como tropezó «con muchas curiosidades, dentro de ese grande Oceano del Circulo»[41]. Entre estas curiosidades se contaban las cuadraturas que consiguió idear. En sus textos, por desgracia, sólo da cuenta de dos de ellas (las que se describen aquí), pero sostenía que además había encontrado muchas otras:

> «Después [que] tropezè con otras muchas aproximaciones en 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 notas, ó Cifras de Ceulen, tiré á àproximar asta las 21 notas [el 3 con

que comienza el número pi seguido de sus veinte primeros decimales], que Ceulen mandò esculpir en su sepulchro, y que todas las expresase una linea recta, al fin hallè esa linea, pero saliò tan compuesta, que no hize caso de ella, pues mi fin era, que tuviese todo lo posible de facil, y de sencilla»[42].

En la cita anterior se aprecia que, según dice, halló muchas cuadraturas, llegando incluso a una que proporcionaba π con las 21 cifras de la aproximación de Ceulen. Sin embargo, esta última construcción le parecía demasiado complicada, y hay que recordar que Sarmiento buscaba hallazgos que fuesen útiles para la práctica. A continuación se explica en qué consisten las dos construcciones que dejó descritas.

La primera cuadratura

En algún momento anterior a 1732[43], Sarmiento encontró su «*primera tentativa util* para la Practica»[44] (ver Figura 1), una cuadratura que describe de la siguiente manera:

> «Suponia vertical sobre una Linea Recta [HD en la Figura 1], un Circulo [AFBG], cruzadas en su Centro, dos Lineas Rectas indefinidas. Suponia, y bien, que la Raiz Quadrada del Circulo [la raíz cuadrada de pi, lado del cuadrado de área equivalente a la del círculo dado], avia de ser una Linea, Corda de un Arco del Circulo dado, para Quadrarse.

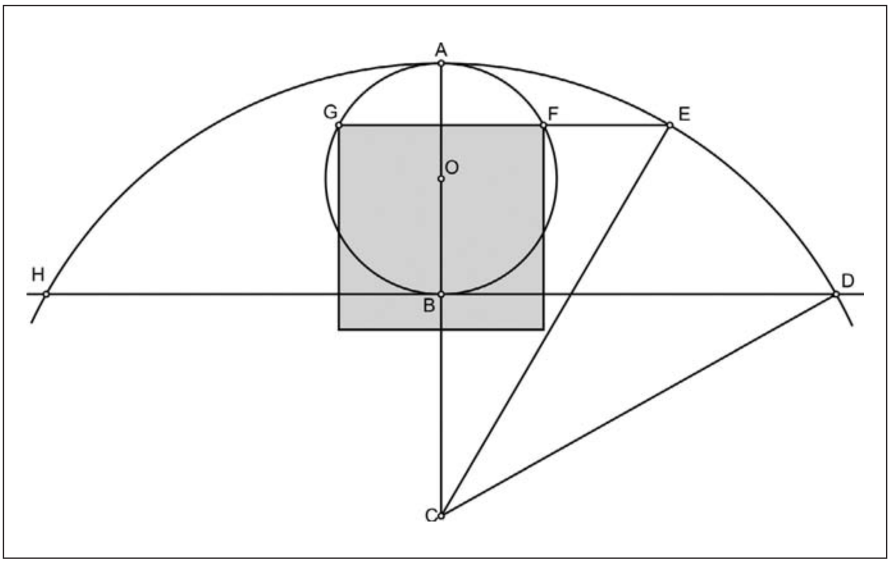

Figura 1: La primera cuadratura.

La dificultad consistia en saber, de *quantos Grados* y *Minutos*, avia de ser ese *Arco de Circulo*; y como se avia de tirar *Geometricamente*, la dicha *Corda*. Comenzè à ir describiendo Circulos excentricos, pero todos contingentes al circulo original. De ese modo, siempre el Circulo Original quedaba en un Segmento de un grande Circulo. Asi proseguia asta que lleguè a un Circulo excentrico, cuyo, era 3´91986190 su Rayo [radio]. Tirè un Arco de Circulo [HAED], con ese Rayo [AC] y una Corda [HBD]: y sobre ella quedò incluso el Circulo Original. Dividasè el Semiarco [AD], en dos; y por la division [E] tirese una Paralela [a HD]; la qual cortarà en el circulo dado, la Corda igual a la Raiz Quadrada del Circulo [GF]. Todo consiste en señalar la Linea, 3´919862139480... que seà el Rayo del excentrico. No hallè esa Linea entera; pero si la Linea 3´91986190 del modo siguiente [no indicado en la Figura 1 por ser trivial su construcción], y muy facil.

La Corda de 30=0´5176380902... resta del rayo; y quedara 0´4823619097... Añadase la Linea facil 0´437500000... Y añadida con 3 Rayos, sera 3´9198619097... que ha de ser el Rayo del grande Circulo excentrico. La Linea 0´43750000... se sabe, tomando 7 octavas del Semirrayo, 0´5000000... Podrà hallarse cosa mas pronta, natural, facil, y Geometrica, que esta operacion?»[45].

Unos cálculos sencillos conducen a que el valor de pi que se desprende de esta cuadratura es 3´141592663, con los primeros siete decimales correctos. Compárese con los tres decimales de la mejor solución al problema que conocía Sarmiento, la de Viète.

Fray Martín da algunas indicaciones sobre el procedimiento que siguió para hallar esta cuadratura. En el texto citado anteriormente explica que comenzó su construcción dibujando las dos circunferencias tangentes. Encontró que si era capaz de hacer que la circunferencia exterior tuviera un radio de 3´919862139480… la cuadratura estaría conseguida. No logró encontrar una línea de ese tamaño, pero sí una que se le aproximaba lo suficiente como para que de su construcción se dedujese una buena aproximación del valor de pi.

Por otra parte, en otro lugar de sus escritos el benedictino propone otra manera, más elegante, de encontrar la «Linea facil» 0´4375 radios sin tener que realizar la incómoda operación de hallar $\frac{7}{8}$ de la mitad del radio (ver Figura 2):

«Tomesè el Semirayo [AE en la Figura 2] 0´500000... Pongase por Corda [AF], desde el Vertice del circulo. Tiresè su Seno Recto [GF]; y esa misma Linea, vajese al Diametro, y coloquese en èl, desde el Centro, à la Yzquierda [HO]. De ese modo, las dos, formaràn una Zeta (Z) [GFIHO]. La Diagonal, dividirà el Seno de Complemento [coseno, GO] 0´875, en dos partes iguales, cada una de 0´4375»[46].

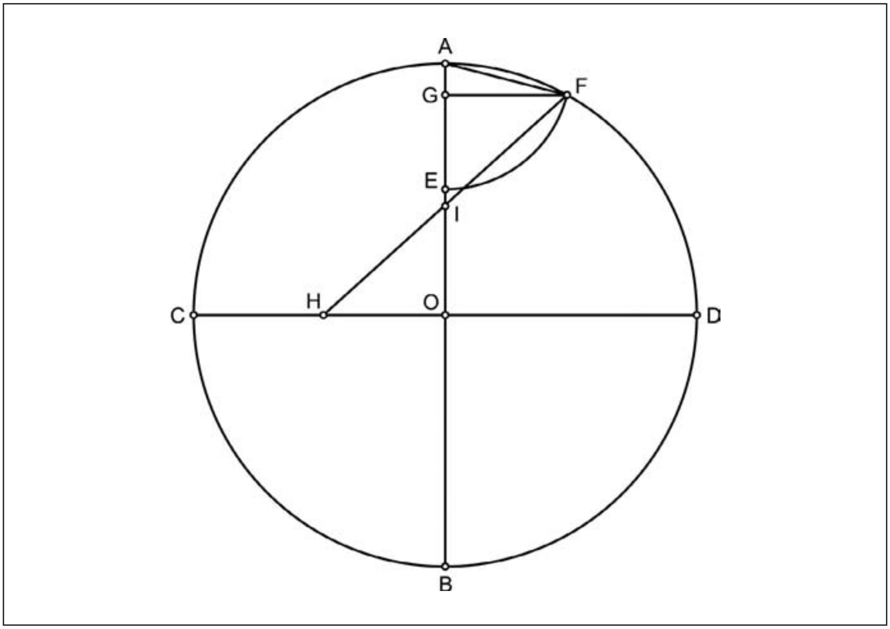

Figura 2: Método para hallar la «Línea fácil» mediante la «Zeta».

La segunda cuadratura

Se describirá ahora la segunda de las cuadraturas de Sarmiento. Es algo más compleja, pero mucho más precisa:

> «Sumensè las Cordas de 120 Grados; ó del triangulo; de la Corda de 72 Grados; ó del Pentagono; y la de 30 Grados; ó del Dodecangulo [dodecágono regular]. Arrojense los tres Rayos de la Suma: y del residuo, tomesè la 4ª parte, y á ella, se añadirà el Duplo de la Corda de 90 Grados, ó del Quadrado; y toda sumarà 0´93474197533590 [Sarmiento o el copista omiten aquí que para obtener este resultado se debe restar previamente un diámetro]. Retengase ese numero. Despues: à la raiz de 0´8; que serà la Corda, que corresponde al Semiarco [sería más preciso decir «la semicuerda del arco»] de la Sagita [la sagita o seno verso de un ángulo θ corresponde a 1-cos θ] 0´4 añadasè un Semi Rayo, y la nona parte del Rayo, todo facil. Restesè de la Suma el numero reservado 0´934741...; y el residuo serà, 0´57079632677512; y esta Linea añadida al Rayo, es la Linea igual al Quadrante del Circulo en 12 Zifras de aproximacion [...].
>
> Notese aqui, que ès tanta la *aproximacion*, que en *Cien mil Millones*, solo ay la diferencia de una *Unidad*; lo que ès prodigioso»[47].

Detallaremos gráficamente la construcción de Sarmiento (Figura 3). En primer lugar se deben sumar las cuerdas de los ángulos de 120, 72 y 30 grados (EF, CH=FH´ y EC=EC´ respectivamente en la Figura 3), con lo que se obtiene la línea C´H´. Despreciando tres radios se tiene el segmento C´I, del que se necesita su cuarta parte C´K. La cuerda del ángulo de 90º es CB, y hay que duplicarla, obteniendo KL, cantidad que se añade a C´K, hallando C´L. Restando un diámetro LM=AB se tiene la distancia C´M.

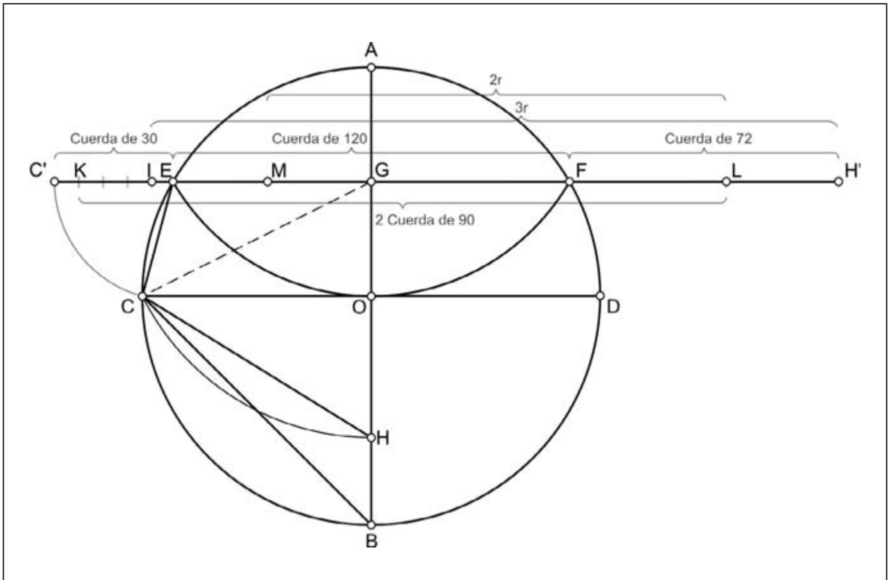

Figura 3: Primeros pasos de la Segunda Cuadratura.

Por otra parte, para continuar es necesario utilizar un segmento de 0´8 veces el radio del círculo. Para ello Sarmiento podría dividir en cinco partes este radio utilizando el Teorema de Tales y tomar cuatro de estas divisiones, pero prefiere emplear una elegante y más sencilla construcción que también está presente en la cuadratura de Viète. Con sólo unir los puntos ya disponibles C y G con un segmento que después se prolonga hasta cortar la circunferencia se halla el punto N, cuya altura medida desde el diámetro horizontal es precisamente 0´8 veces el radio del círculo (Figura 4). Transportando esta distancia al diámetro vertical se obtiene el segmento ON´.

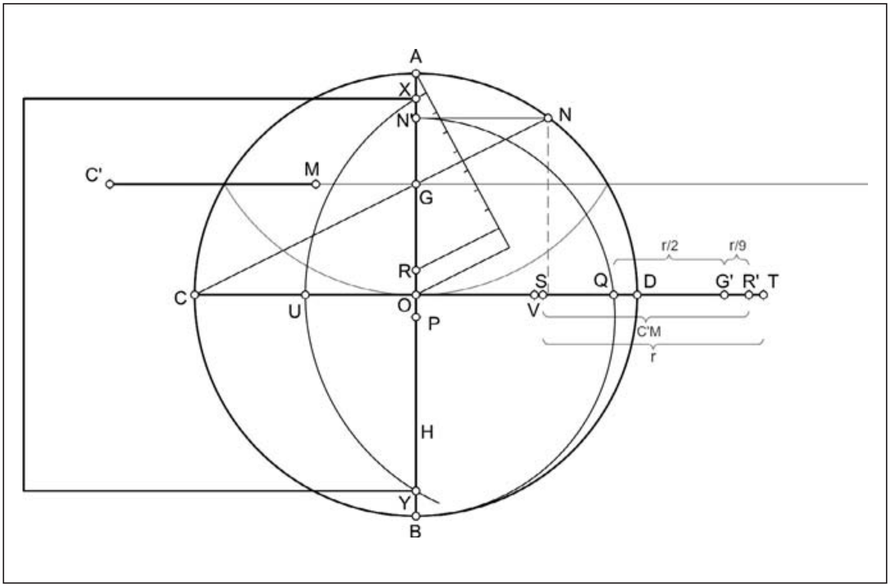

Figura 4: La Segunda Cuadratura.

Para hallar la raíz cuadrada de la distancia ON´ se calcula su media geométrica con el radio OB. Dibujando una semicircunferencia que pase por N´ y por B con centro en el diámetro AB (concretamente en P) se encuentra la distancia OQ, que es la raíz cuadrada buscada. Se suma a este segmento la mitad del radio de la circunferencia a cuadrar GO=QG´ y la novena parte del radio RO=G´R´, obteniendo OR´, a lo que se resta el segmento SR´=C´M que se había reservado anteriormente. Añadiendo un radio se tiene OT, cuya longitud es 1´570796326775, aproximadamente la cuarta parte de la medida de la circunferencia original. Multiplicando por dos esta cifra se obtiene una distancia igual a 3´141592653550, que equivale a pi con diez decimales correctos.

Para cuadrar el círculo sólo se necesita hallar la media geométrica del radio y el doble de OT, aproximación de pi. En la Figura 4 se resuelve gráficamente la media entre OT y la mitad del radio OU, colocados como segmentos contiguos. El punto medio del total TU es V. El arco de centro V que pasa por U y por T proporciona los puntos X e Y. Como OX es media de OT y OU, XY es el lado del cuadrado buscado.

Valoración de las cuadraturas de Sarmiento

El fraile benedictino sentía mucho aprecio por la primera de las cuadraturas que se han descrito aquí, la cual, como se ha señalado, fue la primera muy precisa que inventó. Pero no era éste el único motivo por el que le satisfacía:

> «Despues hallè otras muchas aproximaciones por Lineas, mayores y mayores; pero ninguna tan natural y tan facil»[48].

Es importante detenerse en este punto. Su primera cuadratura puede parecer complicada, pero no sólo hay que fijarse en el número de pasos que involucra una construcción para valorar su utilidad, sino también en la facilidad de su trazado. Existen cuadraturas —y menos precisas que las de Sarmiento— que requieren pasos que resulta incómodo dibujar. En este sentido, algo en apariencia inofensivo es la división de un segmento en muchas partes iguales mediante el Teorema de Tales: a medida que aumenta este número de partes el trazado a mano llega a convertirse en imposible. Fray Martín procuraba evitar este tipo de divisiones siempre que podía, como cuando en la primera cuadratura utilizaba la «Zeta» para no dividir el radio en dos y luego en ocho partes o cuando en la segunda empleaba la construcción de Viète para trazar un segmento que fuera 0´8 veces el radio del círculo, en vez de dividir este radio en cinco partes.

En suma, las cuadraturas de Sarmiento son elegantes y muy precisas, y la primera es además bastante sencilla. Sin embargo, no aparecen en las revisiones que tratan el tema de la cuadratura del círculo, como las de Schepler [1950a, 1950b, 1950c], Beckmann [1976], Berggren, Borwein y Borwein [2004] y otras, en las que sí se recogen soluciones al problema de complejidad similar a las expuestas aquí. Además, no abundan en la literatura construcciones de exactitud comparable a las de Sarmiento. Muy al contrario, no tenemos noticia de ninguna cuadratura anterior al siglo XX que superase en precisión a la primera de sus construcciones, siendo la primera que lo hizo la que el matemático hindú Ramanujan (1887-1920) propuso en 1914[49], un siglo y medio después de Sarmiento. Esta cuadratura es algo menos compleja que la del fraile benedictino.

Como se aprecia, el trabajo de Sarmiento es meritorio. Con sus construcciones superó en exactitud a las de conocidos cuadraturistas como Arquímedes o Viète, pero también a las de otros y otras de quienes no se ha hablado aquí, como Kochansky, Hobson, Goodhue, Specht, Gelder y Merrill[50]. La primera de sus construcciones incluso mejoró la precisión de otra de las afamadas cuadraturas de Ramanujan[51], y la segunda es todavía más exacta que las dos del indio, si bien es cierto que la complejidad de la segunda construcción de Fray Martín es bastante elevada, y esta circunstancia le resta mérito.

Conclusiones

Sarmiento abordó el problema de la cuadratura con el fin de profundizar en el estudio de la Geometría y de encontrar construcciones que pudieran ser útiles para la práctica. Tenía amplios conocimientos sobre el tema, superó en precisión a los cuadraturistas de su época y hubo que esperar largo tiempo para que se propusieran construcciones comparables a las suyas, y todo ello sin cometer el error en el que habían incurrido tantos antes que él, esto es, el de sostener que sus cuadraturas constituían la solución definitiva al enigma. Más bien al contrario, Fray Martín no hallaba nada inconveniente en pensar que tal vez circunferencia y diámetro fuesen inconmensurables, ni tampoco en plantearse que respetando las restricciones clásicas quizá la cuadratura del círculo fuese imposible.

NOTAS

1. ÁLVAREZ LIRES [2000].
2. ÁLVAREZ LIRES [2000], BASANTA [1991].
3. ALLEGUE [1993].
4. PÉREZ RODRÍGUEZ, ÁLVAREZ LIRES y PORTA [2006].
5. ALVAREZ LIRES y GARCÍA SUÁREZ [2002].
6. Cuando citemos a Sarmiento respetaremos la ortografía y los subrayados de los originales, pero por motivos de claridad utilizaremos los números como se emplean en la actualidad. Por ejemplo, en la cita que sigue ponemos el número *2´00000…*, mientras que en el texto aparece *200 ∂ &ª*. El símbolo *∂* equivale al punto que nosotros utilizamos como separador de los millares en un número, y *&ª* significa que el número tiene más cifras de las que se indican. Así, el número *200 ∂ &ª* equivale a nuestro *200.000.000…* Por otra parte, en las copias de los textos de Sarmiento no siempre aparece la coma decimal en los números, y en este caso no se halla presente. El resto del texto aclara que Sarmiento se refiere en realidad al número *2´00000…*
7. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 603r-603v, n. 3033, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
8. Sarmiento nunca utiliza el símbolo π ni se refiere al valor de la proporción entre el diámetro y la longitud de una circunferencia como *pi*. En la época en la que escribía Sarmiento todavía se estaba extendiendo esta notación, que sí se emplea en este artículo.
9. Hallar gráficamente una línea cuya longitud sea la raíz cuadrada de la longitud de otra es muy sencillo, y el procedimiento ya aparece en los *Elementos* de Euclides (Libro VI, Proposición 13). En el caso que interesa aquí consiste simplemente en hallar la media geométrica de π y el radio del círculo, 1.
10. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 3º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 448r, n. 4451, Colección Medina Sidonia, Tomo XV.
11. Según la mitología griega Belerofonte fue el héroe que mató a la Quimera, un ser monstruoso que vomitaba fuego.

12. Montucla (1725-1799), historiador de las matemáticas contemporáneo del fraile, expresó una opinión muy similar a la de éste sobre los intentos de Saint-Vincent de cuadrar el círculo: «On ne peut lui refuser la justice de remarquer que personne avant lui ne s´est porté dans cette recherche avec autant de dénie, et même, si nous en exceptons son objet principal, avec autant de succès» (véase MONTUCLA [1831, p. 79]).
13. SARMIENTO, Fr. M. *Sobre la Quadratura del Circulo,* fol. 30v, Colección Medina Sidonia, Tomo V.
14. SARMIENTO, Fr. M. *Sobre la Quadratura del Circulo,* fol. 30r, Colección Medina Sidonia, Tomo V.
15. Años después del hallazgo de Lagny se descubrió que sólo sus 112 primeros decimales eran correctos.
16. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 5º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 157r, n. 6472, Colección Medina Sidonia, Tomo XVII.
17. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 606r, n. 3040, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
18. La aproximación de Metius había sido descubierta anteriormente por el chino Tsu Ch´ung-chih (430-501) (SCHEPLER [1950a]).
19. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 609v, n. 3049, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
20. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 5º de la Obra de 660 Pliegos,* fols. 199v-200r, n. 6564, Colección Medina Sidonia, Tomo XVII.
21. VIETAE [1646, pp. 392-393].
22. SARMIENTO, Fr. M. *Sobre la Quadratura del Circulo,* fol. 29r, Colección Medina Sidonia, Tomo V.
23. ÁLVAREZ LIRES [2002].
24. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 612r, n. 3054, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
25. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 5º de la Obra de 660 Pliegos.* Colección Medina Sidonia, Tomo XVII.
26. SARMIENTO, Fr. M. *Catalogo de los Autores de quienes yo Fray Martin Sarmiento tengo ad usum o todas sus obras o parte de ellas, o algún tomo suelto y separado.* Real Academia de la Historia, Ms. 9/1829.
27. ARQUÍMEDES [2006].
28. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 604v, n. 3037, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
29. DELAHAYE [2003].
30. Sarmiento siempre hablaba de la aproximación de π de Ceulen con 20 decimales. Sin embargo, este matemático alemán llegó en realidad a hallar 34 decimales correctos, resultado que no aparecía en el libro de Ceulen sobre π que el benedictino poseía, *De Circulo et adscriptis liber*. Sólo tras la muerte del alemán se conoció su aproximación con 34 decimales, pero no parece que Sarmiento tuviese noticia de ella.
31. SARMIENTO, Fr. M. *Sobre la Quadratura del Circulo,* fols. 26r-26v, Colección Medina Sidonia, Tomo V.

32. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fols. 606r-606v, n. 3041, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
33. SARMIENTO, Fr. M. *Sobre la Quadratura del Circulo,* fol. 28v, Colección Medina Sidonia, Tomo V.
34. SARMIENTO, Fr. M. *Sobre la Quadratura del Circulo,* fol. 29r, Colección Medina Sidonia, Tomo V.
35. Así, Sebastián Fernández de Medrano (1646-1705), creyendo que había solucionado definitivamente el problema, había propuesto en 1676 una cuadratura de la que se deducía un valor de π de 3´1415751. Véase NAVARRO LOIDI [2006, vol. 1, pp. 505-510].
36. SARMIENTO, Fr. M. *Sobre la Quadratura del Circulo,* fol. 28v, Colección Medina Sidonia, Tomo V.
37. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 608v, n. 3047, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
38. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 609r, n. 3047, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
39. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 609r, n. 3048, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
40. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fols. 609v-610r, n. 3049, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
41. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fols. 609v-610r, n. 3049, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
42. SARMIENTO, Fr. M. *Sobre la Quadratura del Circulo,* fol. 29v, Colección Medina Sidonia, Tomo V.
43. Sarmiento sólo publicó en vida una obra, la *Demonstracion critico-apologetica del Theatro critico Universal*, en defensa de las tesis de su amigo Fray Benito Jerónimo Feijoo (1676-1764). En este texto, cuya primera edición data de 1732, aparecía ya una mención velada a una cuadratura que había encontrado (SARMIENTO [1732, vol. 2, p. 351]). En el Volumen 2º de la *Obra de 660 Pliegos* (SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 606v, n. 3042, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV) aclara que se refería a la construcción que se describe aquí.
44. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 5º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 228v, n. 6620, Colección Medina Sidonia, Tomo XVII.
45. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 5º de la Obra de 660 Pliegos,* fols. 228r-229v, ns. 6620-6622, Colección Medina Sidonia, Tomo XVII.
46. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 608r, n. 3045, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.
47. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 5º de la Obra de 660 Pliegos,* fols. 156r-156v, n. 6469, Colección Medina Sidonia, Tomo XVII.
48. SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 5º de la Obra de 660 Pliegos,* fol. 229v, n. 6622, Colección Medina Sidonia, Tomo XVII.
49. RAMANUJAN [1914, p. 367].
50. Una colección de aproximaciones gráficas a la cuadratura del círculo está disponible en la página http://www.pauloporta.com/Xeometria/cuadraturas.htm.
51. RAMANUJAN [1913, p. 132].

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. *Fuentes primarias manuscritas*

Cuando Sarmiento murió en 1772 su amigo Don Pedro Alcántara Alonso Pérez de Guzmán, XIV Duque de Medina Sidonia, hizo que se sacara una copia de sus manuscritos, la cual ocupó dieciocho tomos. Hoy en día no se conservan los originales de Fray Martín, pero sí las copias de Medina Sidonia y otras que se hicieron a partir de ellas.

Las copias solicitadas por el Duque se encuentran en la actualidad en el Archivo de Medina Sidonia, exceptuando tres tomos que se hallan en el Museo de Pontevedra. Para la realización de esta investigación se ha empleado principalmente la reproducción digital de la Colección Medina Sidonia disponible en el Consello da Cultura Galega, en Santiago de Compostela. Asimismo se ha utilizado un escrito inédito y autógrafo de Sarmiento que no se encuentra en la colección ducal sino en la Real Academia de la Historia, el catálogo de libros que poseía.

SARMIENTO, Fr. M. *Sobre la Quadratura del Circulo,* Colección Medina Sidonia, Tomo V.

SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 2º de la Obra de 660 Pliegos*, Colección Medina Sidonia, Tomo XIV.

SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 3º de la Obra de 660 Pliegos*, Colección Medina Sidonia, Tomo XV.

SARMIENTO, Fr. M. *Volumen 5º de la Obra de 660 Pliegos*, Colección Medina Sidonia, Tomo XVII.

SARMIENTO, Fr. M. *Catalogo de los Autores de quienes yo Fray Martin Sarmiento tengo ad usum o todas sus obras o parte de ellas, o algún tomo suelto y separado*. Real Academia de la Historia, Ms. 9/1829.

2. *Fuentes primarias impresas*

ARQUÍMEDES (2006) «Medida del círculo» En A.J. Duran (ed.), *Arquímedes: Obras escogidas*, 2. 1ª edición, Madrid, Real Sociedad Matemática Española, International Congress of Mathematicians Madrid 2006, Patrimonio Nacional, 91-100.

BERGGREN, L.; BORWEIN, J. y BORWEIN, P. (2004) *Pi: A Source Book.* 3ª edición, New York, Springer.

BASANTA, J.L. (1991) *La «Pantómetra» del Padre Sarmiento.* 1ª edición, Sada (A Coruña), Ediciós do Castro.

RAMANUJAN, S. (1913) «Squaring the circle». *Journal of the Indian Mathematical Society, 5*, 132.

RAMANUJAN, S. (1914) «Modular equations and approximations to π». *Quarterly Journal of Mathematics, 45*, 350-372.

SARMIENTO, Fr. M. (1732) *Demonstracion Critico-Apologetica del Theatro Critico Universal*. 1ª edición, Madrid, Imprenta Real de la Gaceta.

VIETAE, F. (1646) *Opera Mathematica*. Lugduni Batavorum [Leiden], Ex Officinâ Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum.

3. Fuentes secundarias

ALLEGUE, P. (1993) *A Filosofía Ilustrada de Fr. Martín Sarmiento*. Colección «Universitaria», 1ª edición, Vigo, Edicións Xerais de Galicia.

ÁLVAREZ LIRES, M. (2000) *A Ciencia no Século XVIII: Fr. Martín Sarmiento (1695-1772), unha figura paradigmática*. Vigo, Universidade de Vigo.

ÁLVAREZ LIRES, M. (2002) *Frei Martín Sarmiento, un científico da Segunda Ilustración.* 1ª edición, Santiago de Compostela, Servizo de Publicacións da Universidade de Santiago de Compostela.

ÁLVAREZ LIRES, M. y GARCÍA SUÁREZ, X. (2002) «O papel das matemáticas na obra de Frei Martín Sarmiento». *Sarmiento. Anuario Galego de Historia da Educación, 6*, 41-67.

BECKMANN, P. (1976) *A History of* π. 1ª edición, New York, St. Martin's Griffin.

DELAHAYE, J. (2003) *L´affascinante numero* π. 1ª edición, Milano, Ghisetti e Corvi Editori.

MONTUCLA, J. (1831) *Histoire des récherches sur la quadrature du cercle*. 2ª edición, París, Bachelier Père et Fils.

NAVARRO LOIDI, J.M. (2006) *Las Ciencias Matemáticas y las Enseñanzas Militares durante el Reinado de Carlos II*. 1ª edición, Madrid, Ministerio de Defensa, 2 vols.

PÉREZ RODRÍGUEZ, U.; ÁLVAREZ LIRES, M. y PORTA, P. (2006) «Frei Martín Sarmiento e a cuadratura do círculo». *El Museo de Pontevedra, LX*, en prensa.

SANTOS PUERTO, J. (2002) *Martín Sarmiento: Ilustración, Educación y Utopía en la España del Siglo XVIII. Volumen II.* 1ª edición, A Coruña, Fundación Pedro Barrié de la Maza.

SCHEPLER, H. (1950a) «The Chronology of Pi (1)». *Mathematics Magazine, 23(3)*, 165-170.

SCHEPLER, H. (1950b) «The Chronology of Pi (2)». *Mathematics Magazine, 23(4)*, 216-228.

SCHEPLER, H. (1950c) «The Chronology of Pi (3)». *Mathematics Magazine, 23(5)*, 279-283.